

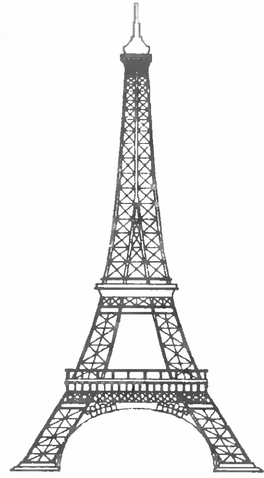
"十一五"国家重点图书

解析与概率数论导引

□ G. 特伦鲍姆 著
□ 陈华一 译



“十一五”国家重点图书



数学天元基金资助项目

解析与概率数论导引

Jiexi yu Gailü Shulun Daoyin

□ G. 特伦鲍姆 著
□ 陈华一 译



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目 (CIP) 数据

解析与概率数论导引 / (法) 特伦鲍姆著; 陈华一译.
— 北京: 高等教育出版社, 2011.1
ISBN 978-7-04-029467-5

I. ①解··· II. ①特··· ②陈··· III. ①解析数论 ②概率
-数论 IV. ①O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 131127 号

策划编辑	王丽萍	**责任编辑**	边晓娜	**封面设计**	张　楠
责任绘图	杜晓丹	**版式设计**	王　莹	**责任校对**	杨凤玲
责任印制	陈伟光				

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市京南印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2011 年 1 月第 1 版
印　　张	39.25	**印　　次**	2011 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	750 000	**定　　价**	79.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　29467–00

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 作出了奠基性的贡献。他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名。在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦茨及利翁斯等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家。由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉。

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展。这一巨大的成功, 根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑, 根源于改革开放国策所带来的强大推动, 也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助。在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素。足以证明这一点的是:在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的熏陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌。

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制。根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版。这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学 (包括纯粹数学与应用数学) 的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序。

李大潜

2008 年 5 月

前言

本书基于笔者 15 年来在波尔多、巴黎及南锡讲授的研究生课程, 在 1990 年 Élie Cartan 研究所出版社版的基础上修改、更新、增订而成, 其英文版由剑桥出版社发行。此书旨在给年轻数学工作者提供自洽的算术问题的分析方法导引, 同时在一些基本问题上可供更有经验的研究人员查阅, 起到工具书的作用。这样的目标必然导致要有所取舍。本书的原则是在力所能及的前提下尽量从审美的角度来作选择。

上述双重目标促使了在各章中采用正文 — 注记 — 习题的传统模式。正文中的命题一般都有详细证明, 有时还附有参考文献, 以帮助读者初读时建立整体认识。相反地, 注记包括与正文相关的、虽不应忽视但在泛读时可以略过的定理或证明。习题兼有两种功能: 一部分经典的习题帮助读者掌握学到的概念; 而另一部分习题则是真正的研究成果, 有时甚至是新近发现的成果, 它们主要集中在第三部分。当前教程附带的习题有为难读者之势。笔者曾天真地认为, 通过精心编写不需巧妙构造或精湛技巧便可解答的习题可以避免这一点。然而第一版发行以后收到的许多对习题答案的询问说明了这很可能是不切实际的幻想。于是笔者与吴杰合作撰写了习题答案, 以飨读者。然而, 习题中未解决的问题只是少数; 另外, 习题所涉及的结论都是最常见的, 并指明了关键步骤。就算不努力求解或不看答案, 习题部分也可作为非正式的参考文献。

书中行文均力求偏重于方法而非结论。这样特定的尝试性选择导致了全文被略显人为地分成三部分: 初等方法, 复解析方法和概率方法。人们尽可以质疑这样的分类: 凭什么说基于 Poisson 求和公式的 van der Corput 方法比用复积分的 Selberg-Delange 方法要初等? 鞍点法的第一步是 Laplace 变换的

反转积分公式, 为何将它归为"概率"方法, 等等。从这样或那样的标准看来, 类似的疑问还很多。毋庸置疑, 这样的选择是基于带有争议的偏见之上的。比如, 初等方法的 "定义" 是只用到实变函数的方法; 采用概率观点陈述鞍点法是因为它在概率论中常常用到, 同时也因为在数论中, 它是用来解决概率素数论问题的特殊工具。总之, 本书的分类原则决非 Bourbaki① 式的, 它不过是试图为初学者指明方向而已。

虽然本书的内容并非均有新意, 但总是力求免落俗套。当笔者认为需要的时候, 便会对一些经典结论重新演绎: 要么采用新方法 (例如 Tchébychev 估计的 Nair 方法), 要么简化运算。虽然从目录上看改动并不明显, 但笔者希望这将对细心的读者有所裨益。

书中有些结果从未在文献中出现过, 主要有: Selberg-Delange 方法得出的一致结论 (第二部分第五章); Ikehara-Ingham 定理的显式余项形式 (第二部分 §7.5); 用鞍点法研究筛函数 $\Phi(x, y)$ (第三部分第六章)。Ikehara 定理的实效形式与 Berry-Esseen 不等式有紧密联系, 这个真正原理上的一致令笔者惊叹不已。另外, 力求与其他文献 (特别是 Elliott 的妙作) 互补的合理考虑使得选择上有所侧重, 例如 Erdős-Wintner 定理, Erdős-Kac 定理或 Halász 定理的证明, 等等, 见第三部分第四章。其中最后一个定理相当于 Montgomery 的方法在他所指明的方向上的一个拓展。

与第一版相同, 同事和朋友们在第二版手稿的整理和精炼上给予了我许多帮助。在此谨向 Michel Balazard、Régis de la Bretèche、Gautami Bhomwik、Paul Erdős、Michel Mendès France、Olivier Ramaré、Jean-Luc Rémy、Imre Ruzsa、Patrick Sargos、András Sárközy、Marijke Wijsmuller 及吴杰表示谢意。如果没有他们的帮助, 那勘误表会变得比致谢还要长得多 (实践证明这可不是说说而已)。最后, 衷心感谢 Daniel Barlet 在本书于法兰西数学会出版社出版过程中友好而高效的协助。

Gérald Tenenbaum, 1995 年 3 月于南锡

① 法国数学学派, 著有《数学原理》(Éléments de Mathématique)。 ——译者注

第三版前言

本书第三版承袭了前一版的组织结构以及叙述风格, 但在内容上有很大扩展。这主要基于三重目的: 引进最新进展, 补充方法论, 以及为本科学生, 尤其是参加中学教师资格考试[②]的学生提供基础知识及有益的补充知识。

文献中结果的更新主要体现在注记和习题里, 亦有自成一节的, 例如第三部分 §6.5 中的 Kubilius 模型。另外还会引进某些命题的新证明, 如 Tauber 定理 (第二部分 §7.2) 和 Halász 定理 (第三部分 §4.3)。最后, 新近的科研成果也促成了对行文的一些重大改动, 如 Turán-Kubilius 不等式及其在脆数情形的推广。

许多新进展将在原书框架之下得以体现, 主要有: 第一部分 §4.7 中 Selberg 筛法的一个不甚为人知的一般形式, 以及同一章习题中该方法在素数间小差距问题中的应用; Ramanujan 方法在因子个数函数极大阶估计中的体现 (第一部分第五章习题 90); Kusmin-Landau 不等式 (第一部分定理 6.7) 及广义 van der Corput 定理 (第一部分定理 6.10); 数论中的显式公式 (第二部分 §4.4 及 §8.6); 第二部分第八章算术数列中素数分布部分的显著拓展和第三部分 §5.6 中引进的 Jacobsthal 函数以及关于素数间大差距的 Rankin 定理证明。

在习题中还补充了定理的直接应用及综合问题。另外还增加了为本科生及未来的中学教师准备的关于 Euler-Maclaurin 求和公式的新问题 (第一部分第零章习题); Legendre 符号和二次剩余简介 (第一部分第一章习题); 模 1 均匀分布理论导引 (第一部分 §6.5); Diophantus 逼近论初步及连分式综论 (第一部分第七章) 以及 Euler Γ-函数指南 (第二部分第零章)。

② 译自法文 agrégation。 ——译者注

上述对新内容的简介远不足以体现目标各异的新进展之间错综复杂的联系, 另外它也不是面面俱到的。对全书进行了重新整理, 甚至重写了一些章节。新加的 125 个习题体现了一种整体感, 其中包括对一些重要定理的其他证明, 还给出了一些定理的简化形式, 如 van der Corput 定理或 Erdős-Turán 不等式。然而行文风格的初衷没有根本性的改变。

笔者谨向仔细阅读新手稿并提出意见的同事们, 尤其是向 Joseph Basquin、Régis de la Bretèche、Farrell Brumley、Cécile Dartyge、Kevin Ford、Bruno Martin、Michel Mendès France、Aziz Raouj、Jean-Luc Rémy、Olivier Robert、Anne de Roton、Patrick Sargos、André Stef 及吴杰致以诚挚的谢意。

Gérald Tenenbaum, 2007 年 11 月于南锡

中文版前言

本书大体与 2008 年巴黎 Belin 出版社出版 (收集在 Échelles 系列之中) 的内容相同, 但对发现的笔误以及印刷和内容上的错误作了修正。

作者首先对他的朋友兼合作者吴杰表示深挚的谢意。他无私的帮助对翻译工作起到了关键作用。翻译过程中的语言表达, 学术观点以及符号系统的选择都是非常棘手的事情: 既要忠实于原著, 又要方便中文读者。吴杰在这两方面都具有敏锐的知觉。无论是在准备阶段还是在校对阶段, 他都友善地为翻译工作贡献了他的学识和精力。

作者同样衷心地感谢译者陈华一。书稿长达近 600 页, 从目录到 (双重) 索引, 任务繁重, 而译者欣然接受, 完成了细致, 准确而精巧的工作。值得一提的是, entier friable 一词有了精确的翻译。如今在解析数论领域, 该词所表达概念已经不可或缺。我们希望这个形象的专业词汇能在中国数论界广为流传。

最后感谢高等教育出版社的主动参与以及无可挑剔的细心协助。

Gérald Tenenbaum, 2010 年 1 月于南锡

译者说明

译文中外国人名均用拉丁字母拼写, 以方便读者查阅外文文献。

法国数学文献中开区间用反方括号来表示, 比如 $]a,b]$ 表示以 a 和 b 为端点的左开右闭区间, $]a,b[$ 表示开区间, 等等。遵照作者的意愿, 在译文中仍保留这样的记法。

应作者要求, caractère (d'un groupe) 译成 (群的) 特征标, 但 caractère de Dirichlet (数论函数) 译成 Dirichlet 特征, 请读者不要与 caractéristique 一词混淆 (该词在本书中并不出现)。

译文中引用定义, 命题和公式时采取如下原则。倘若被引用的内容来自同一部分, 则直接引用内容的序号, 比如在第三部分中引用同一部分的序号为 (2.1) 的公式时, 就直接用 (2.1) 表示; 但当被引用的内容来自不同部分的时候, 用大写罗马数字表示部分的序号, 或在引用之前用中文加注部分的序号, 比如在第一部分中引用第二部分的定理 8.17 时, 就用第二部分定理 8.17 来表示, 引用第二部分序号为 (1.6) 的公式时, 用 (II.1.6) 表示。

译文含有双重名词索引, 人名均排在数学名词之前, 按拉丁字母顺序排序; 数学名词在两个索引中分别按拼音字母顺序和笔画排序。读者可以根据自己的需要选择适当的索引进行查询。

本书作者对翻译工作作了耐心的指导; 吴杰老师阅读了译文初稿并提供了许多有益的建议; 焦莹校对了部分译文; 脆数 (entier friable) 一词是第一次翻译成中文, 参考了金丝燕和陈立川老师的意见; 高等教育出版社海外分社的各位老师, 尤其是王丽萍, 赵天夫和李鹏等, 在翻译过程中提供了具体而细致的协助。责任编辑边晓娜为本书的出版付出了辛勤的劳动。译者谨向他们致以最衷心的感谢。

译文的语言表达方面与责任编辑观点不一致的地方, 定稿中采取了译者的意见。如果因此给读者带来理解上的不便, 译者承担全部的责任。

记号

本书中将使用如下记号和约定。

除特别指出或上下文有限制，字母 p，无论有没有下标，总代表一个素数。用 $\mathbb{P}$ 表示所有素数的集合。

$a \mid b$ 表示 a 整除 b；$p^\nu \parallel a$ 表示 $p^\nu \mid a$ 且 $p^{\nu+1} \nmid a$；$a \mid b^\infty$ 表示 $p \mid a \Rightarrow p \mid b$。并记 $[a,b]$ 为 a 和 b 的最小公倍数，(a,b) 为 a 和 b 的最大公约数。

$P^+(n)$ 表示整数 $n > 1$ 的最大素因子，$P^-(n)$ 表示其最小素因子。约定 $P^+(1) = 1$，$P^-(1) = +\infty$。

若 x 是实数，$\lfloor x \rfloor$，$\lceil x \rceil$ 和 $\langle x \rangle$ 分别表示不超过 x 的最大整数，不小于 x 的最小整数以及 x 的小数部分。

令 $\|x\| := \min_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$，$x^+ := \max\{x, 0\}$ $(x \in \mathbb{R})$ 并记 $\mathrm{e}(x) := \mathrm{e}^{2\pi i x}$ $(x \in \mathbb{R})$，$\ln^+ x := \max\{0, \ln x\}$ $(x > 0)$，其中 ln 表示自然对数。用 $\ln_k$ 表示自然对数的 k-次复合函数。记号 log 则用来表示复对数，若不加另行说明，取辐角主值。

当字母 s 表示复数时，隐含地用关系 $s = \sigma + i\tau$ 来定义实数 σ 和 τ。

同时用 Landau 记号 $f = O(g)$ 和 Vinogradov 记号 $f \ll g$ 来表示关系 $|f| \leqslant C|g|$ 对某个适当的正常数 C 成立。该常数可以是绝对常数，也可以依赖于某些参数 (此时对参数的依赖可用下标表示)。另外，用 $f \asymp g$ 表示 $f \ll g$ 和 $g \ll f$ 同时成立。读者须注意到本书中这些记号对复值也适用。

有限集 $\mathcal{A}$ 的基数记作 $\mathrm{card}\mathcal{A}$ 或 $|\mathcal{A}|$。

下列是书中一些符号出现的页码。

$b_r(x)$	5	$\boldsymbol{\delta}\mathcal{A}$	378	σ_a, σ_c	175
B_r, $B_r(x)$	6	$\delta(n)$	29	$\sigma_k(n)$	28
$\mathrm{e}(x)$	68	$\zeta(\sigma)$	18	$\tau(n)$	28
$\mathbf{d}\mathcal{A}$	377	$\zeta(s,y)$	461	$\tau(n,\vartheta)$	217
$j(n)$	31	$\lambda(n)$	60	$\varphi(n)$	28
$k(n)$	60	$\Lambda(n)$	28	$\Phi(x,y)$	65
$N(T)$	220	$\mu(n)$	28	$\chi(n)$	330
$N(x,y)$	181	ν_N	377	$\chi_0(n)$	331
$p_j(n)$	417	$\xi(s)$	220	$\psi(x)$	34
a.e.	381	$\pi(x)$	11	$\psi(x;a,q)$	337
$S(\mathcal{A},\mathcal{P},y)$	64, 85	$\pi(x;a,q)$	78	$\Psi(x,y)$	461
$v_p(n)$	15	$\varrho(u)$	468	$\omega(n)$, $\Omega(n)$	28
$\mathbf{1}(n)$	31	$\Omega_\pm$	103		

目录

第一部分　初 等 方 法

第二部分　解析方法

第三部分　概 率 方 法

第一部分
初等方法

第零章　实分析的一些技巧

§0.1　Abel 求和法

经典的 Abel 求和法, 即 Abel 变换, 是指将有限个两项乘积之和转换成含有其中一项部分和的乘积之和的过程.

定理 0.1 (Abel 变换)　设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是两个复数列. 对任意 $N \in \mathbb{Z}$, $M \in \mathbb{N}^*$, 有

$$\sum_{N<n\leqslant N+M} a_n b_n = A_{N+M} b_{N+M+1} + \sum_{N<n\leqslant N+M} A_n (b_n - b_{n+1}), \tag{0.1}$$

其中 $A_n := \sum_{N<m\leqslant n} a_m$ $(n \geqslant 0)$. 特别地, 若

$$\sup_{N<n\leqslant N+M} |A_n| \leqslant A,$$

$\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 非负且单调下降, 那么

$$\left| \sum_{N<n\leqslant N+M} a_n b_n \right| \leqslant A b_{N+1}. \tag{0.2}$$

证明　利用 $a_n = A_n - A_{n-1}$ $(N < n \leqslant N + M)$ 并作指标变换便得到第一个结论. 倘若 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 非负且单调下降, 由 (0.1) 得

$$\left| \sum_{N<n\leqslant N+M} a_n b_n \right| \leqslant A b_{N+M+1} + A \sum_{N<n\leqslant N+M} (b_n - b_{n+1}) = A b_{N+1}. \qquad \square$$

推论 0.2 (Abel 判别法) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是复数列且 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是非负且单调下降的实数列. 若

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0, \qquad \sup_{N\geqslant 0}\left|\sum_{0\leqslant n\leqslant N} a_n\right| \leqslant A,$$

那么级数 $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ 收敛, 且

$$\left|\sum_{n>N} a_n b_n\right| \leqslant 2Ab_{N+1}. \tag{0.3}$$

证明 由定理 0.1 立得. □

例 级数 $\sum_{n\geqslant 1} z^n/n$ 的收敛半径为 1. 除 $z=1$ 外, 它在单位圆上收敛.

在 Stieltjes 积分论中, Abel 求和法是分部积分公式的简单推论, 它是处理数论和的简单而有效的工具. 读者可在 Widder 著作 (1946) 的第一章找到有关 Stieltjes 积分的大部分概念.

定理 0.3 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是复数列. 令

$$A(t) := \sum_{n\leqslant t} a_n \qquad (t>0),$$

那么对任意函数 $b\in C^1([1,x])$ 有

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明 由分部积分公式, 要求的量为

$$\int_{1-}^{x} b(t)\,\mathrm{d}A(t) = \Big[A(t)b(t)\Big]_{1-}^{x} - \int_1^x b'(t)A(t)\,\mathrm{d}t,$$

由此即得命题结论. □

用同样的方法容易得到其他一些经典结果. 先看两个重要的例子.

定理 0.4 (求和与积分的比较) 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的单调实值函数, 其中 $a,b\in\mathbb{Z}$. 那么存在实数 $\vartheta=\vartheta(a,b)$, $0\leqslant\vartheta\leqslant 1$, 使得

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \vartheta(f(b)-f(a)).$$

证明 不失一般性, 可设 f 在 $\mathbb{Z}$ 上连续. 引进 f 对测度 $\mathrm{d}\lfloor t\rfloor$ 的 Stieltjes 积分, 得

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\lfloor t\rfloor - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\langle t\rangle.$$

由分部积分公式, 这又等于

$$\Big[-f(t)\langle t\rangle\Big]_a^b+\int_a^b\langle t\rangle\,\mathrm{d}f(t)=\int_a^b\langle t\rangle\,\mathrm{d}f(t).$$

不妨设 f 单调上升, 这样 $\mathrm{d}f$ 是正测度. 从而存在 ϑ, $0\leqslant\vartheta\leqslant 1$, 使得上式右边的积分等于 $\vartheta(f(b)-f(a))$. 定理由此得证. □

推论 0.5 对 $n\geqslant 1$, 有 $\ln n!=n\ln n-n+1+\vartheta\ln n$, 其中 $\vartheta=\vartheta_n\in[0,1]$.

定理 0.6 (第二中值公式) 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的单调函数, g 是其上的可积函数. 那么存在实数 ξ, $a\leqslant\xi\leqslant b$, 使得

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=f(a)\int_a^\xi g(t)\,\mathrm{d}t+f(b)\int_\xi^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明 令 $G(t)=\int_a^t g(v)\,\mathrm{d}v$. 由分部积分公式, 上式左边等于

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}G(t)=G(b)f(b)-\int_a^b G(t)\,\mathrm{d}f(t).$$

不妨设 f 单调上升, 这样 $\mathrm{d}f(t)$ 是正 Stieltjes 测度. 由于 $G(t)$ 连续, 存在 $\xi\in[a,b]$, 使上式最后一个积分等于 $G(\xi)\{f(b)-f(a)\}$. 合并同类项后即得要证的结论. □

§0.2 Euler-Maclaurin 求和公式

考虑 $[0,1]$ 上满足以下条件的多项式序列 $\{b_r(x)\}_{r=0}^\infty$

$$b_0(x)\equiv 1, \tag{0.4}$$

$$b_r'(x)\equiv rb_{r-1}(x)\quad(r\geqslant 1), \tag{0.5}$$

$$\int_0^1 b_r(x)\,\mathrm{d}x=0\quad(r\geqslant 1). \tag{0.6}$$

容易证明, 上述条件蕴涵

$$\sum_{r=0}^\infty b_r(x)\frac{y^r}{r!}=\frac{y\mathrm{e}^{xy}}{\mathrm{e}^y-1},$$

由此可计算 b_r 的表达式. 有

$$b_0(x)=1,\qquad b_3(x)=x^3-\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{1}{2}x,$$

$$b_1(x)=x-\tfrac{1}{2},\qquad b_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\tfrac{1}{30},$$

$$b_2(x)=x^2-x+\tfrac{1}{6},\qquad b_5(x)=x^5-\tfrac{5}{2}x^4+\tfrac{5}{3}x^3-\tfrac{1}{6}x.$$

定义第 r 个 Bernoulli 函数 $B_r(x)$ 为在 $[0,1[$ 上等于 b_r 且以 1 为周期的周期函数. 记

$$B_r := B_r(0),$$

并称之为第 r 个 Bernoulli 数. 不难验证, 对任意 $r \geqslant 1$, 有 $B_{2r+1} = 0$. 下表给出了一些 Bernoulli 数的值.

r	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16
B_r	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2\,730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3\,617}{510}$

令 f 为区间 $[a,b]$ 上的 $\mathcal{C}^{k+1}$ 函数, 其中 $a,b \in \mathbb{Z}$. 由于 $B_1(x) = \langle x \rangle - \frac{1}{2}$, 有

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\lfloor t \rfloor = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}B_1(t).$$

由分部积分公式, 上式最后一个积分化为:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}B_1(t) &= B_1 \cdot (f(b) - f(a)) - \int_a^b B_1(t) f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= B_1 \cdot (f(b) - f(a)) - \frac{1}{2!}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}B_2(t).\end{aligned}$$

容易验证 $B_2(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 在 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ 上可微, 且在其上满足方程 $B_2'(t) = 2B_1(t)$. 另外, 对任意 $r \geqslant 3$, $B_r(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微, 并满足

$$B_r'(t) = rB_{r-1}(t).$$

这样, 通过 $B_3(t)$ 可将前式中关于 $B_2(t)$ 的积分转化成新的部分和. 重复该过程便得到如下著名的定理.

定理 0.7 (Euler-Maclaurin 求和公式) 对任意整数 $k \geqslant 0$ 及任意 $[a,b]$ 上的 $\mathcal{C}^{k+1}$ 函数 f $(a, b \in \mathbb{Z})$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &+ \sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^{r+1} B_{r+1}}{(r+1)!}\left(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a)\right) \\ &+ \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b B_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

作为应用, 给出调和级数部分和的一个估计.

定理 0.8 对 $n \geqslant 1$, 有

$$\sum_{m\leqslant n} \frac{1}{m} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\vartheta}{60n^4},$$

其中 γ 是 Euler 常数, $\vartheta=\vartheta_n\in[0,1]$.

证明　对 $f(t)=1/t$, $a=1$, $b=n$ 及 $k=3$ 应用定理 0.7, 得

$$\sum_{2\leqslant m\leqslant n}\frac{1}{m}=\ln n+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}-1\Big)-\frac{1}{12}\Big(\frac{1}{n^2}-1\Big)+\frac{1}{120}\Big(\frac{1}{n^4}-1\Big)-\int_1^n t^{-5}B_4(t)\,\mathrm{d}t.$$

加上对应于 $m=1$ 的项并令 n 趋于无穷, 得

$$\gamma=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{12}-\tfrac{1}{120}-\int_1^{\infty}t^{-5}B_4(t)\,\mathrm{d}t.$$

由于对任意 t, $|B_4(t)|\leqslant\frac{1}{30}$, 下述估计成立

$$\Big|\int_n^{\infty}t^{-5}B_4(t)\,\mathrm{d}t\Big|\leqslant\frac{1}{120n^4},$$

从中便得欲证的结论.　□

注　由上述计算的简单推广可得

$$\gamma=\tfrac{1}{2}+\sum_{r=2}^{k}\frac{B_r}{r}-\int_1^{\infty}\frac{B_k(t)}{t^{k+1}}\,\mathrm{d}t\qquad(k\geqslant 1).$$

利用这个式子可近似计算 γ: 只须从 $\sum_{m=1}^{n}1/m$ 的展式中减去该表达式, 再优化 k (作为 n 的函数) 即可, 有 $\gamma\approx 0.577\,215\,664$.

习题

1. 对 $k\in\mathbb{Z}^+$ 计算 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\oint_{|z|=\pi(2k+1)}\frac{z\mathrm{e}^{xz}}{(\mathrm{e}^z-1)}\frac{\mathrm{d}z}{z^{2r+1}}$, 进而证明偶数项 Bernoulli 函数的 Fourier 展式具有如下形式:

$$B_{2r}(x)=(-1)^{r-1}2(2r)!(2\pi)^{-2r}\sum_{m\geqslant 1}\frac{\cos(2\pi mx)}{m^{2r}}\qquad(r\geqslant 1),$$

并从中得到 $\zeta(2r)$ 的一般公式.

2. 用上题的方法证明 $B_{2r+1}(x)$ 的 Fourier 展式具有如下形式:

$$B_{2r+1}(x)=(-1)^{r-1}(2r+1)!2(2\pi)^{-2r-1}\sum_{m\geqslant 1}\frac{\sin(2\pi mx)}{m^{2r+1}}\qquad(r\geqslant 0).$$

当 $r=0$ 时等式仅在 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ 上成立. 为什么不能从中得到 $\zeta(2r+1)$ 的公式?

3. Stirling 公式.

(a) 对 $f(t) = \ln t$ 用 0 阶 Euler-Maclaurin 求和公式, 证明

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{An}\{1 + O(1/n)\} \qquad (n \geqslant 1),$$

其中 $\ln A = 2 + 2\int_1^\infty B_1(t) t^{-1}\,dt$.

(b) 用分部积分公式证明 Wallis 积分

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,dt$$

满足递推式

$$nW_n = (n-1)W_{n-2} \qquad (n \geqslant 2).$$

并推出当 $n \to \infty$ 时 $W_{2n} \sim \pi/\sqrt{2An}$ 且 $W_{2n+1} \sim \sqrt{A/8n}$.

(c) 证明 $W_n \sim W_{n+1}$ $(n \to \infty)$ 且 $A = 2\pi$.

4. 设 $k \in \mathbb{N}$ 且 $f \in \mathcal{C}^{2k+1}([1, \infty[, \mathbb{R})$ 使得 $f^{(2k+1)} \in L^1([1, \infty[)$. 证明存在常数 $C_k(f)$ 使得对任意整数 $n \geqslant 1$ 有

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} f(m) = \int_1^n f(x)\,dx + \tfrac{1}{2} f(n) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \frac{B_{2j}}{(2j)!} f^{(2j-1)}(n) + C_k(f) + R_{k,n}(f), \tag{0.7}$$

其中当 $n \to \infty$ 时 $R_{k,n}(f) \to 0$. 确定 $C_k(f)$ 的值.

假设当 $j \geqslant m$ 时 $f^{(2j+1)} \in L^1(\mathbb{R})$. 利用上述结论, 证明当 $k \geqslant m$ 时, $C_k(f)$ 的值与 k 无关.

5. $B_r(x)$ 的变化. 对 $m \geqslant 1$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$ 及 $x \in \mathbb{R}$ 令

$$\varphi_{2m+\varepsilon}(x) := (-1)^m \{B_{2m+\varepsilon}(x) - B_{2m+\varepsilon}\}.$$

(a) 证明对于 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 有 $\varphi_2(x) = x(1-x)$, $\varphi_3(x) = x\left(x - \frac{1}{2}\right)(1-x)$.

(b) 计算 $\sum_{r \geqslant 0} b_r\left(\frac{1}{2}\right) y^r / r!$, 并推导 $\varphi_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 对 $m \geqslant 1$ 成立.

(c) 证明当 $m \geqslant 1$ 时, 有 $\varphi'_{2m+1}(x) = (2m+1)\{\varphi_{2m}(x) - |B_{2m}|\}$ 及 $\varphi'_{2m+2}(x) = -(2m+2)\varphi_{2m+1}(x)$.

(d) 用归纳法证明当 $m \geqslant 1$ 时 $\varphi_{2m}(x) > 0$ 对于 $0 < x < 1$ 成立; 且 $\left(x - \frac{1}{2}\right)\varphi_{2m+1}(x) > 0$ 对于 $0 < x < 1$, $x \neq \frac{1}{2}$ 成立.

6. 余项的上界估计. 设 $k \in \mathbb{N}$ 且 $f \in \mathcal{C}^{2k+2}([1, \infty[, \mathbb{R})$ 使得 $f^{(2k+2)} \in L^1([1, \infty[)$. 令

$$S_{h,n}(f) := \tfrac{1}{2} f(n) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant h} \frac{B_{2j}}{(2j)!} f^{(2j-1)}(n) \qquad (0 \leqslant h \leqslant k+1,\ n \in \mathbb{N}^*).$$

(a) 证明对任意整数 $n \geqslant 1$ 有

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} f(m) = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + S_{k,n}(f) + C_k^*(f) + R_{k,n}^*(f), \tag{0.8}$$

其中 $C_k^*(f)$ 是一个常数, 且 $R_{k,n}^*(f)$ 可用习题 5 中的函数 φ_r 表示为

$$R_{k,n}^*(f) := \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} \int_n^\infty f^{(2k+2)}(x)\varphi_{2k+2}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{0.9}$$

确定 $C_k^*(f)$ 的值.

(b) 附加以下假设

$$\lim_{x \to \infty} f^{(2k-1)}(x) = 0$$

且 $f^{(2k)}(x) \in L^1([1,\infty[)$. 证明

$$C_{k-1}^*(f) = C_k^*(f), \qquad R_{k-1,n}^*(f) - R_{k,n}^*(f) = \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n).$$

(c) 证明若 $f^{(2k+2)}$ 和 $f^{(2k)}$ 在 $[1,\infty[$ 上不变号且同号, 那么 $R_{k-1,n}^*(f)$ 和 $R_{k,n}^*(f)$ 异号. 进而得出

$$|R_{k,n}^*(f)| \leqslant \left| \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) \right|,$$

亦即, Euler-Maclaurin 公式 (0.8) 余项的绝对值不超过主项末项的绝对值.

7. 证明对所有整数 $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, 有

$$\gamma = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \frac{1}{m} - \ln n - \frac{1}{2n} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \frac{B_{2j}}{2jn^{2j}} + \varepsilon_{kn},$$

其中 γ 是 Euler 常数且 $|\varepsilon_{kn}| \leqslant B_{2k}/\{2kn^{2k}\}$. 证明取 $n = 50$ 及 $k = 7$ 可计算 γ 精确到小数点后 24 位.

注 最小余项和式. 已知 $|B_{2j}| \sim 2(2j)!/(2\pi)^{2j}$. 当 n 固定, 对 j 的和式中相邻两项之比接近于 $(j/\pi n)^2$, 从而当 k 接近于 πn 时, 该方法的余项最小. 此时 ε_{kn} 的阶为 $\mathrm{e}^{-2\pi n}$. 当 $n = 10$ 时, 若知道 $k \leqslant 32$ 时 B_{2k} 的值, 便可计算 γ 精确到小数点后 27 位.

8. 证明对任意整数 $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ 有

$$\frac{1}{6}\pi^2 = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \frac{B_{2j}}{n^{2j+1}} + \varepsilon_{kn},$$

其中 $|\varepsilon_{kn}| \leqslant |B_{2k}|/n^{2k+1}$. 证明选取 $k = 8$ 及 $n = 100$ 可计算 $\pi^2/6$ 精确到小数点后 33 位.

9. 在区间 $[1, N]$ 上对函数

$$f(x) := \ln\left(\frac{x\vartheta}{1-\mathrm{e}^{-x\vartheta}}\right)$$

应用 Euler-Maclaurin 公式并令 N 趋于无穷, 证明对任意固定的整数 $k \geqslant 2$, 当 ϑ 从右边趋于零时, 有

$$\prod_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-n\vartheta}}\right) = \{1+O(\vartheta^k)\}\mathrm{e}^{\pi^2/6\vartheta-\vartheta/24}\sqrt{\frac{\vartheta}{2\pi}}.$$

第一章　素数

§1.1　概述

加法和乘法给予自然数集 $\{1, 2, 3, \ldots\}$ 一种双重交换半群结构. 前者从属于自然数集上的全序关系, 由一个元素 1 生成, 而后者则反映整除偏序关系, 具有无穷多个生成元 —— 素数. 尽管这个关键概念在古时候已有定义, 但人们至今还远未窥得它所有的奥秘. 下面的结论充分说明了素数论在算术中的中心地位. 习题 10~13 中将简要地介绍如何运用 Euclide 第一定理来证明它.

定理 1.1 (算术基本定理)　*所有大于 1 的自然数可分解成素数的乘积, 且分解在不计因子顺序的意义下唯一.*

Euclide 第二定理断言素数集是无限的. 这是算术基本定理的简单推论: 若 $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots, p_n$ 是最小的 n 个素数, 那么整数

$$N = 1 + \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} p_j$$

不能被 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 中的任一素数整除, 它的最小素因子大于 p_n.

习惯上用 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数的个数. 这样对任意正整数 n 有 $\pi(p_n) = n$. Euclide 第二定理可写成

$$\pi(x) \to \infty \qquad (x \to \infty).$$

2300 多年以来, 数学家们致力于量化这个定性关系. 本书的一个目的, 就是阐述他们为达到这个目的而创造并使用的各种各样的方法.

上述 Euclide 第二定理的证明过于简单而非实效. 事实上, 有

$$p_{n+1} \leqslant 1 + \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} p_j,$$

从而由归纳法立得

$$p_n \leqslant 2^{2^n} \qquad (n \geqslant 1).$$

这样便得到下界估计如下.

定理 1.2

$$\pi(x) > \frac{\ln_2 x}{\ln 2} - \frac{1}{2} \qquad (x \geqslant 2).$$

证明 由上述 p_n 的上界估计知

$$\pi(x) \geqslant \max\{m \in \mathbb{N} : 2^{2^m} \leqslant x\} = \left\lfloor \frac{\ln(\ln x/\ln 2)}{\ln 2} \right\rfloor \geqslant \frac{\ln_2 x}{\ln 2} - \left(1 + \frac{\ln_2 2}{\ln 2}\right),$$

这便推出命题结论. □

定理 1.2 中的下界估计远非最佳. 在长达一个多世纪的时间里, 人们 (特别是 Legendre 和 Gauss) 猜想有渐近公式

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \qquad (x \to \infty),$$

直到 1896 年, Hadamard (1865—1963) 和 La Vallée-Poussin (1866—1962) 才分别独立地解决了此猜想. 他们的方法用到了复分析的技巧, 将在本书第二部分介绍. 迟至 1949 年 Erdős 和 Selberg 才给出了素数定理的第一个初等证明, 此后许多其他初等证明陆续见诸于文献, 其中 Daboussi (1984) 的证明尤为优雅, 其原理也与众不同①. 在 Tenenbaum 和 Mendès France (2000) 第四章有详述.

§1.2 Tchébychev 估计

关于 $\pi(x)$ 的第一个重大突破应归功于数学家 Tchébychev. 他于 1852 年证明了以下估计的一个实效形式

$$\{c_1 + o(1)\}\frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant \{c_2 + o(1)\}\frac{x}{\ln x} \quad (x \to \infty),$$

其中 $c_1 = \ln(2^{1/2}3^{1/3}5^{1/5}30^{-1/30}) \approx 0.921\,29$, $c_2 = \frac{6}{5}c_1 \approx 1.105\,55$, 进而证明了 Bertrand 公设: 每个区间 $]n, 2n]$ $(n \geqslant 1)$ 均至少含有一个素数.

将用一个简单的方法证明下述结论, 它推出 Bertrand 公设一个略弱的形式: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 = n_0(\varepsilon)$, 使得任意区间 $]n, (2+\varepsilon)n]$ $(n \geqslant n_0)$ 至少含有一个素数.

① 其证明不用 Selberg 恒等式 (见第 60 页习题 75), 而这恰是绝大多数初等证明的关键之处.

定理 1.3 对 $n \geqslant 4$, 有

$$(\ln 2)\frac{n}{\ln n} \leqslant \pi(n) \leqslant \left\{\ln 4 + \frac{8\ln_2 n}{\ln n}\right\}\frac{n}{\ln n}.$$

证明 上界估计由以下经典结果可得. □

定理 1.4 对 $n \geqslant 1$, 有

$$\prod_{p\leqslant n} p \leqslant 4^n.$$

若暂时承认该结论, 则对任意 t, $1 < t \leqslant n$, 有

$$t^{\pi(n)-\pi(t)} \leqslant \prod_{t<p\leqslant n} p \leqslant 4^n,$$

取对数后得

$$\pi(n) \leqslant \frac{n\ln 4}{\ln t} + t,$$

选取 $t = n/(\ln n)^2$ 即得命题结论, 具体数值计算留给读者.

定理 1.4 的证明 对 n 归纳. 不妨设 $n \geqslant 3$. 若 n 为偶数, 则不能是素数, 故

$$\prod_{p\leqslant n} p = \prod_{p\leqslant n-1} p \leqslant 4^{n-1} < 4^n.$$

若 n 是奇数, 设 $n = 2m+1$. 我们的推理基于全体 n 阶二项式系数. 由 $\binom{2m+1}{m} = (2m+1)!/m!(m+1)!$ 知

$$\left(\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p\right)\Bigg|\binom{2m+1}{m} \leqslant \tfrac{1}{2}2^{2m+1} = 4^m,$$

其中不等号之所以成立, 是因为在 $(1+1)^{2m+1}$ 的二项式展开中, $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$ 出现了两次. 对 $m+1 < n$ 用归纳假设, 得

$$\prod_{p\leqslant n} p = \prod_{p\leqslant m+1} p \prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant 4^{m+1}4^m = 4^n,$$

定理得证. □

定理 1.3 的下界估计将由 Nair (1982a, b) 的一个极简单而有效的方法得出. 它基于不等式

$$\pi(n) \geqslant (\ln d_n)/\ln n \qquad (n \geqslant 2),$$

其中 d_n 表示 $1, 2, \ldots, n$ 的最小公倍数. 事实上, 若 $p^\nu \| d_n$, 那么存在 $m \leqslant n$ 使得 $p^\nu \mid m$. 所以 $p^\nu \leqslant n$, 且

$$d_n = \prod_{p\leqslant n,\, p^\nu \| d_n} p^\nu \leqslant \prod_{p\leqslant n} n = n^{\pi(n)},$$

这等价于上述不等式. 欲证的结论于是由下述定理可得.

定理 1.5 (Nair) 对于 $n \geqslant 7$, 有 $d_n \geqslant 2^n$.

证明 Nair 的主要思想是考虑积分

$$I(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-m}\,\mathrm{d}x \qquad (1 \leqslant m \leqslant n).$$

一方面, $(1-x)^{n-m}$ 的二项展开式说明了 $I(m,n)$ 是一个分母整除 d_n 的有理数:

$$I(m,n) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n-m} (-1)^j \binom{n-m}{j} \frac{1}{m+j} \in \frac{1}{d_n}\mathbb{Z}.$$

另一方面, $I(m,n)$ "很小", 甚至容易计算它的值. 注意到对任意 y, $0 \leqslant y \leqslant 1$, 有

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \binom{n-1}{m-1} y^{m-1} I(m,n) = \int_0^1 (1-x+xy)^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} y^{m-1},$$

从而

$$I(m,n) = 1/n\binom{n-1}{m-1} = 1/m\binom{n}{m} \qquad (1 \leqslant m \leqslant n).$$

这说明对 $1 \leqslant m \leqslant n$ 有 $m\binom{n}{m} \mid d_n$, 这样

$$n\binom{2n}{n} \Big| d_{2n} \Big| d_{2n+1} \qquad 且 \qquad (n+1)\binom{2n+1}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n} \Big| d_{2n+1}.$$

由于 n 和 $2n+1$ 互素, 得

$$n(2n+1)\binom{2n}{n} \Big| d_{2n+1}.$$

最后, 因为 $\binom{2n}{n}$ 是 $(1+1)^{2n}$ 展开式的 $(2n+1)$ 个二项式系数中最大的一项, 所以

$$d_{2n+1} \geqslant n4^n \qquad (n \geqslant 1),$$

从而

$$d_{2n+1} \geqslant 2 \cdot 4^n = 2^{2n+1} \qquad (n \geqslant 2),$$

且

$$d_{2n+2} \geqslant d_{2n+1} \geqslant 4^{n+1} \qquad (n \geqslant 4),$$

这对于 $n \geqslant 9$ 证明了结论中的不等式 $d_n \geqslant 2^n$. 容易验证, 对于 $n = 7$ 和 $n = 8$, 不等式仍然成立: $d_7 = 420$, $d_8 = 840$. □

§1.3 $n!$ 的 p 进赋值

对于素数 p 来说, 所谓 p 进赋值, 是指把正整数 n 映为其素因子分解中 p 的幂次的数论函数, 记为 v_p. 后文中将用到下面简单的定理.

定理 1.6 对任一素数 p, 有

$$v_p(n!) = \sum_{k\geqslant 1} \lfloor n/p^k \rfloor \qquad (n \geqslant 1).$$

注 由于 $k > (\ln n)/\ln p$ 时, 和式的通项为零, 故为有限和.

证明 有

$$v_p(n!) = \sum_{m\leqslant n} v_p(m) = \sum_{m\leqslant n} \sum_{1\leqslant k\leqslant v_p(m)} 1 = \sum_{k\geqslant 1} \sum_{m\leqslant n,\, v_p(m)\geqslant k} 1.$$

最后一项内部的和式等于不大于 n 且被 p^k 整除的正整数个数, 从而等于 $\lfloor n/p^k \rfloor$. 这样便得到要证的表达式. □

推论 1.7 对任意素数 p, 有

$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leqslant \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)} \qquad (n \geqslant 1).$$

这是定理 1.6 以及对任意实数 x 成立的区间估计 $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$ 的直接推论.

§1.4 Mertens 第一定理

相对于 $\pi(x)$, 某些依赖于不超过 x 的素数的值具有较易掌握的渐近性质, 特别是下述定理中估计的表达式.

定理 1.8 (Mertens 第一定理) 对 $x \geqslant 2$, 有

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1).$$

另外, 上式中的 $O(1)$ 项取值在开区间 $]-1-\ln 4, \ln 4[$ 中.

注 $\ln 4 \approx 1.386\,29$.

证明 用两种方法对 $n = \lfloor x \rfloor$ 计算 $\ln(n!)$.

一方面, 在推论 0.5 中见到

$$\ln(n!) = n \ln n - n + 1 + \vartheta_n \ln n,$$

其中 $0 \leqslant \vartheta_n \leqslant 1$.

另一方面, 由 $n!$ 的素因子分解得

$$\ln n! = \sum_{p \leqslant n} v_p(n!) \ln p,$$

由推论 1.7 知

$$\ln n! < n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

及

$$\ln n! > n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} - \sum_{p \leqslant n} \ln p.$$

由定理 1.4, 最后一个关于 p 的和式不超过 $n \ln 4$, 所以

$$n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} - n \ln 4 < n \ln n - n + (1 + \ln n) < n \ln n.$$

从而

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} \leqslant \ln n + \ln 4 < \ln x + \ln 4.$$

另外,

$$\begin{aligned}
\sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p(p-1)} &< \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} \\
&\leqslant \sum_{r \geqslant 1} \sum_{2^{r-1} < m \leqslant 2^r} \frac{r \ln 2}{m(m-1)} = \sum_{r \geqslant 1} \frac{r \ln 2}{2^r} = \ln 4,
\end{aligned}$$

由此得出

$$n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} + n \ln 4 > n \ln n - n + 1,$$

最后得到

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} > \ln n + \frac{1}{n} - (1 + \ln 4) \geqslant \ln x - (1 + \ln 4),$$

定理得证. □

§1.5 两个新的渐近公式

从概念上讲, Mertens 第一定理异于 Tchébychev 估计. 它给出素数集上一种加权和的等价形式. 从某种意义上说, 它是以素数定理 (对应于权重为常数 1 的情形) 为核心的一系列结果的原型.

以下将看到定理 1.8 蕴涵同类型的其他一些结果. 特别地, 它可以导出表达式

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \quad 和 \quad \prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

的估计. 首先说明这两个量之间的密切联系.

定理 1.9 令 $c_0 := \sum_p \left\{ \ln\left(\frac{1}{1-1/p}\right) - \frac{1}{p} \right\} \approx 0.315\,718$. 这样, 对 $x \geqslant 2$ 有

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln\left\{1 \Big/ \prod_{p \leqslant x}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right\} - c_0 + \frac{\vartheta}{2(x-1)},$$

其中 $\vartheta = \vartheta(x) \in]0, 1[$.

证明 利用 c_0 的表达式得到题设公式, 其中

$$\begin{aligned} 0 < \vartheta(x) &= 2(x-1) \sum_{p > x} \left\{ \ln\left(\frac{1}{1-1/p}\right) - \frac{1}{p} \right\} \\ &= 2(x-1) \sum_{p > x} \sum_{k \geqslant 2} \frac{1}{k} p^{-k} < \sum_{p > x} \frac{2(x-1)}{2p(p-1)} < \sum_{n > x} \frac{x-1}{n(n-1)} = \frac{x-1}{N-1}, \end{aligned}$$

N 是大于 x 的最小整数. 于是证明了要求的估计. □

定理 1.10 存在常数 c_1, 使得对 $x \geqslant 2$ 有

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln_2 x + c_1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

另外, 可选 Landau 记号中的常数为不大于 $2(1 + \ln 4)(< 5)$ 的数.

注 用后面的定理 1.12 容易得出 c_1 的数值逼近, 有

$$c_1 = \gamma - c_0 \approx 0.261\,497.$$

证明 由 Mertens 第一定理, 对 $t \geqslant 2$ 有

$$R(t) := \sum_{p \leqslant t} \frac{\ln p}{p} - \ln t = O(1).$$

另外,

$$\begin{aligned} \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} &= \int_{2-}^{x} \frac{1}{\ln t} \mathrm{d}\left\{ \sum_{p \leqslant t} \frac{\ln p}{p} \right\} = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} + \int_{2-}^{x} \frac{\mathrm{d}R(t)}{\ln t} \\ &= \ln_2 x - \ln_2 2 + \frac{R(x)}{\ln x} - \frac{R(2-)}{\ln 2} + \int_2^x \frac{R(x)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

其中对含有 $R(t)$ 的积分用了 Abel 求和法.

令 $R := \sup_{t\geqslant 2-} |R(t)|$. 由定理 1.8 的上界估计知

$$\left|\frac{R(x)}{\ln x} - \int_x^{\infty} \frac{R(t)}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2R}{\ln x} < \frac{2(1+\ln 4)}{\ln x}.$$

取

$$c_1 = -\ln_2 2 + 1 + \int_2^{\infty} \frac{R(t)}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t,$$

即得欲证的公式. □

定理 1.11 分别令 c_0 和 c_1 为定理 1.9 和定理 1.10 中定义的常数. 对 $x \geqslant 2$ 有

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-(c_0+c_1)}}{\ln x}\left\{1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right\}.$$

这是定理 1.9 和定理 1.10 的直接推论.

§1.6 Mertens 公式

Mertens 第二定理, 以 "Mertens 公式" 著称, 具体地算出了定理 1.11 中出现的常数.

定理 1.12 (Mertens 公式) 沿用 §1.5 的记号, 有 $c_0 + c_1 = \gamma$, 其中 γ 是 Euler 常数. 从而

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\ln x}\left\{1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right\} \qquad (x \geqslant 2).$$

证明 对 $\sigma > 1$, 令

$$\zeta(\sigma) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\sigma}}.$$

由求和与积分的比较容易得到

$$\zeta(1+\sigma) = \frac{1}{\sigma} + O(1) \qquad (\sigma > 0).$$

另外,

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n^{1+\sigma}} \leqslant \prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p^{1+\sigma}}\right)^{-1} \leqslant \zeta(1+\sigma).$$

这是因为上式中对 p 的乘积等于和式 $\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n/n^{1+\sigma}$, 其中若 n 的所有素因子都不大于 x, $\varepsilon_n = 1$; 否则 $\varepsilon_n = 0$. 令 x 趋于无穷, 即得著名的 Euler 公式

$$\zeta(1+\sigma) = \prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{1+\sigma}}\right)^{-1}.$$

现在考虑函数

$$f(\sigma)=\ln\zeta(1+\sigma)-\sum_{p}\frac{1}{p^{1+\sigma}}=\sum_{p}\Big\{\ln\Big(\frac{1}{1-p^{-1-\sigma}}\Big)-\frac{1}{p^{1+\sigma}}\Big\}.$$

由于和式的通项为正且不大于 $1/p(p-1)$, 级数 $f(\sigma)$ 在 $\sigma\geqslant 0$ 时一致收敛. 特别地, 级数的和在 0 点连续, 亦即

$$\lim_{\sigma\to 0}f(\sigma)=f(0)=c_0.$$

以下将 $f(\sigma)$ 的两项分别变形. 一方面,

$$\begin{aligned}\ln\zeta(1+\sigma)&=\ln\{1/\sigma+O(1)\}=\ln(1/\sigma)+O(\sigma)=\ln\Big(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\sigma}}\Big)+O(\sigma)\\&=\sum_{n\geqslant 1}\mathrm{e}^{-\sigma n}n^{-1}+O(\sigma)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}H(t)+O(\sigma),\end{aligned}$$

其中

$$H(t):=\sum_{1\leqslant n\leqslant t}\frac{1}{n}.$$

于是由 Stieltjes 积分的分部积分公式知

$$\ln\zeta(1+\sigma)=\sigma\int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}H(t)\,\mathrm{d}t+O(\sigma).$$

另一方面, 记 $P(u):=\sum_{p\leqslant u}1/p$, 则

$$\sum_{p}\frac{1}{p^{1+\sigma}}=\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}P(u)}{u^{\sigma}}=\sigma\int_1^{\infty}\frac{P(u)}{u^{1+\sigma}}\,\mathrm{d}u=\sigma\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}P(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t.$$

这样便得

$$f(\sigma)=\sigma\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}(H(t)-P(\mathrm{e}^t))\,\mathrm{d}t+O(\sigma).$$

而由定理 0.8 可知

$$H(t)=\ln t+\gamma+O(1/t)\qquad(t\geqslant 1),$$

又由定理 1.10 知

$$P(\mathrm{e}^t)=\ln t+c_1+O(1/t)\qquad(t\geqslant 1),$$

从而对 $0<\sigma\leqslant\frac{1}{2}$ 有

$$\begin{aligned}f(\sigma)&=\sigma\int_0^{\infty}\Big\{\gamma-c_1+O\Big(\frac{1}{t+1}\Big)\Big\}\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}t+O(\sigma)\\&=\gamma-c_1+O\Big(\sigma+\sigma\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}\frac{\mathrm{d}t}{t+1}\Big)=\gamma-c_1+O\big(\sigma\ln(1/\sigma)\big).\end{aligned}$$

最后得到 $c_0=f(0)=\gamma-c_1$, 定理得证. □

§1.7 Tchébychev 的另一定理

Tchébychev 证明了, 若 $\pi(x) \sim cx/\ln x$, 那么常数 c 必然等于 1.

定理 1.13

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} \leqslant 1 \leqslant \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}.$$

证明 两个不等式证明的方法类似, 只证左边的不等式. 令

$$\ell := \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}.$$

对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_0 = x_0(\varepsilon) \geqslant 2$, 使得

$$\pi(t) \geqslant (\ell - \varepsilon)\frac{t}{\ln t} \qquad (t \geqslant x_0(\varepsilon)).$$

这说明了对 $x > x_0$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} &\geqslant \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\pi(t)}{t} = \frac{\pi(x)}{x} - \frac{\pi(x_0)}{x_0} + \int_{x_0}^{x} \pi(t)t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant -1 + (\ell - \varepsilon)\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \geqslant (\ell - \varepsilon)\ln_2 x + O_\varepsilon(1).\end{aligned}$$

由定理 1.10 知 $\ell - \varepsilon \leqslant 1$. 而 ε 可以任意小, 所以 $\ell \leqslant 1$. □

注记

§1.2 Erdős 和 Kalmár 于 1939 年分别独立地得到了本书中定理 1.4 的证明. 素数定理推出对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\prod_{p\leqslant n} p \leqslant \mathrm{e}^{(1+\varepsilon)n} \qquad (n \geqslant n_0(\varepsilon)).$$

然而有必要得到像定理 1.4 那样一致的 (即不含对 n 的限制的) 上界. 在该方向上 Hanson 于 1972 年证明了

$$\prod_{p\leqslant n} p \leqslant 3^n \qquad (n \geqslant 2).$$

对于 $\pi(x)$ 以及 Tchébychev 函数 (参见 §3.6) 的数值区间估计可参考 Rosser 和 Schoenfeld (1962, 1975) 以及 Schoenfeld (1976). 例如有

$$\frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{2\ln x}\right) < \pi(x) < \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{3}{2\ln x}\right) \qquad (x \geqslant 52).$$

Nair (1982a) 发展的用来证明定理 1.5 的思想并不新颖：参见 Gelfond (1946). Gorshkov (1956) 证明了对一元多项式使用该方法不能得到素数定理. 他还给出了这种方法能得到的最好结果的数值估计. Aparicio Bernardo (1981) 具体化了这些估计. Nair (1982b) 给出的推广则是全新的思想, 由之可得到非常精确的区间估计. 原则上讲, 它应该可以推出素数定理.

对 $\pi(x)$ 的传统 "Tchébychev 型" 区间估计的证明, 可参见习题 16~20.

习题

10. 用归纳法证明任何大于 1 的整数可写成素数的乘积.

11. (a) 设 I 是 $\mathbb{Z}$ 的一个理想 (即 $\mathbb{Z}$ 的在乘以 $\mathbb{Z}$ 的任一元素下保持稳定的加法子群). 证明 $I = k\mathbb{Z}$, 其中 k 是 I 中的最小正元素.

(b) 设 $m, n \in \mathbb{Z}$. 证明 $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的理想.

(c) 设 $d = (m, n)$ 是 m 和 n 的最小正公因子, 证明 Bachet (1624) *定理* (其错误叫法 "Bézout 定理" 较为有名)：$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$.

12. Euclide *第一定理*. 设 $a, b \in \mathbb{Z}$, p 是素数. 假设 $p \mid ab$ 且 $p \nmid a$. 用 Bachet 定理证明存在 $u, v \in \mathbb{Z}$ 使得 $up + va = 1$, 并推出 $p \mid b$.

13. 用 Euclide 第一定理结合归纳法证明*算术基本定理*：不计因子顺序, 大于 1 的整数的素因子分解是唯一的.

14. 设 p_n 为第 n 个素数, $d_n := p_{n+1} - p_n$. 承认素数定理的最简形式：$\pi(x) \sim x/\ln x$ $(x \to \infty)$, 证明以下命题.

(a) $p_n \sim n \ln n \qquad (n \to \infty)$.

(b) $\displaystyle\sum_{1<n\leqslant x} d_n/\ln n \sim x \qquad (x \to \infty)$.

(c) $\liminf\limits_{n\to\infty} (d_n/\ln n) \leqslant 1 \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} (d_n/\ln n)$.

(d) 对任意 $\alpha > 0$, 存在一个单调递增整数列 $\mathcal{A} = \{n_1, n_2, \ldots\}$ 使得 $p_{n_j} \sim \alpha j$ $(j \to \infty)$.

(e) 形如 p'/p (p 和 p' 均为素数) 的有理数在 $[0, +\infty[$ 中稠密.

15. 证明素数定理的强形式 $\pi(x) = x/\ln x + O(x/(\ln x)^2)$ $(x \geqslant 2)$ 可推出级数 $\sum_{p\in\mathbb{P}} 1/p^{1+i}$ 的收敛性.

16. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为非负数列. 假设

$$B(x) := \sum_{n\leqslant x} a_n \lfloor x/n \rfloor = x \ln x + Cx + o(x).$$

证明 Shapiro (1950) 的 *Tauber 型定理*：*存在两个正常数 α 和 β, 使得 $\alpha x \leqslant A(x) := \sum_{n\leqslant x} a_n \leqslant \beta x$ $(x > x_0)$.*

确定 α 和 β 的值. 讨论仅有条件 $B(x) = x \ln x + O(x)$ 时的情形. [提示：*可考虑 $A(x) - A(x/2)$, 并利用函数 $u \mapsto \lfloor u \rfloor - 2\lfloor u/2 \rfloor$ 的性质*].

17. Mangoldt 函数. 若 $n = p^\nu$, 令 $\Lambda(n) := \ln p$; 若 n 不是素数的幂则令 $\Lambda(n) := 0$. 证明

(a) $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$,

(b) $\sum_{d\leqslant x} \Lambda(d)\lfloor x/d\rfloor = x\ln x - x + O(\ln x) \qquad (x \geqslant 2)$.

18. 用前两个习题的结论证明 $\psi(x) := \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)$ 满足

$$\alpha x \leqslant \psi(x) \leqslant \beta x \qquad (x > x_0),$$

并确定两个正常数 α 和 β 的值.

19. 用习题 18 的结论证明存在两个正常数 a 和 b (并确定其值) 使得 $ax/\ln x \leqslant \pi(x) \leqslant bx/\ln x \quad (x \geqslant 2)$.②

20. Tchébychev 估计. 设 $M > 1$ 且 h 是数论函数, 使得

(i) $h(1) = 1$, $\sum_{m=1}^{M} h(m)/m = 0$,

(ii) $\chi(x) := \sum_{m=1}^{M} h(m)\lfloor x/m\rfloor \in [0,1] \quad (x \in \mathbb{R})$.

证明在习题 16 的假设下, 对足够大的 x 有

$$(H-\varepsilon)x < A(x) < \Big(\frac{a}{a-1}H + \varepsilon\Big)x,$$

其中 $H := -\sum_{m=1}^{M} h(m)\ln m/m$ 且 a 是使得在 $1 \leqslant x < a$ 时 $\chi(x) = 1$ 的最大整数. 选取怎样的 h 时, 这相当于 Shapiro 的 Tauber 型定理? 证明

$$M = 6,\ h(1) = h(6) = 1,\ h(2) = -1,\ h(3) = -2,\ h(4) = h(5) = 0$$

的组合可推出 Bertrand 公设. 用 Tchébychev 原来的构造

$$M = 30,\ h(1) = h(30) = 1,\ h(2) = h(3) = h(5) = -1,$$
$$h(m) = 0\ (m = 4 \text{ 或 } 6 \leqslant m \leqslant 29)$$

证明对 $\psi(x)$ 的 Tchébychev 估计.

21. 由 Bertrand 公设推出存在无穷多个素数, 其十进制表示首位数字为 1.

22. 证明仅由 Bertrand 公设便可推出对任意 $n > 1$, $H_n = \sum_{1\leqslant m\leqslant n} 1/m$ 不是整数. 通过考虑 2 的幂给出这一结论的另一证明.

23. 沿用习题 17 及习题 18 的记号.

(a) 证明 $\sum_{n\leqslant x} \ln n/n = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + O(1) \quad (x \geqslant 1)$.

(b) 证明

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{\psi(x)}{x} \qquad (x \geqslant 1).$$

---

② 精确的 Shapiro 的 Tauber 型定理可导出素数定理的一个初等证明, 参见 Smith (1980).

(c) 承认以下素数定理的强形式：

$$\psi(x) = x + O\big(x/(\ln 2x)^2\big) \quad (x \geqslant 1). \tag{1.1}$$

证明存在常数 A 使得

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x + A + o(1) \quad (x \to \infty). \tag{1.2}$$

(d) 利用习题 17(a) 中的等式, 证明

$$2\sum_{n \leqslant x} \frac{\ln n}{n} = (\ln x)^2 + 2(A+\gamma)\ln x + o(\ln x) \quad (x \to \infty),$$

并推出 $A = -\gamma$.

24. 证明由估计 (1.2) 可推出素数定理.

25. 证明由素数定理的强形式 (1.1) 可推出如下渐近关系：

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p-1} = \ln x - \gamma + o(1), \tag{1.3}$$

其中字母 p 表示素数.

反之, 证明 (1.3) 可推出素数定理.

26. 证明 (1.1) 形式下的素数定理可推出等式

$$\int_1^{\infty} \frac{t - \psi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1 + \gamma.$$

可利用习题 23 (a)的结论. 通过值 $\displaystyle\int_x^{x(1\pm\varepsilon)} \psi(t)\,\mathrm{d}t/t^2$, $0 < \varepsilon < 1$ 来研究其逆命题.

27. 是否任何正整数都可通过改变其十进制表示中某一位数值而成为一个素数?

28. 证明 $\lim_{x\to\infty}\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} 1/p = \ln 2$. 从中推出, 当 $x \to \infty$ 时不超过 x 的正整数中最大素因子大于其平方根的那些整数占有一个正的比例. 还能得到更精确的结论吗?

29. 用 p 和 q 表示素数. 应用 Mertens 第二定理证明存在常数 a 使得

$$\sum_{pq \leqslant x} \frac{1}{pq} = (\ln_2 x + a)^2 + o(1) + O(S),$$

其中 $S := \displaystyle\sum_{p \leqslant x/2} \frac{1}{p} \ln\left(\frac{\ln x}{\ln(x/p)}\right)$. 证明 S 作为 x 的函数有界. 通过

$$\sum_{p_1 \cdots p_k \leqslant x} \frac{1}{p_1 \cdots p_k}$$

的渐近估计 (k 固定而 $x \to \infty$) 来推广上述结论.

30. 形如 p, $8p-1$ 和 $8p+1$ 的三个自然数可否同时为素数? 可选取适当的整数 m 并研究模 m 剩余类.

31. Mersenne 素数. 证明若 2^k-1 是素数, 则 k 亦然.

32. 证明存在无穷多个形如 $4n+3$ 的素数. 可考虑 $N=4\cdot n!-1$.

33. 确定使 p^2+2 为素数的所有素数 p.

34. 证明形如 $4k+1$ 的整数的乘积仍然具有 $4k+1$ 的形式, 并推出存在无穷多个形如 $4m-1$ 的素数. 可考虑整数 $n=4p_1\cdots p_r-1$, 其中 p_j 是形如 $4m-1$ 的最小的 r 个素数.

35. 证明存在无穷多个素数形如 $6m-1$. 可考虑 $n=(p_1\cdots p_r)^2+4$, 其中 p_j 是具有该形式的最小的 r 个素数.

36. 设 $k\in\mathbb{N}^*$. 构造整数 N, 使得其后 k 个数都是合数.

37. 平方剩余类. 设 p 是奇素数. 用 Q_p 表示 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ 中平方剩余类之集, 亦即使方程 $x^2\equiv a \pmod p$ 有解的元素 a 组成的集合.

(a) 证明若 g 是 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ 的生成元, 那么 Q_p 恰是 g 的偶数次幂构成的集合, 从而得到 $|Q_p|$ 的值.

(b) 在本问题中将不用 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ 是循环群的事实来重证上述结论.

① 证明方程 $x^2\equiv a \pmod p$ 在 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ 中无解或有两个解.

② 完成命题的证明.

38. Legendre 符号. 沿用习题 37 的记号和假设. 对 $a\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 令

$$\left(\frac{a}{p}\right):=\begin{cases}1, & 若\ a\in Q_p,\\ 0, & 若\ a\equiv 0 \pmod p,\\ -1, & 若以上皆非.\end{cases}$$

(a) 证明 Q_p 是从 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ 到自身的乘法同态 $x\mapsto x^{(p-1)/2}$ 的核.

(b) 推出 $(a|p)\equiv a^{(p-1)/2} \pmod p$ 对任意 $a\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 成立.

(c) (-1) 何时是模 p 的平方剩余类?

(d) 设 $p_1,\ldots,p_k$ 是形如 $4m+1$ 的最小的 k 个素数. 考虑 $N=(p_1\cdots p_k)^2+1$ 并得出存在与它们相异但同型的素数 p_{k+1}, 从而得出存在无穷多个形如 $4m+1$ 的素数.

39. 设 p 是奇素数且 m 和 n 是整数. 将 Legendre 符号推广到整数集上: 当 $n\in\mathbb{Z}$, $n\equiv a \pmod p$ 时令 $(n|p)=(a|p)$.

(a) 计算 $S_n:=\sum_{0\leqslant j<p}(j+n|p)$.

(b) 计算 $T_{m,n}:=\sum_{0\leqslant j<p}(mj+n|p)$.

(c) 计算 $U_n:=\sum_{0\leqslant j<p}(j(j+n)|p)$. 可引进从 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ 到自身的把 j 映为其模 p 剩余类逆 $\bar{j}$ 的映射.

(d) 利用习题 38 (b) 的结论证明: 若 $(n,p)=1$ 那么 $\sum_{0\leqslant j<p}(j^2+n|p)=-1$.

40. Euler 和 Gauss. Euler 证明了 $(2|p)=(-1)^{(p^2-1)/8}$ 而 Gauss 证明了二次互反律：

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{(p-1)(q-1)/4}\quad(p>2,\ q>2,\ p\neq q).$$

以下是一些应用：

(a) 设 p 是形如 $4m+1$ 的素数. 证明 $m^m\equiv 1 \pmod p$.

(b) 对怎样的素数 p, 方程 $x^2-3\equiv 0 \pmod p$ 有解?

(c) 对怎样的素数 p, 方程 $x^2-5\equiv 0 \pmod p$ 有解?

第二章　数论函数

§2.1　定义

所谓数论函数，是指 $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\ldots\}$ 上的复值函数. 有两类数论函数尤其重要：加性函数和乘性函数. 倘若数论函数 f 满足

$$f(mn) = f(m) + f(n) \qquad (若\ (m,n)=1), \tag{2.1}$$

便说它是加性的；倘若 $f(1)=1$ 且

$$f(mn) = f(m)f(n) \qquad (若\ (m,n)=1), \tag{2.2}$$

则说它是乘性的，其中条件 $f(1)=1$ 是为方便计而在乘性函数类中排除恒零函数所采取的约定[①].

引入上述概念的主要目的在于，加性函数或乘性函数保持了 $\mathbb{N}$ 的乘法结构，即任一整数在这样的函数下的像可写成它的素因子分解中出现的素数的幂的像之和或积. 这样，对加性或乘性函数，有

$$f(n) = \sum_{p^\nu \| n} f(p^\nu) \qquad 或 \qquad f(n) = \prod_{p^\nu \| n} f(p^\nu).$$

如果(2.1) (相应地，(2.2)) 对未必互素的整数对也成立，也就是说 $f(p^\nu) = \nu f(p)$ (相应地，$f(p^\nu) = f(p)^\nu$)，则说 f 是完全加性的 (相应地，完全乘性的). 若除了条件 (2.1) (相应地，(2.2)) 外，f 还使得 $f(p^\nu) = f(p)$，$\forall \nu \geqslant 1$，则说 f 是强加性的 (相应地，强乘性的).

① 应与 §4.7 中 Selberg 的定义比较.

§2.2 例子

下列经典的数论函数定义了与乘法结构有关的一些基本概念.

- n 的素因子个数 (计算或不计重数)

$$\Omega(n) := \sum_{p^\nu \| n} \nu, \qquad \omega(n) := \sum_{p^\nu \| n} 1 = \sum_{p|n} 1.$$

- 因子个数或因子的 k 次幂和

$$\tau(n) := \sum_{d|n} 1, \qquad \sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k \qquad (k \in \mathbb{C}).$$

习惯上记 $\sigma_1(n) = \sigma(n)$.

- Euler 示性函数, 即模 n 的可逆剩余类数

$$\varphi(n) := \sum_{1 \leqslant h \leqslant n,\, (h,n)=1} 1.$$

- Möbius 函数

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^{\omega(n)}, & \text{若 } n \text{ 无平方因子}, \\ 0, & \text{若 } n \text{ 有平方因子}. \end{cases}$$

- Mangoldt 函数②

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \ln p, & \text{若 } n = p^\nu, \\ 0, & \text{若 } n \text{ 不是素数的幂}. \end{cases}$$

从定义即可看出, Ω 和 ω 是加性的, 前者是完全加性的, 而后者是强加性的. $\tau(n)$ 的情况则不那么显然. n 的因子是那些形如

$$d = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}, \qquad 0 \leqslant \alpha_p \leqslant v_p(n)$$

的数, 从而有

$$\tau(n) = \prod_{p|n} (v_p(n) + 1).$$

这样得到下述命题.

定理 2.1 因子个数函数是乘性的. 有

$$\tau(n) = \prod_{p^\nu \| n} (\nu + 1) \qquad (n \geqslant 1).$$

② 在 §2.6 中将给出 Λ 的另一定义, 容易证明它与上述定义等价.

以后再讨论 Euler 示性函数和 σ_k 函数. 先看 Möbius 函数的情形. 有

$$\mu(p^\nu) = \begin{cases} -1, & 若\ \nu = 1, \\ 0, & 若\ \nu > 1, \end{cases}$$

容易验证 $\mu(n) = \prod_{p^\nu \| n} \mu(p^\nu)$.

定理 2.2 Möbius 函数是乘性函数.

§2.3 形式 Dirichlet 级数

研究数论函数的一个关键工具是 Dirichlet 级数. 在第二部分中将较为系统地研究它. 这里只指出一些用形式 Dirichlet 级数描述起来比较方便的数论函数的代数性质.

定义 2.3 设 f 为数论函数, 称形式级数

$$D(f;s) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}$$

为 f 的形式 Dirichlet 级数.

两个形式 Dirichlet 级数的和或积可自然地定义为

$$D(f;s) + D(g;s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)+g(n)}{n^s}, \tag{2.3}$$

$$D(f;s)D(g;s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{h(n)}{n^s}, \tag{2.4}$$

其中

$$h(n) = \sum_{dd'=n} f(d)g(d'). \tag{2.5}$$

形式 Dirichlet 级数乘法的定义与下列形式计算一致:

$$\sum_{m\geqslant 1} \frac{f(m)}{m^s} \sum_{k\geqslant 1} \frac{g(k)}{k^s} = \sum_{m\geqslant 1,\, k\geqslant 1} \frac{f(m)g(k)}{(mk)^s} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s} \sum_{km=n} f(m)g(k).$$

容易验证, 所有形式 Dirichlet 级数的集合以及前述两种运算构成一个交换幺环, 其单位元是对应于数论函数

$$\delta(n) := \begin{cases} 1, & 若\ n = 1, \\ 0, & 若\ n > 1 \end{cases}$$

的形式 Dirichlet 级数

$$D(\delta;s) = 1.$$

§2.4 数论函数环

数论函数和形式 Dirichlet 级数之间的对应关系诱导数论函数集上的一个加法 $(+)$ 结构和一个乘法 $(*)$ 结构, 其基本性质分别为

$$D(f+g;s)=D(f;s)+D(g;s),$$
$$D(f*g;s)=D(f;s)D(g;s).$$

于是有 $(f+g)(n)=f(n)+g(n)$ 及 $(f*g)(n)=h(n)$, 其中 h 是 (2.5) 中定义的数论函数.

运算 $*$ 称为 Dirichlet 卷积. 上述运算给予数论函数集 $\mathbb{A}$ 一个交换幺环的结构并使之同构于形式 Dirichlet 级数环. Cashwell 和 Everett (1959) 证明了它是唯一因子分解环, 也就是说, 它是一个整环, 且模去可逆元组成的群的作用后, 它满足算术基本定理.

$f\in\mathbb{A}$ 是可逆元的一个充要条件是 $f(1)\neq 0$. 事实上, 在这个条件下, 由方程组

$$\sum_{d\mid n}f(n/d)g(d)=\delta(n)\qquad(n\geqslant 1)\tag{2.6}$$

可递归地算出 $g(n)$: 有

$$\begin{cases}g(1)=f(1)^{-1},\\ g(n)=-f(1)^{-1}\displaystyle\sum_{d\mid n,\,d<n}f(n/d)g(d)\qquad(n>1).\end{cases}\tag{2.7}$$

反过来, 若 $f(1)=0$, 那么当 $n=1$ 时方程 (2.6) 无解, 故而 f 不可逆.

定理 2.4 *环 $\mathbb{A}$ 的可逆元组成的群 $\mathbb{G}$ 是由那些满足 $f(1)\neq 0$ 的数论函数 f 构成的.*

$\mathbb{A}$ 中的元素 π 是素元当且仅当它不可逆且 $\pi=u*v$ 蕴涵 u 或 v 可逆. 容易验证, $\mathbb{A}$ 的素元集严格包含满足 $f(1)=0$ 且对某个素数 p 有 $f(p)\neq 0$ 的函数 f 组成的集合, 见习题 48 和习题 49.

乘性函数都是可逆的, 这是因为按定义有 $f(1)=1$. 下面的结论说明了乘性函数组成 $\mathbb{G}$ 的一个子群.

定理 2.5 *$\mathbb{A}$ 中的元素 f 是乘性函数的一个充要条件是它的形式 Dirichlet 级数可展成 Euler 型无穷形式乘积, 亦即*

$$D(f;s)=\prod_p\Big(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\Big).\tag{2.8}$$

这个结论是显然的, 因为在代数上关系 (2.8) 等同于条件

$$f(1)=1, \qquad f(n)=\prod_{p^{\nu}\|n} f(p^{\nu}) \qquad (n>1).$$

定理 2.6 乘性函数集 $\mathbb{M}$ 是 $\mathbb{A}$ 的可逆元素群 $\mathbb{G}$ 的一个子群.

证明 若 f 和 g 都是 $\mathbb{M}$ 中的元素, 由形式计算立得关系

$$D(f;s)D(g;s)=\prod_{p}\left(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{f(p^{\nu})}{p^{\nu s}}\right)\left(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{g(p^{\nu})}{p^{\nu s}}\right)=\prod_{p}\left(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{h(p^{\nu})}{p^{\nu s}}\right),$$

其中

$$h(p^{\nu})=\sum_{0\leqslant j\leqslant \nu} f(p^{j})g(p^{\nu-j}). \tag{2.9}$$

按定义 $D(f;s)D(g;s)=D(f*g;s)$, 由此立得在素数的幂上 $f*g$ 等于 (2.9) 式所确定的乘性函数.

只余下验证 $\mathbb{M}$ 中元素 f 的逆 $\tilde{f}$ 仍在 $\mathbb{M}$ 中. 对 $g=\tilde{f}$ 应用 (2.6) 于 $n=1$, 继而 $n=p^{\nu}$ 的情形, 即得 $\tilde{f}(1)=1$ 且对任意素数 p 有

$$\left(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{f(p^{\nu})}{p^{\nu s}}\right)\left(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{\tilde{f}(p^{\nu})}{p^{\nu s}}\right)=1.$$

所以

$$D(f;s)\prod_{p}\left(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{\tilde{f}(p^{\nu})}{p^{\nu s}}\right)=1=D(f;s)D(\tilde{f};s).$$

故 $\tilde{f}$ 满足条件 (2.8), 由定理 2.5 知 $\tilde{f}\in\mathbb{M}$. □

令 $\mathbf{1}$ 为使得

$$\mathbf{1}(n)=1 \qquad (n\geqslant 1) \tag{2.10}$$

的数论函数. 显然 $\mathbf{1}$ 是乘性的, 并且对每个 $n\geqslant 1$, 有

$$\tau(n)=\sum_{d|n}1=\sum_{d|n}\mathbf{1}(d)\mathbf{1}(n/d),$$

所以

$$\tau=\mathbf{1}*\mathbf{1} \tag{2.11}$$

由定理 2.6, 这给出了 τ 是乘性函数的另一个证明.

用 j 表示恒同函数, 即

$$j(n)=n \qquad (n\geqslant 1). \tag{2.12}$$

显然有

$$\sigma = \mathbf{1} * j. \tag{2.13}$$

这说明了如下结论.

定理 2.7 “因子和”函数 $\sigma(n)$ 是乘性函数.

注意到对任意参数 k (无论是实或复的), 函数

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k = (\mathbf{1} * j^k)(n)$$

同样是乘性的.

§2.5 Möbius 反转公式

对任意素数 p 及任意整数 $\nu \geqslant 0$, 有

$$(\mathbf{1} * \mu)(p^\nu) = \sum_{j=0}^{\nu} \mu(p^j) = \left\{\begin{matrix} 1, & 若\ \nu = 0 \\ 0, & 若\ \nu \geqslant 1 \end{matrix}\right\} = \delta(p^\nu).$$

由于 $\mathbf{1} * \mu$ 和 δ 都是乘性函数, 它们必相等.

定理 2.8 Möbius 函数是函数 $\mathbf{1}$ 在卷积下的逆. 或者说, 有

$$\mathbf{1} * \mu = \delta \tag{2.14}$$

抑或

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & 若\ n = 1, \\ 0, & 若\ n > 1. \end{cases} \tag{2.15}$$

尽管看上去是显然的, 但 (2.15) 有诸多应用. 特别地, 它是组合筛法的出发点, 见 §4.2 与 §4.3.

在具体应用 (2.15) 之前, 我们指出可以用定理 2.6 证明的过程来实际计算 μ 的卷积逆. 一般说来, 乘性函数 f 的逆 $\widetilde{f}$ 在素数的幂上的值被形式等式

$$\Big(1 + \sum_{\nu \geqslant 1} \widetilde{f}(p^\nu)\xi^\nu\Big)\Big(1 + \sum_{\nu \geqslant 1} f(p^\nu)\xi^\nu\Big) = 1 \tag{2.16}$$

所决定. 这在估计 $|\widetilde{f}(p^\nu)|$ 的上界时很有用. 将 (2.16) 用于 ξ 位于复平面上使两个幂级数都收敛的圆盘的情形并用 Cauchy 积分公式便可得到上界估计.

定理 2.9 (Möbius 第一反转公式) 设 f 和 g 是两个数论函数. 下列条件等价:

(i) $g(n) = \sum_{d|n} f(d) \qquad (n \geqslant 1)$,

(ii) $f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(n/d) \qquad (n \geqslant 1)$.

证明 条件 (i) 等价于 $g = f * \mathbf{1}$, 而条件 (ii) 等价于 $f = g * \mu$. 由 (2.14) 即得结论. □

以下是该公式在实变函数情形的推广.

定理 2.10 (Möbius 第二反转公式) 设 F 和 G 是在 $[1, +\infty[$ 上定义的函数. 以下两个条件等价:

(i) $F(x) = \sum_{n \leqslant x} G(x/n) \qquad (x \geqslant 1)$,

(ii) $G(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) F(x/n) \qquad (x \geqslant 1)$.

证明 只证 (i)⇒(ii), 其逆命题的证明类似. 对于 $x \geqslant 1$, 有

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) F(x/n) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \sum_{m \leqslant x/n} G(x/mn) = \sum_{k \leqslant x} G(x/k) \sum_{mn=k} \mu(m).$$

由 (2.15), 内部的和式等于 $\delta(k)$, 故 (ii) 成立. □

应用定理 2.10 于 $G(x) \equiv 1$ 的情形得

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) \lfloor x/n \rfloor = 1 \qquad (x \geqslant 1). \tag{2.17}$$

这暗含了

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} = 0. \tag{2.18}$$

在 §3.6 中将看到, (2.18) 与素数定理等价.

§2.6 Mangoldt 函数

习惯上用 Λ 表示数论函数

$$\Lambda := \mu * \ln, \tag{2.19}$$

并称之为 Mangoldt 函数.

对任意整数 $n \geqslant 1$, 有

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \ln(n/d) = \delta(n) \ln n - \sum_{d|n} \mu(d) \ln d = -\sum_{d|n} \mu(d) \ln d.$$

也就是说,

$$\Lambda = -\mu \ln * \mathbf{1}. \tag{2.20}$$

另外, 对任意互素的整数对 m, n, 由 (2.20) 知

$$\begin{aligned}\Lambda(mn) &= -\sum_{d|m} \sum_{t|n} \mu(dt) \ln(dt) = -\sum_{d|m} \mu(d) \sum_{t|n} \mu(t) \{\ln d + \ln t\} \\ &= \sum_{d|m} \mu(d) \{-\delta(n) \ln d + \Lambda(n)\} = \delta(n)\Lambda(m) + \delta(m)\Lambda(n).\end{aligned}$$

所以当 n 不是素数的幂时 $\Lambda(n) = 0$. 由 (2.20) 得

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{若 } n = p^\nu,\ \nu \geqslant 1, \\ 0, & \text{若 } n \neq p^\nu. \end{cases} \tag{2.21}$$

下列的 Tchébychev 和函数在解析素数论中非常重要:

$$\psi(x) := \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n), \tag{2.22}$$

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \ln p. \tag{2.23}$$

由定理 1.5 和定理 1.4 可知分别有估计[③]

$$\psi(x) = \ln\big(\mathrm{ppcm}\{n : n \leqslant x\}\big) \geqslant \lfloor x \rfloor \ln 2 \qquad (x \geqslant 7), \tag{2.24}$$

$$\vartheta(x) \leqslant x \ln 4 \qquad (x \geqslant 2). \tag{2.25}$$

从 (2.21) 立知

$$\psi(x) = \sum_{k \geqslant 1} \vartheta(x^{1/k}) \qquad (x \geqslant 1). \tag{2.26}$$

其中对固定的 x, 和式是有限和: 当 $2^k > x$ 时通项即为零.

---

③ ppcm 表示最小公倍数. ——译者注

定理 2.11 对任意 $x \geqslant 2$, 有

$$\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x}), \tag{2.27}$$

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + O\Big(\frac{x}{(\ln x)^2}\Big). \tag{2.28}$$

证明 由 (2.25) 和 (2.26) 立得 (2.27). 为证 (2.28), 用 Abel 求和法估计 $\vartheta(x)$:

$$\vartheta(x) = \int_1^x \ln t \, \mathrm{d}\pi(t) = \pi(x)\ln x - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t}\, \mathrm{d}t.$$

由 Tchébychev 上界估计 (定理 1.3), 上式最后的积分是 $O(x/\ln x)$, 于是得到要求的公式. □

推论 2.12 设 α 和 β 是使得 $0 < \alpha < \ln 2$, $\beta > \ln 4$ 的两个常数. 对足够大的 x, 有

$$\alpha x \leqslant \vartheta(x) \leqslant \psi(x) \leqslant \beta x. \tag{2.29}$$

这是定理 2.11 及定理 1.3 的直接推论.

§2.7 Euler 示性函数

对 $n \geqslant 1$ 曾定义 $\varphi(n)$ 为模 n 可逆剩余类的个数. 这样有

$$\varphi(n) = \sum_{1\leqslant m\leqslant n} \delta\big((m,n)\big).$$

由 (2.14) 知

$$\varphi(n) = \sum_{m\leqslant n}\sum_{d|(m,n)} \mu(d) = \sum_{d|n}\mu(d) \sum_{\substack{m\leqslant n\\ m\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} 1 = \sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}.$$

也就是说,

$$\varphi = \mu * j. \tag{2.30}$$

特别地, 若 p 是素数, 则有

$$\varphi(p^\nu) = \mu(1)p^\nu + \mu(p)p^{\nu-1} = p^\nu\Big(1 - \frac{1}{p}\Big).$$

这样就证明了如下定理:

定理 2.13 Euler 示性函数 φ 是乘性函数, 且对任意整数 $n \geqslant 1$ 有

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{2.31}$$

注意到每个有理数 h/n 可唯一地写成 $h/n = a/d$ 的形式, 其中 d 整除 n, $(a, d) = 1$. 由此可得上述结论的另一证明. 事实上, 对任意实变函数 F, 有

$$\sum_{1 \leqslant h \leqslant n} F(h/n) = \sum_{d|n} \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant d \\ (a,d)=1}} F(a/d). \tag{2.32}$$

将该等式用于 $F(x) \equiv 1$ 的情形, 即得

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d), \tag{2.33}$$

亦即 $j = \mathbf{1} * \varphi$. 由 (2.14) 便得欲证的结论.

用容斥原理 (见如下注记) 容易得到定理 2.13 的第三种证明.

注记

§2.4 关于数论函数环的其他性质可参见 Shapiro (1972).

§2.5 容斥原理. Möbius 反转公式的基本形式 $\mathbf{1} * \mu = \delta$ 的一个纯组合版本便是容斥原理. 其表述为:

设 $\mathcal{A}$ 是基数为 N 的有限集, $\mathcal{P} = \{(1), \ldots, (k)\}$ 是一组性质. 对 $\mathcal{P}$ 的任一子集 I, 用 $A(I)$ 表示 $\mathcal{A}$ 中满足 I 中所有性质的元素个数. 用 $S(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ 表示 $\mathcal{A}$ 中不满足 $\mathcal{P}$ 中任一性质的元素个数. 那么有

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}) = N + \sum_{s=1}^{k} (-1)^s \sum_{\substack{I \subseteq \mathcal{P} \\ |I|=s}} A(I). \tag{2.34}$$

对任意 $\mathcal{A}$ 中元素 a, 令 $m(a)$ 为 a 满足的 $\mathcal{P}$ 中性质的个数, $0 \leqslant m(a) \leqslant k$. 用这样的记号容易直接证明等式 (2.34). 亦可间接地证明它, 方法如下:

令 $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ 为最小的 k 个素数并令

$$P = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} p_j.$$

对任意 $a \in \mathcal{A}$ 指定整数 $F(a) = \prod_{a \in (j)} p_j$, 其中记号 "$a \in (j)$" 表示 a 满足条件 (j), 这样有

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta(F(a)) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{d|F(a)} \mu(d) = \sum_{d|P} \mu(d) \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ F(a) \equiv 0 \pmod d}} 1.$$

若 $d = \prod_{(j) \in I} p_j$, 有

$$\mu(d) = (-1)^{|I|} \qquad \text{及} \qquad \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ F(a) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} 1 = A(I),$$

由此即得 (2.34).

习题

41. 令 $\zeta(s)$ 为 Riemann ζ-函数, 即数论函数 $\mathbf{1}(n) = 1$ $(n \geqslant 1)$ 的形式 Dirichlet 级数. 用 $\zeta(s)$ 表示下列数论函数的形式 Dirichlet 级数: $\mu(n)$, $\mu(n)^2$, $\varphi(n)$, $\sigma(n)$, $\tau(n)$, $2^{\omega(n)}$, $\Lambda(n)$. 得到的等式分别对应于哪些卷积关系?

42. 证明对任意整数 $n \geqslant 1$, 有 $2^{\omega(n)} \leqslant \tau(n) \leqslant 2^{\Omega(n)}$.

43. 证明对任意整数 $n > 1$, 有 $6n^2/\pi^2 < \sigma(n)\varphi(n) < n^2$.

44. 证明任意整数 $n \geqslant 1$ 可唯一地分解成 $n = qm^2$ 的形式, 其中 q 没有平方因子. 记 $Q(x)$ 为不超过 x 且不含平方因子的正整数个数, 证明

(a) $\lfloor x \rfloor = \sum_{m \leqslant \sqrt{x}} Q(x/m^2) \qquad (x \geqslant 1)$,

(b) $Q(x) = \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \mu(d) \lfloor x/d^2 \rfloor \qquad (x \geqslant 1)$,

(c) $Q(x) = 6x/\pi^2 + O(\sqrt{x}) \qquad (x \geqslant 1)$.

将上述结论推广到 "k-自由数" 的情形. 所谓 k-自由数, 是指满足 $p \mid n \Rightarrow p^k \nmid n$ 的正整数 n.

45. Ramanujan 和. 定义 Ramanujan 和 $c_n(m)$ 为

$$c_n(m) := \sum_{1 \leqslant h \leqslant n,\, (h,n)=1} \mathrm{e}(hm/n) \qquad (m, n \geqslant 1),$$

其中 $\mathrm{e}(u) := \mathrm{e}^{2\pi i u}$ $(u \in \mathbb{R})$. 证明对 $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ 有

(a) $c_n(m) = \sum_{d \mid (m,n)} \mu(n/d) d$,

(b) $c_n(m) = \mu(t)\varphi(n)/\varphi(t)$, 其中 $t := n/(m,n)$,

并从中得出

$$\mu(n) = \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant n \\ (h,n)=1}} \mathrm{e}(h/n) \qquad (n \geqslant 1).$$

证明对固定的 m, $c_n(m)$ 是 n 的乘性函数. 可否直接证明该结论?

46. 令 f 为 $\mathbb{R}^+$ 上的函数, 使得

$$\sum_{m \geqslant 1} |f(mx)| \tau(m) < \infty.$$

令 $g(x) = \sum_{m\geqslant 1} f(mx)$. 证明 $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(n)g(nx)$. 逆命题是否成立?

47. 定义数论函数 $R(n)$ 为

$$R(n) := \left|\{(d,d') : d\geqslant 1,\ d'\geqslant 1,\ n=[d,d']\}\right|.$$

(a) 证明 $R(n)$ 是关于 n 的乘性函数.

(b) 计算 $\sum_{d|n} R(d)$ 并给出 (a) 的另一证明.

(c) 证明形式 Dirichlet 级数 $F(s) := \sum_{d,d'\geqslant 1}[d,d']^{-s}$ 可写成 $\zeta(s)$ 的函数.

(d) 讨论 $\sum_{d_1,\ldots,d_k\geqslant 1}[d_1,\ldots,d_k]^{-s}$ 的一般情形.

48. 令 f 为实值数论函数. 假设存在两个素数 p 和 q 使得 $f(pq)^2 < 4f(p^2)f(q^2)$. 证明 f 或者是可逆的, 或者是实值数论函数环 $\mathbb{A}_r$ 的素元.

49. 设 f 是复值数论函数且 $f(1)=0$.

(a) 证明若 $f=u*v$ 且 u, v 不可逆, 那么对任意素数对 (p,q), 方程

$$z^2 - f(pq)z + f(p^2)f(q^2) = 0$$

的解是 $u(p)v(q)$ 和 $u(q)v(p)$.

(b) 用 $g_i(p,q)\quad (i=1,2)$ 表示形如

$$g_i(p,q) = f(pq) \pm \sqrt{f(pq)^2 - 4f(p^2)f(q^2)}$$

的复数 (预先选定了一个虚数单位). 证明若存在四个素数 p, q, r, s, 使得 16 个形如

$$\begin{vmatrix} g_i(p,q) & g_k(q,s) \\ g_j(p,r) & g_\ell(r,s) \end{vmatrix} \qquad (i,j,k,\ell = 1,2)$$

的行列式均非零, 那么 f 是 $\mathbb{A}$ 中的素元.

50. 关于单调乘性函数. 设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 是单调上升乘性数论函数. 对任意整数 $a\geqslant 3$, $t\geqslant 1$, 令 $R_t := \sum_{0\leqslant j\leqslant t} a^j$, $S_t := a^t - \sum_{0\leqslant j<t} a^j$. 证明对任意 t 有 $f(R_t)\geqslant f(a)^t\geqslant f(S_t)$, 并推出对任意大于 2 的整数 a, b, n, 有

$$f(b)^{s-1}\leqslant f(n)\leqslant f(a)^{r+2},$$

其中 $r := \lfloor \ln n/\ln a\rfloor$, $s := \lfloor \ln n/\ln b\rfloor$. 证明 $f(a)^{1/\ln a} = f(b)^{1/\ln b}$. 这样就存在常数 $k\geqslant 0$, 使得对任意 $n\geqslant 1$ 有 $f(n)=n^k$.④

④ 这个结论属于 Erdős (1946). 上述简化证明属于 Moser 和 Lambek (1953).

51. 第二类 Stirling 数. 用容斥原理证明从基数为 n 的集合到基数为 k 的集合之满射的个数 $\sigma(n,k)$ 满足等式[⑤]

$$\sigma(n,k) = \sum_{0\leqslant j\leqslant k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n.$$

⑤ 第二类 Stirling 数 $S(n,k)$ 等于 $\sigma(n,k)/k!$. 其经典的定义是将基数为 n 的集合 E 分为 k 部分的分法数, 抑或等价类恰为 k 个的 E 上等价关系的个数.

第三章　均阶

§3.1　概述

所谓数论函数 f 的均阶是指使得

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) \sim \sum_{n\leqslant x} g(n) \tag{3.1}$$

的简单实变函数 g. 一个数论函数 f 可有多个均阶. 一般希望找到可用简单函数表示且容易确定渐近性质的函数 g. 注意: 在几个可能的均阶中选择时, 总选取使 (3.1) 误差最小的那个.

数论函数常以看似极不规则的面貌出现, 即使给出很大的数值表也难以研究. 例如函数 $\tau(n)$, 它的值在 2 (即其在每个素数上的值) 和偶然出现的巨大的数值 (见第五章) 之间波动. 求平均的过程经常能起到重要的光滑化的作用, 以掩盖偶尔出现的不规则的效果. 通常情况下, 特别是当 f 取正值时, 均阶是非平凡且最容易确定的关于数论函数的量.

§3.2　Dirichlet 问题和双曲律

这里研究因子个数函数 $\tau(n)$ 的均阶. 简单地交换求和号便给出一种可能的均阶:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\tau(n) &= \sum_{n\leqslant x}\sum_{d\mid n}1 = \sum_{d\leqslant x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv 0 \pmod d}} 1 = \sum_{d\leqslant x}\left\lfloor \frac{x}{d}\right\rfloor \\ &= \sum_{d\leqslant x}\left(\frac{x}{d}+O(1)\right) = x\ln x + O(x).\end{aligned}$$

用 Dirichlet 的一个关于卷积平均值的一般方法的原始形式可以改进上述估计.

定理 3.1 (Dirichlet 双曲律) 设 f 和 g 为两个数论函数, 其部分和函数分别记为 F 和 G. 对任意 $1 \leqslant y \leqslant x$ 有

$$\sum_{n \leqslant x} f * g(n) = \sum_{n \leqslant y} g(n) F(x/n) + \sum_{m \leqslant x/y} f(m) G(x/m) - F(x/y) G(y). \tag{3.2}$$

证明 (3.2) 的左边可写成

$$\begin{aligned}\sum_{md \leqslant x} f(m)g(d) &= \sum_{md \leqslant x,\, d \leqslant y} f(m)g(d) + \sum_{md \leqslant x,\, d > y} f(m)g(d) \\ &= \sum_{d \leqslant y} g(d)F(x/d) + \sum_{m \leqslant x/y} f(m)\{G(x/m) - G(y)\}.\end{aligned}$$

展开最后一项就得到要证的等式. □

通过这个结果可得到 $\tau(n)$ 平均形态更精确的估计.

定理 3.2 当 x 趋于无穷时, 有

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n) = x(\ln x + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}), \tag{3.3}$$

其中 γ 是 Euler 常数.

证明 将 (3.2) 应用于 $f = g = \mathbf{1}$, $F(x) = G(x) = \lfloor x \rfloor$ 及 $y = \sqrt{x}$ 的情形, 得

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n) = 2 \sum_{m \leqslant \sqrt{x}} \lfloor x/m \rfloor - \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 = 2x \sum_{m \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{m} - x + O(\sqrt{x}). \tag{3.4}$$

由定理 0.8, 对 m 的和等于 $\frac{1}{2} \ln x + \gamma + O(1/\sqrt{x})$. 这样就得到 (3.3). □

双曲律得名于 Dirichlet 问题的如下几何描述.

考虑 uv 平面中的等轴双曲线 $uv = x$. 那些位于双曲线和坐标轴之间 (不含坐标轴) 的整点 (a, b) 对应于整数 $n = ab \leqslant x$ 的一个双因子分解, 所以 (3.3) 的左边等于曲线下方的整点数 (如图 I–1). 定理 3.2 只是利用了图形的对称性: 要求的值等于方块 $[1, \sqrt{x}]^2$ 中的整点数加上阴影部分中的整点数的两倍.

令

$$\Delta(x) := \sum_{n \leqslant x} \tau(n) - x(\ln x + 2\gamma - 1).$$

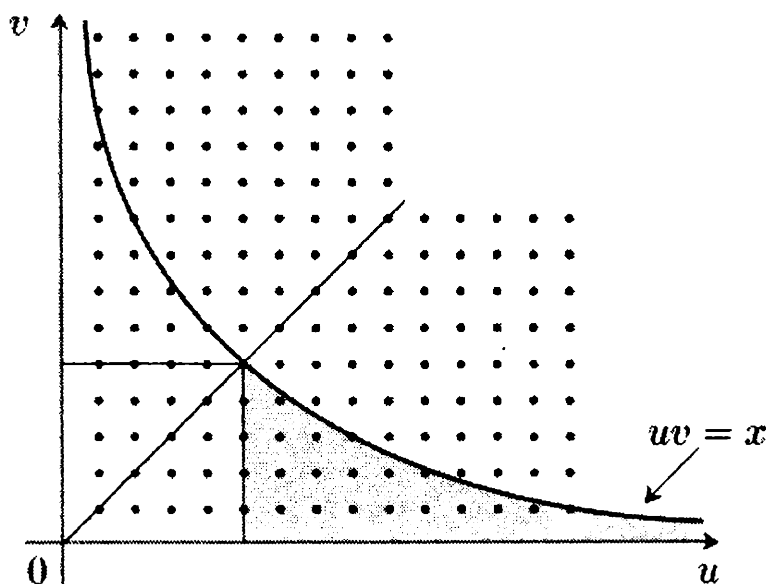


图 I–1 等轴双曲线和整点网格

上文中已见到 $\Delta(x) = O(\sqrt{x})$. Voronoï 于 1903 年证明了

$$\Delta(x) \ll x^{1/3} \ln x,$$

Hardy 和 Landau 于 1915 年分别独立地证明了 $\Delta(x)$ 不是 $o(x^{1/4})$. 设 α 是使得

$$\Delta(x) \ll x^{\xi}$$

成立的指数 ξ 的下确界. 人们尚不知 α 的确切值, 一般猜想 $\alpha = 1/4$. 至今知道的最好的上界估计是 Huxley (2003) 的:

$$\alpha \leqslant 131/416 \approx 0.314\,904,$$

这改进了 Iwaniec 和 Mozzochi (1988) 的结果 $\alpha \leqslant 7/22$. 在第六章中将介绍如何用 van der Corput (1922) 的方法得到 Voronoï 的结果的简单证明.

§3.3 因子和函数

下列定理说明了函数

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

的均阶是 $\frac{1}{6}\pi^2 n$. 该结果实际上更为精细.

定理 3.3 当 x 趋于无穷时, 有

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) = \tfrac{1}{12}\pi^2 x^2 + O(x \ln x). \tag{3.5}$$

证明 证明中用到的原理非常简单, 本章中将多次使用. 将函数写成对 n 的因子求和的形式并交换求和号, 得

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma(n)=\sum_{md\leqslant x}m=\frac{1}{2}\sum_{d\leqslant x}\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor+1\right)=\frac{1}{2}\sum_{d\leqslant x}\frac{x^2}{d^2}+O\Big(x\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{d}\Big).$$

由经典公式

$$\sum_{d\geqslant 1}\frac{1}{d^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{3.6}$$

便得欲证的结论. □

在习题 52 中给出 (3.6) 的两个证明.

渐近公式 (3.5) 最好的余项估计是 $O(x(\ln x)^{2/3})$, 这是 Walfisz (1963, 第 99 页) 得出的结果.

§3.4 Euler 示性函数

从卷积公式

$$\varphi(n)=\sum_{md=n}\mu(d)m \tag{3.7}$$

出发, 直接应用定理 3.3 的方法, 可有如下定理.

定理 3.4 *当 x 趋于无穷时, 有*

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\ln x). \tag{3.8}$$

证明 由 (3.7), 和式等于

$$\sum_{d\leqslant x}\mu(d)\sum_{m\leqslant x/d}m=\frac{1}{2}\sum_{d\leqslant x}\mu(d)\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor+1\right)=\frac{1}{2}x^2\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\Big(x\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{d}\Big).$$

由于 Möbius 函数是 **1** 的卷积逆, 形式上有

$$\Big(\sum_{d\geqslant 1}\frac{\mu(d)}{d^2}\Big)\Big(\sum_{d\geqslant 1}\frac{1}{d^2}\Big)=1.$$

由于这两个级数都是绝对收敛的, 上述等式在通常意义下成立. 故由 (3.6) 知

$$\sum_{d\geqslant 1}\frac{\mu(d)}{d^2}=\frac{6}{\pi^2}, \tag{3.9}$$

这样就得到结论中的公式. □

(3.8) 余项的最好估计是

$$O\Big(x(\ln x)^{2/3}(\ln_2 x)^{4/3}\Big),$$

见 Walfisz (1963), 第 144 页.

对任意整数 $N \geqslant 1$, 将 $[0,1]$ 中分母不超过 N 的既约分数渐升列称为 N 阶 Farey 列并记之为 $\mathcal{F}_N$. 比如

$$\mathcal{F}_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}, \quad \mathcal{F}_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}, \quad \mathcal{F}_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\},$$

由 $\varphi(n)$ 的定义得

$$F(N) := |\mathcal{F}_N| = 1 + \sum_{n \leqslant N} \varphi(n).$$

由定理 3.4 便知

$$F(N) \sim \frac{3}{\pi^2} N^2 \qquad (N \to \infty).$$

上述估计还可这样阐述: $F(N)$ 等于形如 m/n 的既约分数个数加上 1, 其中 $1 \leqslant m \leqslant n \leqslant N$; 由于这样的整数对 $\{m,n\}$ 恰有 $\frac{1}{2}N(N+1)$ 个, 所以当 N 趋于无穷时, $]0,1]$ 中的分母不超过 N 的分数是既约分数的概率趋于 $6/\pi^2$.

可按如下方式来推广上述结论.

定理 3.5 令 $G(x,y)$ 表示满足 $1 \leqslant m \leqslant x$, $1 \leqslant n \leqslant y$, $(m,n)=1$ 的整数对 $\{m,n\}$ 的个数. 那么当 x, y 趋于无穷时, 有 $G(x,y) \sim (6/\pi^2)xy$. 更确切地说, 若令 $z := \min(x,y)$, 则有

$$G(x,y) = xy\left\{\frac{6}{\pi^2} + O\Big(\frac{\ln z}{z}\Big)\right\} \qquad (x, y \geqslant 2).$$

证明 由 (2.14), 有

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \sum_{m \leqslant x,\ n \leqslant y} \delta\big((m,n)\big) = \sum_{d \leqslant z} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{y}{d} \right\rfloor \\ &= xy \sum_{d \leqslant z} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\Big((x+y)\sum_{d \leqslant z} \frac{1}{d}\Big) \\ &= xy\left\{\frac{6}{\pi^2} + O\Big(\frac{1}{z} + \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\Big)\ln z\Big)\right\}. \end{aligned}$$

□

§3.5 ω 函数和 Ω 函数

定理 3.6 当 x 趋于无穷时, 有

$$\sum_{n \leqslant x} \omega(n) = x \ln_2 x + c_1 x + O\Big(\frac{x}{\ln x}\Big), \tag{3.10}$$

其中 $c_1 \approx 0.261\,497$ 是定理 1.10 中出现的常数.

证明 有

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)=\sum_{n\leqslant x}\sum_{p|n}1=\sum_{p\leqslant x}\lfloor x/p\rfloor=x\sum_{p\leqslant x}1/p+O\big(\pi(x)\big).$$

由定理 1.10 及 Tchébychev 上界估计 (定理 1.3) 便得 (3.10). □

函数 $\Omega(n)=\sum_{p^\nu\|n}\nu$ 的情形与此类似, 只是略难些.

定理 3.7 当 x 趋于无穷时, 有

$$\sum_{n\leqslant x}\Omega(n)=x\ln_2 x+c_2x+O\Big(\frac{x}{\ln x}\Big), \tag{3.11}$$

其中

$$c_2=c_1+\sum_p\frac{1}{p(p-1)}\approx 1.034\,653. \tag{3.12}$$

证明 令

$$A(x):=\sum_{n\leqslant x}\{\Omega(n)-\omega(n)\}=\sum_p\sum_{\nu\geqslant 2}\lfloor x/p^\nu\rfloor.$$

一方面,

$$A(x)\leqslant x\sum_p\sum_{\nu\geqslant 2}\frac{1}{p^\nu}=x\sum_p\frac{1}{p(p-1)};$$

另一方面, 由定理 1.3,

$$\begin{aligned}A(x)&\geqslant\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{2\leqslant\nu\leqslant\ln x/\ln p}\Big(\frac{x}{p^\nu}-1\Big)=\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\Big\{\frac{x}{p(p-1)}+O\Big(\frac{\ln x}{\ln p}\Big)\Big\}\\&=x\sum_p\frac{1}{p(p-1)}+O(\sqrt{x}),\end{aligned}$$

所以

$$A(x)=x(c_2-c_1)+O(\sqrt{x}).$$

这样由 (3.10) 便得 (3.11) 式. □

§3.6 Möbius 函数的均值与 Tchébychev 和函数

在 §2.6 中看到, Mangoldt 函数

$$\Lambda=\mu*\ln$$

与素数集的示性函数是紧密相联的, 并且它的和函数

$$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)$$

满足

$$\psi(x)\sim\pi(x)\ln x\qquad(x\to\infty).$$

这样人们自然想知道 $\mu(n)$ 的均值可否简单地用 Tchébychev 函数 $\pi(x)$, $\vartheta(x)$ 及 $\psi(x)$ 的渐近性质来描述. 下述 Landau (1909) 的定理完全地回答了这个问题.

定理 3.8 以下断言等价:

(i) $\psi(x)\sim x\quad(x\to\infty)$,

(ii) $M(x):=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)=o(x)\quad(x\to\infty)$,

(iii) $\sum_{n\geqslant 1}\mu(n)/n=0$.

注 断言 (iii) 是指左边的级数收敛, 且其和等于 0.

证明 蕴涵关系 (iii) $\Longrightarrow$ (ii) 是 Abel 求和法的简单应用. 事实上, 若假设

$$m(x):=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)/n=o(1)\qquad(x\to\infty),$$

那么

$$M(x)=\int_{1-}^{x}t\,\mathrm{d}m(t)=xm(x)-\int_{1}^{x}m(t)\,\mathrm{d}t=o(x).$$

为证蕴涵关系 (ii) $\Longrightarrow$ (i), 需验证 $\Lambda-\mathbf{1}$ 的和函数是 $o(x)$. 首先证明其一个卷积等式

$$\Lambda-\mathbf{1}=(\ln-\tau)*\mu=(\ln-\tau+2\gamma\mathbf{1})*\mu-2\gamma\delta=f*\mu-2\gamma\delta,$$

其中由定理 3.2 及推论 0.5 中对 $\sum_{n\leqslant x}\ln n$ 的估计可知函数 f 满足

$$F(x):=\sum_{n\leqslant x}f(n)=O(\sqrt{x}).\tag{3.13}$$

下面用 (3.13) 及双曲律证明

$$H(x):=\sum_{n\leqslant x}f*\mu(n)=o(x).\tag{3.14}$$

对任意固定的 $y>2$, 由定理 3.1 知

$$H(x)=\sum_{n\leqslant x/y}\mu(n)F(x/n)+\sum_{m\leqslant y}f(m)M(x/m)-F(y)M(x/y).$$

假设 (ii) 成立, 便得到

$$\limsup_{x\to\infty}\left|\frac{H(x)}{x}\right| \leqslant \limsup_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x/y}\left|F\Big(\frac{x}{n}\Big)\right| \ll \limsup_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x/y}\sqrt{\frac{x}{n}} \ll \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

由于 y 可以任意大, (3.14) 成立.

最后只须验证 (i)$\Longrightarrow$ (iii). 首先注意到对卷积等式 $\mu * \mathbf{1} = \delta$ 两边求部分和可得

$$1 = \sum_{n\leqslant x}\mu(n)\lfloor x/n\rfloor = xm(x) + O(x).$$

从而

$$m(x) = O(1). \tag{3.15}$$

同样的卷积等式还推出

$$\sum_{md=n}\frac{\mu(m)}{md} = \delta(n),$$

从而

$$\sum_{m\leqslant x}\frac{\mu(m)}{m}\sum_{d\leqslant x/m}\frac{1}{d} = 1 \qquad (x\geqslant 1).$$

用定理 0.8 估计内部的和式, 得

$$1 = \sum_{m\leqslant x}\frac{\mu(m)}{m}\Big\{\ln\Big(\frac{x}{m}\Big) + \gamma + O\Big(\frac{m}{x}\Big)\Big\} = m(x)(\ln x + \gamma) - G(x) + O(1),$$

其中

$$G(x) := \sum_{m\leqslant x}\frac{\mu(m)\ln m}{m}.$$

从而只须证明

$$G(x) = o(\ln x) \qquad (x\to\infty). \tag{3.16}$$

为达该目的, 将利用 (2.20) 的卷积关系

$$\mu\ln = -\Lambda * \mu = (\mathbf{1} - \Lambda) * \mu - \delta.$$

只须考虑 $x \notin \mathbb{N}$ 的情形. 此时

$$G(x) = \sum_{jk\leqslant x}\Big(\frac{1-\Lambda(j)}{j}\Big)\frac{\mu(k)}{k} - 1 = -1 + \int_{1-}^{x}\frac{m(x/t)}{t}\,\mathrm{d}R(t),$$

其中

$$R(t) := \lfloor t\rfloor - \psi(t) \qquad (t\geqslant 1),$$

且由假设有

$$R(t)=o(t)\qquad (t\to\infty).$$

用 Abel 求和法, 得

$$\begin{aligned}G(x)&=-1+\int_1^x t^{-2}m(x/t)R(t)\,\mathrm{d}t-\int_{1-}^x t^{-1}R(t)\,\mathrm{d}m(x/t)\\&=O(1)+\int_1^x o(1/t)\,\mathrm{d}t-\int_{1-}^x o(1)\,|\mathrm{d}m(x/t)|.\end{aligned}$$

第一个积分是 $o(\ln x)$. 又由 Stieltjes 测度的比较

$$|\mathrm{d}m(y)|\leqslant \mathrm{d}\Big\{\sum_{n\leqslant y}1/n\Big\}$$

知第二个积分亦然. 所以 (3.16) 成立, (iii) 得证. □

推论 3.9 下列断言明显等价于定理 3.8 中的那些命题:

(iv) $\pi(x)\sim x/\ln x\quad (x\to\infty)$,

(v) $\vartheta(x)\sim x\quad (x\to\infty)$,

(vi) $\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)/n=\ln x-\gamma+o(1)\quad (x\to\infty)$.

证明 (iv) 和 (v) 的情形由定理 2.11 立得. 用 Abel 求和法易证 (vi) $\Longrightarrow$ (i), 细节留给读者. 对于反向的蕴涵关系则将再次利用定理 3.8 证明中引进的函数 $f=\ln-\tau+2\gamma\mathbf{1}$, 有

(3.17)

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)-1}{n}&=\sum_{kd\leqslant x}\frac{f(k)}{k}\frac{\mu(d)}{d}-2\gamma\\&=\sum_{d\leqslant x/y}\frac{\mu(d)}{d}E\Big(\frac{x}{d}\Big)+\sum_{k\leqslant y}\frac{f(k)}{k}m\Big(\frac{x}{k}\Big)-E(y)m\Big(\frac{x}{y}\Big)-2\gamma,\end{aligned}$$

其中

$$E(z):=\sum_{k\leqslant z}f(k)/k=C+O(1/\sqrt{z})\qquad (z\geqslant 1).$$

对 (3.13) 用 Abel 求和法并引进适当的常数 C 便得到上面 $E(z)$ 的估计. 令 x 和 y 依次趋于无穷, 如前述定理证明那样, 由 (iii) 知 (3.17) 等于 $-2\gamma+o(1)$, 这样便得欲证的结论. □

§3.7 无平方因子整数

若数论函数只取值 0 或 1, 便可视之为某正整数列 $\mathcal{A}$ 的示性函数, 对其

均阶的研究便等同于研究计数函数

$$A(x) := \big|\mathcal{A} \cap [1, x]\big|.$$

乘性函数 $n \mapsto \mu(n)^2$ 便是一个绝好的例子, 它的部分和

$$Q(x) := \sum_{n \leqslant x} \mu(n)^2$$

等于不超过 x 的无平方因子整数的个数.

定理 3.10 当 x 趋于无穷时, 有

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}). \tag{3.18}$$

证明 如同 $\tau(n)$, $\sigma(n)$ 或 $\varphi(n)$ 的情形那样, 把 $\mu(n)^2$ 写成卷积的形式. 将 n 分解成典则乘积

$$n = qm^2, \qquad \mu(q)^2 = 1. \tag{3.19}$$

该分解唯一: 事实上, q 等于 n 的指数为奇数的素因子之积, 于是有

$$\mu(n)^2 = \delta(m) = \sum_{d|m} \mu(d). \tag{3.20}$$

注意到 $d \mid m$ 等价于 $d^2 \mid n$, 从而由 (3.9) 知,

$$Q(x) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{d^2|n} \mu(d) = \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \mu(d)\left\lfloor \frac{x}{d^2} \right\rfloor = \frac{6}{\pi^2}x + O\Big(x \sum_{d > \sqrt{x}} \frac{1}{d^2} + \sqrt{x}\Big),$$

于是得到 (3.18). □

注 亦可采用如下略微不同的推理. 对任意整数 $m \leqslant \sqrt{x}$, 令 $\mathcal{A}_m$ 为满足 (3.19) 的整数 $n \leqslant x$ 的个数. 这样 $\{n : n \leqslant x\}$ 是 $\mathcal{A}_m$ 的无交并, 且

$$|\mathcal{A}_m| = Q(x/m^2),$$

从而

$$\sum_{m \leqslant \sqrt{x}} Q(x/m^2) = \lfloor x \rfloor \qquad (x \geqslant 1).$$

令 $x = y^2$ 并应用 Möbius 第二反转公式 (定理 2.10) 于 $F(y) = \lfloor y^2 \rfloor$ 及 $G(y) = Q(y^2)$ 便如前述得到

$$Q(x) = \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \mu(d) \lfloor x/d^2 \rfloor \qquad (x \geqslant 1).$$

下述结论说明了用素数定理可以改进 (3.18) 中的余项估计.

定理 3.11 *在假设*

$$M(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)=o(x) \tag{3.21}$$

下, 有

$$Q(x)=\frac{6}{\pi^2}x+o(\sqrt{x})\qquad(x\to\infty). \tag{3.22}$$

证明 (3.20) 可写成

$$\mu^2=\lambda*\mathbf{1},$$

其中数论函数 λ 定义为

$$\lambda(n)=\begin{cases}\mu(d), & 若\ n=d^2,\\ 0, & 若\ n\ 不是平方数.\end{cases}$$

由双曲律, 对于 $1\leqslant y\leqslant x$ 有

$$\begin{aligned}Q(x)&=\sum_{d\leqslant\sqrt{x/y}}\mu(d)\left\lfloor\frac{x}{d^2}\right\rfloor+\sum_{m\leqslant y}M\Big(\sqrt{\frac{x}{m}}\Big)-\lfloor y\rfloor M\Big(\sqrt{\frac{x}{y}}\Big)\\&=\sum_{d\leqslant\sqrt{x/y}}\mu(d)\Big\{\frac{x}{d^2}+O(1)\Big\}+o_y(\sqrt{x})\\&=\frac{6x}{\pi^2}-x\int_{\sqrt{x/y}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}M(t)}{t^2}+O\Big(\sqrt{\frac{x}{y}}\Big)+o_y(\sqrt{x}).\end{aligned}$$

而当 $z\geqslant1$ 时有

$$\int_z^{\infty}\frac{\mathrm{d}M(t)}{t^2}=-\frac{M(z)}{z^2}+2\int_z^{\infty}\frac{M(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t=o\Big(\frac{1}{z}\Big)+\int_z^{\infty}o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\,\mathrm{d}t=o\Big(\frac{1}{z}\Big).$$

所以

$$Q(x)=\frac{6x}{\pi^2}+O\Big(\sqrt{\frac{x}{y}}\Big)+o_y(\sqrt{x}),$$

从而对任意固定的 $y\geqslant1$ 有

$$\limsup_{x\to\infty}|Q(x)-6x/\pi^2|/\sqrt{x}\ll1/\sqrt{y}.$$

令 y 趋于无穷便得到 (3.22). □

§3.8 取值在 [0, 1] 中的乘性函数之均阶

定理 3.10 说明了函数 $\mu(n)^2$ 的均阶是常数

$$\frac{6}{\pi^2}=\prod_p\left(1-1/p^2\right)=\prod_p(1-1/p)\left(1+\mu(p)^2/p\right).$$

我们说 $\mu(n)^2$ 具有均值 $6/\pi^2$. 容易构造数论函数 (甚至是取值在 $[0,1]$ 中的数论函数) 不具有均值. 例如令

$$f(n)=\begin{cases}1, & 若\ 2^{2k}<n\leqslant 2^{2k+1}\quad(k=0,1,\ldots),\\ 0, & 若\ 2^{2k+1}<n\leqslant 2^{2k+2}\quad(k=0,1,\ldots).\end{cases}$$

可断言

$$\liminf_{x\to\infty}x^{-1}\sum_{n\leqslant x}f(n)=\frac{1}{3},\qquad \limsup_{x\to\infty}x^{-1}\sum_{n\leqslant x}f(n)=\frac{2}{3}.$$

下述定理在乘性函数的情形解决了均值问题.

定理 3.12 设 f 是取值在 $[0,1]$ 中的乘性函数. 令

$$M(f):=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}.$$

倘若无穷级数发散, 则视其值为零. 这样

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)=x\{M(f)+o(1)\}\qquad(x\to\infty).\tag{3.23}$$

证明 对任意 $y>2$ 引进如下完全乘性函数 α_y 和 β_y:

$$\alpha_y(p)=\begin{cases}1, & 若\ p\leqslant y,\\ 0, & 若\ p>y,\end{cases}\qquad \beta_y(p)=\begin{cases}0, & 若\ p\leqslant y,\\ 1, & 若\ p>y.\end{cases}$$

容易验证, 对任意乘性函数 f, 有

$$f=f\alpha_y*f\beta_y.$$

倘若 f 取值在 $[0,1]$ 中, 上述等式推出

$$f\leqslant f_y:=f\alpha_y*\beta_y.$$

另外有 $\beta_y=\mathbf{1}*h_y$. 其中 $h_y:=\beta_y*\mu$ 满足

$$h_y(p^\nu)=\begin{cases}-1, & 若\ p\leqslant y\ 且\ \nu=1,\\ 0, & 若\ p>y\ 或\ \nu\geqslant 2.\end{cases}$$

特别地, 当 $n > N(y) := \prod_{p\leqslant y} p$ 时 $h_y(n) = 0$. 这说明当 x 趋于无穷时有

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\beta_y(n) = \frac{1}{x}\sum_{m\leqslant N(y)} h_y(m)\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor \to \sum_{m\geqslant 1}\frac{h_y(m)}{m} = \prod_{p\leqslant y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big).$$

这样, 对任意固定的 y, β_y 具有均值 $M(\beta_y)$. 而又有

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f_y(n) = \sum_{d\leqslant x}\frac{f(d)\alpha_y(d)}{d}\cdot\frac{d}{x}\sum_{m\leqslant x/d}\beta_y(m). \tag{3.24}$$

由于非负项级数

$$\sum_{d\geqslant 1}\frac{f(d)\alpha_y(d)}{d} = \prod_{p\leqslant y}\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}$$

收敛, 对 (3.24) 用控制收敛定理便知 f_y 具有均值

$$\sum_{d\geqslant 1}\frac{f(d)\alpha_y(d)}{d}M(\beta_y) = \prod_{p\leqslant y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu} = M(f_y).$$

这说明了对任意固定的 $y > 2$, 有

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n) \leqslant M(f_y) + o(1) \qquad (x\to\infty). \tag{3.25}$$

$M(f_y)$ 是关于 y 单调下降的函数. 若无穷乘积 $M(f)$ 发散, 当 $y\to\infty$ 时, 有 $M(f_y)\to 0$. 在此情形下 f 具有零均值. 若 $M(f)$ 收敛, 那么级数

$$\sum_p \frac{1-f(p)}{p}$$

也收敛. 从而对任意 $n\geqslant 1$ 有

$$\begin{aligned} f_y(n) - f(n) &= \prod_{p^\nu\| n, p\leqslant y} f(p^\nu) - \prod_{p^\nu\| n} f(p^\nu) \leqslant 1 - \prod_{p^\nu\| n, p>y} f(p^\nu) \\ &\leqslant \sum_{p^\nu\| n, p>y}(1-f(p^\nu)), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{n\leqslant x}\{f_y(n) - f(n)\} &\leqslant \sum_{p>y}\sum_{\nu\geqslant 1}\{1-f(p^\nu)\}\lfloor x/p^\nu\rfloor \\ &\leqslant x\Bigg\{\sum_{p>y}\frac{1-f(p)}{p} + \frac{1}{p(p-1)}\Bigg\} =: x\varepsilon(y), \end{aligned}$$

其中当 y 趋于无穷时 $\varepsilon(y)$ 趋于 0. 这样, 由 (3.25), 从上述估计出发, 依次令 x 和 y 趋于无穷便得到欲证的结论. □

注记

§3.2 对双曲律的解释由 Diamond (1982) 得出.

Voronoï 原来的证明是初等的, 用了 Euler-Maclaurin 求和公式. 另外两个 $\alpha \leqslant 1/3$ 的初等证明分别由 Landau (1912) 和 I.M. Vinogradov (1917) 得出. 前者应用了 Bessel 函数理论; 而后者仍基于 Euler-Maclaurin 求和公式, 在 Gelfond 和 Linnik (1965) 的书中有介绍. Huxley (2003) 细化了 Iwaniec 和 Mozzochi (1988) 的方法 ($\alpha \leqslant 7/22$) 得到上界估计 $\alpha \leqslant 131/416$, 改进了 Kolesnik (1985) 的结果 $\alpha \leqslant 139/429$. 就如先前关于该问题的结果那样, 从数值上讲改进并不大 ($139/429 \approx 0.324$, $131/416 \approx 0.315$), 然而从思想上讲却是重要的. Kolesnik 的方法是 van de Corput (1922) 方法在多变量情形的推广, 在第六章中将简略介绍, 而 Iwaniec 和 Mozzochi 则通过一个复杂的过程将问题化为一个双重指数和均值的上界估计, 其中用到 Bombieri 和 Iwaniec (1986) 方法的二维形式. 从中可得出 Riemann ζ-函数在临界线上值的上界估计: $|\zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t)| \ll_\varepsilon t^{9/56+\varepsilon}$. 在这个方向上最好的结果由 Huxley (2005) 得出, 他发展了上述方法, 得到

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right| \ll_\varepsilon t^{32/205+\varepsilon}.$$

$\Delta(x)$ 不是 $o(x^{1/4})$ 的事实由下列董光昌 (1956) 的平方均值估计立得:

$$\int_0^x \Delta(y)^2 \mathrm{d}y = \frac{\zeta(3/2)^4}{6\pi^2\zeta(3)}x^{3/2} + O(x(\ln x)^5).$$

§3.4 通过改进 Erdős 和 Shapiro (1951) 的一个结果, Montgomery (1987) 证明了

$$\lim\begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix}\left\{\sum_{n\leqslant x}\varphi(n) - \frac{3}{\pi^2}x^2\right\}\Big/ x\sqrt{\ln_2 x} \gtrless 0.$$

§3.6 定理 3.8 的证明基本上由 Diamond (1982) 得出. 其中 (ii) $\Rightarrow$ (i) 是关于有界变差函数的 Möbius 逆的一个一般结果的特殊情形, 见 Ellison 和 Mendès France (1975), 定理 3.1.

§3.7 定理 3.11 是 Landau (1909) 的结果. 目前 (3.22) 余项的最好估计是 Walfisz (1963) 的结果:

$$O\Big(\sqrt{x}\exp\Big\{-c\frac{(\ln x)^{3/5}}{(\ln_2 x)^{1/5}}\Big\}\Big).$$

在 Riemann 假设下, S. Graham (1981a) 改进了 Montgomery 和 Vaughan (1981) 的结果, 证明了可以得到

$$O_\varepsilon(x^{8/25+\varepsilon}).$$

之后贾朝华 (1993) 又将此改进为

$$O_\varepsilon(x^{17/54+\varepsilon}).$$

§3.8 引进函数 α_y 和 β_y 的方法至少可回溯到 20 世纪 30 年代 Erdős 的工作. Daboussi 卓越地应用了该方法. 特别地, 见 Daboussi (1979, 1984). 乘积 $M(f)$ 收敛的情形可推广为: 若 f 是复值乘性函数并使得

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{|f*\mu(n)|}{n}<\infty, \tag{3.26}$$

那么

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)=x\{M(f)+o(1)\},$$

其中乘积 $M(f)$ 如定理 3.12 中那样定义, 是绝对收敛的.

事实上, 若令 $h=f*\mu$, 对 $x\geqslant 1$, 由控制收敛定理得

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}f(n)=\frac{1}{x}\sum_{d\leqslant x}h(d)\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor\to\sum_{d\geqslant 1}\frac{h(d)}{d}\qquad(x\to+\infty).$$

容易验证由绝对收敛的假设可推出

$$\sum_{d\geqslant 1}\frac{h(d)}{d}=M(f).$$

从第二部分定理 1.3 中将看到假设 (3.26) 等价于

$$\sum_{p}\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{|f(p^\nu)-f(p^{\nu-1})|}{p^\nu}<\infty. \tag{3.27}$$

定理 3.12 中零均值的情形可用第三部分定理 3.5 来处理, 用这样的方法可给出实效上界.

习题

52. 证明 $\sum_{n\geqslant 1}1/n^2=\pi^2/6$:

(a) 通过对 $\langle t\rangle$ 的 Fourier 级数积分,

(b) 通过对 $(\operatorname{argth}x)/x$ 的 Taylor 级数积分 (用留数方法计算积分①).

53. 证明 $\sum_{n\leqslant x}2^{\omega(n)}=(6/\pi^2)x\ln x+O(x)$.

① 可见 Cartan (1961), 第 107~109 页

54. M. Nair 的一个结果[②].

(a) 证明 $2^{\omega(n)} = \sum_{d^2|n} \mu(d)\tau(n/d^2) \quad (n \geqslant 1)$.

(b) 从中得出 $\sum_{n\leqslant x} 2^{\omega(n)}$ 的余项为 $O(\sqrt{x}\ln x)$ 的渐近估计.

55. 确定数论函数 h 使得 $h * 2^{\omega} = \mu^2 2^{\omega}$.

(a) 证明对任意 $\varepsilon > 0$ 有 $\sum_{n>x} |h(n)| n^{-1} \ll_{\varepsilon} x^{-1/2+\varepsilon}$.

(b) 从中得出 $\sum_{n\leqslant x} \mu(n)^2 2^{\omega(n)} = Cx\ln x + O(x)$, 其中

$$C := \prod_p (1-1/p)^2 (1+2/p).$$

56. 证明

$$\sum_{n\leqslant x} 3^{\omega(n)} = \frac{1}{2} Cx(\ln x)^2 + O(x\ln x),$$

其中 C 是习题 55 中定义的常数. 推广之.

57. (a) 证明 $\sum_{n\leqslant x} 2^{\Omega(n)} = \sum_{k\leqslant \ln x/\ln 2} 2^k \sum_{m\leqslant x/2^k} f(m)$, 其中 f 是由 $f(p^\nu) := 0$ (若 $p=2$), $:= 2^\nu$ (若 $p \geqslant 3$) 定义的乘性函数.

(b) 通过确定使 $f = \tau * h$ 的函数 h, 证明 $\sum_{n\leqslant x} f(n) = \frac{1}{4} C_0 x\ln x + O(x)$, 其中 $C_0 = \prod_{p>2} \big(1 + 1/p(p-2)\big)$.

(c) 证明 $\sum_{n\leqslant x} 2^{\Omega(n)} = (C_0/8\ln 2)x(\ln x)^2 + O(x\ln x)$.

58. $3^{\Omega(n)}$ 的均值. 本习题中承认 Riemann ζ-函数的 Euler 公式 (II.1.6). 回顾 $\langle u\rangle$ 表示实数 u 的小数部分.

(a) 令

$$u := \frac{\ln(3/2)}{\ln 2}, \quad v := u+1 = \frac{\ln 3}{\ln 2}, \quad f(\vartheta) := \sum_{b\geqslant 0} 3^{-ub-\langle \vartheta - vb\rangle} \quad (\vartheta \in \mathbb{R}).$$

证明

$$\sum_{\substack{a\geqslant 0,\, b\geqslant 0\\ 2^a 3^b \leqslant z}} 3^{a+b} = \frac{3}{2} z^v f\left(\frac{\ln z}{\ln 2}\right) + O(z) \qquad (z \geqslant 1).$$

(b) 令 $A(x) := \sum_{n\leqslant x} 3^{\Omega(n)}$. 证明

$$A(x) = \sum_{\substack{m\leqslant x\\ (m,6)=1}} 3^{\Omega(m)} \sum_{\substack{a\geqslant 0,\, b\geqslant 0\\ 2^a 3^b \leqslant x/m}} 3^{a+b} \qquad (x \geqslant 1).$$

(c) 设 h 是由

$$h(p^\nu) := \begin{cases} 0, & 若\ p = 2\ 或\ 3\ 且\ \nu \geqslant 1, \\ 3^\nu, & 若\ p \geqslant 5 \end{cases}$$

定义的乘性函数. 证明对 $c \geqslant 1$, $x \geqslant 1$ 有

$$\sum_{\substack{m\leqslant x\\ (m,6)=1}} \frac{3^{\Omega(m)}}{m^c} = \sum_{m\leqslant x} \frac{h(m)}{m^c} \leqslant \prod_{5\leqslant p\leqslant x} \frac{1}{1-3/p^c} \tag{3.28}$$

② 源自私下交流.

并推出

$$\sum_{\substack{m\leqslant x\\(m,6)=1}}\frac{3^{\Omega(m)}}{m}\ll(\ln x)^3\qquad(x\geqslant 2).$$

(d) 利用不等式 $(1-3r)^{-1}\leqslant(1-r)^{-3}(1+8r^2)\quad(0\leqslant r\leqslant 1/5)$, 由 (3.28) 推出存在绝对常数 A 使得

$$\sum_{(m,6)=1}\frac{3^{\Omega(m)}}{m^c}\leqslant A\zeta(c)^3\qquad(c>1).$$

(e) 证明对任意 $\varepsilon\in]0,v-1[$ 及 $x\geqslant 2$ 有

$$\sum_{\substack{m>x\\(m,6)=1}}\frac{3^{\Omega(m)}}{m^v}\leqslant\sum_{(m,6)=1}\frac{3^{\Omega(m)}}{m^{1+\varepsilon}x^{v-1-\varepsilon}}\leqslant Ax^{1-v+\varepsilon}\zeta(1+\varepsilon)^3.$$

取 $\varepsilon:=1/\ln x$. 当 x 足够大时将得到什么结论?

(f) 证明对任意实数 ϑ, 级数

$$g(\vartheta):=\sum_{\substack{m\geqslant 1\\(m,6)=1}}\frac{3^{\Omega(m)}}{m^v}f\left(\vartheta-\frac{\ln m}{\ln 2}\right)$$

收敛. 利用 (a)—(d) 的结论证明

$$A(x)=\tfrac{3}{2}x^v g\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)+O(x(\ln x)^3)\qquad(x\geqslant 2).$$

59. 对 $r\in\mathbb{N}^*$ 及 $x>0$ 令 $S_r(x)$ 为满足 $1\leqslant a,b\leqslant x$ 及 $(a,b)=r$ 的整数对 $\{a,b\}$ 的个数.

(a) 证明

$$S_1(x)=\frac{6}{\pi^2}x^2+O(x\ln x).$$

(b) 给出 S_r 和 S_1 之间的一个简单关系.

(c) 从中得出

$$T(x):=\sum_{1\leqslant a,b\leqslant x}(a,b)=\frac{6}{\pi^2}x^2\ln x+O(x^2).$$

(d) 利用公式 $n=\sum_{d|x}\varphi(d)$ 证明

$$T(x)=x^2\sum_{d\leqslant x}\frac{\varphi(d)}{d^2}+O(x^2).$$

(e) 从中得出 $\sum_{d\leqslant x}\varphi(d)/d^2$ 的渐近公式.

60. Axer (1910) 定理. 设 $\lambda(x)$ 是有界函数, 且在任一有限区间 I 上变差 $V_\lambda(I)$ 有界. 令 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 为满足下列条件的实数列:

(i) $\sum_{n\leqslant x}|a_n| = O(x) \qquad (x\geqslant 1)$,

(ii) $A(x) := \sum_{n\leqslant x} a_n = o(x) \qquad (x\to\infty)$.

(a) 将和式 $S(x,y) := \sum_{n\leqslant y} a_n\lambda(x/n) \quad (x\geqslant 1,\ y\geqslant 1)$ 写成 Stieltjes 积分的形式. 证明

$$|S(x,x)-S(x,y)| \leqslant o(x) + V_\lambda([1,x/y]) \sup_{y<t\leqslant x}|A(t)| \qquad (1\leqslant y\leqslant x).$$

(b) 将上述结论应用于 $y=\varepsilon x$, 其中 ε 是任意小的正数, 证明 $S(x,x) = o(x) \quad (x\to\infty)$.

61. Axer 定理在素数定理中的应用. 令

$$M(x) := \sum_{n\leqslant x}\mu(n), \qquad m(x) := \sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}.$$

(a) 证明 $\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\lfloor x/n\rfloor = 1 \ (x\geqslant 1)$.

(b) 对 $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \{\mu(n)\}_{n=1}^\infty$ 及 $\lambda(x) = x-\lfloor x\rfloor$ 用习题 60 (b) 的结论, 证明若 $M(x)=o(x) \quad (x\to\infty)$, 则 $\lim_{x\to\infty} m(x) = 0$.

(c) 讨论其逆命题.

62. 承认素数定理, 证明

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p-1} = \ln x - \gamma + o(1).$$

63. 设 $A(n) := \sum_{p^\nu\|n}\nu p$ 为 Alladi 和 Erdős (1977, 1979) 函数. 承认素数定理, 证明:

$$\sum_{n\leqslant x}A(n) \sim \frac{\pi^2}{12}\frac{x^2}{\ln x} \qquad (x\to+\infty).$$

利用素数定理的加强形式 (例如第二部分定理 4.1), 确定上述估计的余项.

64. (a) 设 f 为满足

$$\sum_p\sum_{\nu\geqslant 2}\frac{|f(p^\nu)|}{p^\nu} < \infty$$

的加性函数. 证明

$$\sum_{n\leqslant x}f(n) = \sum_{p\leqslant x}f(p)\left\{\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x}{p^2}\right\rfloor\right\} + O(x). \tag{3.29}$$

(b) 应用: 令 f 为由 $f(p^\nu) = (\nu\ln p)^2$ 定义的加性函数. 给出 (3.29) 左边当 $x\to\infty$ 时余项与主项之比 $\ll 1/\ln x$ 的渐近公式.

65. 固定实数 $\alpha > 0$.

(a) 当 $x \to \infty$ 时渐近地计算表达式

$$T_\alpha(x) := \sum_{p \leqslant x} p^\alpha$$

使得余项为 $O(x^{1+\alpha}/(\ln x)^2)$.

(b) 令 f_α 为使得 $f_\alpha(p) := p^\alpha$ 的强加性函数. 渐近地计算和函数 $S_\alpha(x) := \sum_{n \leqslant x} f_\alpha(n)$ 并使余项为 $O(x^{1+\alpha}/(\ln x)^2)$. 可使用 Dirichlet 双曲律.

66. 设 f 为使得 $f * \mu \geqslant 0$ 的乘性函数. 证明对任意 $x \geqslant 1$ 有

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) \leqslant x \prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}.$$

67. 对任意 $\alpha > 0, t \geqslant 1$, 令 $f_\alpha(n) := (n/\varphi(n))^\alpha$ 及

$$F_x(t) := \left|\{n \leqslant x \ : \ n > t\varphi(n)\}\right|.$$

(a) 选取适当的 $\alpha = \alpha(t)$ 并对 f_α 应用习题 66 的结论, 证明存在绝对正常数 c 使得

$$F_x(t) \ll x \exp\{-\mathrm{e}^{ct}\} \qquad (x \geqslant 1,\ t \geqslant 1).$$

(b) 证明对任意固定的 $\alpha > 0$ 及 $\varepsilon > 0$ 有

$$\sum_{n \leqslant x} \left(\frac{n}{\varphi(n)}\right)^\alpha = x \prod_p \left(1 + \frac{f_\alpha(p) - 1}{p}\right) + O(x^\varepsilon).$$

68. Farey序列, 1. 令 $N \geqslant 1$, $\mathcal{F}_N$ 为 N 阶 Farey 列并令 a/b 和 a'/b' 为 $\mathcal{F}_N$ 中相继的两个数.

(a) 证明方程 $bu - av = 1$ 有使 $u \geqslant 1$ 及 $N - b < v \leqslant N$ 的整数解 u 和 v. 推出 $u/v \in \mathcal{F}_N$, $u/v > a/b$.

(b) 证明 $u/v \neq a'/b'$ 蕴涵 $u/v - a'/b' \geqslant 1/vb'$ 并从中得出 $u/v - a/b > N/bb'v$. 证明该不等式不能成立, 从而得出 $a'/b' = u/v$.

(c) 应用: 确定 $\frac{4}{9}$ 在 $\mathcal{F}_{13}$ 中的后继元.

69. Farey 序列, 2. 设 $\mathcal{F}_N$ 是 N 阶 Farey 列且 a/b, a''/b'', a'/b' 为 $\mathcal{F}_N$ 中相继的三个数. 证明

$$\frac{a''}{b''} = \frac{a + a'}{b + b'}.$$

70. 满平方数[3]. 令 $S := \{n \geqslant 1 \ : \ p \mid n \Rightarrow p^2 \mid n\}$, $S(x) := \left|S \cap [1, x]\right|$.

(a) 估计 $\sum_{n \leqslant x, n \in S} \sqrt{x/n}$ 并证明

$$S(x) \ll \sqrt{x} \ln x.$$

③ 此处作者新造了法文单词“carru”来翻译英文“squarefull”一词.

(b) 证明 S 中的元素 n 可唯一地写成 $n = m^3 d^2$ 的形式, 其中 m 无平方因子, 并由此得出④

$$S(x) \sim \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)}\sqrt{x}.$$

71. 整数的核. 令 $k(n) := \prod_{p|n} p$ 为正整数 n 的无平方因子核.

(a) 从定理 3.12 中得出 $\sum_{n\leqslant x} k(n)/n \sim Cx$, 其中

$$C := \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p(p+1)}\Big).$$

(b) 利用习题 70 (b) 的结论, 证明

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{k(n)}{n} = Cx + O(\sqrt{x}).$$

(c) 证明⑤

$$\sum_{n\leqslant x} k(n) = \tfrac{1}{2}Cx^2 + O(x^{3/2}).$$

72. 证明存在正常数 A 使得

$$\sum_{n\leqslant x} \omega\big(\tau(n)\big) = Ax + O\Big(\frac{x}{\ln x}\Big),$$

并得出估计 $\sum_{n\leqslant x} \Omega\big(\tau(n)\big) = x\ln_2 x + O(x)$. ⑥

73. 证明素数定理蕴涵

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t) - t}{t^2}\,\mathrm{d}t = -1 - \gamma.$$

74. 令 $\lambda(n) := (-1)^{\Omega(n)}$ 为 Liouville 函数, 其中 $\Omega(n)$ 是 n 的计重数下素因子个数.

(a) 证明 $\lambda = \mu * \kappa$, 其中 κ 是平方数集的示性函数.

(b) 证明素数定理等价于

$$\sum_{n\leqslant x} \lambda(n) = o(x) \qquad (x \to \infty).$$

75. Selberg 恒等式 (1949).

定义数论函数 $\Lambda_2 := (\ln)^2 * \mu = \Lambda * \Lambda + \Lambda \ln$.

(a) 证明对任意素数 p, q, $p \neq q$ 以及任意整数 $\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 1$, 有 $\Lambda_2(p^\alpha) = (2\alpha - 1)(\ln p)^2$, $\Lambda_2(p^\alpha q^\beta) = 2\ln p \ln q$, 并且当 $\omega(n) > 2$ 时 $\Lambda_2(n) = 0$.

---

④更精确的结果可见 Suryanarayana 和 Sitaramachandra (1973).

⑤ 又见 Cohen (1960, 1964).

⑥见 Rieger (1972), Heppner (1974).

(b) 证明 $\sum_{n\leqslant x}\Lambda_2(n)=\sum_{p\leqslant x}(\ln p)^2+\sum_{pq\leqslant x}\ln p\ln q+O(x)$.

(c) 证明 $\sum_{n\leqslant x}\tau*\mathbf{1}(n)=\frac{1}{2}x(\ln x)^2+ax\ln x+bx+O\big(x^{2/3}\ln(2x)\big)$, 其中 a 和 b 是两个实常数；并得出, 对适当的常数 A 和 B, 函数 $h:=2\tau*\mathbf{1}+A\tau+B\mathbf{1}-(\ln)^2$ 具有使得 $H(x)\ll x^{3/4}$ 的和函数 H.

(d) 证明 $\sum_{n\leqslant x}\Lambda_2(n)=2x\ln x+O(x)$. ⑦

76. 设 g 是取值在单位圆盘上的复值乘性函数. 令 $S(n):=\sum_{d|n}g(d)$. 证明均值

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}|S(n)/\tau(n)|^2$$

存在并可写成 Euler 乘积的形式, 并由此得出

$$\sum_p\frac{1-\Re e\,g(p)}{p}=\infty$$

的充要条件是对几乎所有的整数 n 有 $S(n)=o\big(\tau(n)\big)$, 也就是说, 存在函数 $\varepsilon(x)$ 使得 $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon(x)=0$, 且

$$\big|\{n\leqslant x\ :\ |S(n)|>\varepsilon(x)\tau(n)\}\big|=o(x)\qquad(x\to\infty).$$

⑦ Selberg 从该式得出了素数定理的一个初等证明. 这样的推理在更一般的框架下仍成立, 见 Shapiro (1959).

第四章　筛法

§4.1　Ératosthène 筛法

从理论上讲, 容斥原理或 Möbius 反转公式可用来计算 $\pi(x)$. 设 x 足够大并令

$$P = \prod_{p \leqslant \sqrt{x}} p,$$

那么满足 $\sqrt{x} < n \leqslant x$ 的整数 n 是素数的充要条件是 $(n, P) = 1$. 从而

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1 = \sum_{n \leqslant x} \delta\big((n, P)\big) = \sum_{d \mid P} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor. \tag{4.1}$$

若用 $x/d + O(1)$ 来估计 $\lfloor x/d \rfloor$, 便得到

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1 = x \prod_{p \leqslant \sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + O\Big(2^{\pi(\sqrt{x})}\Big).$$

由 Mertens 公式, 上述估计的主项等于 $\{2\mathrm{e}^{-\gamma} + o(1)\} x / \ln x$. 然而由 Tchébychev 估计知, 其余项大于任意 x 的幂.

以上讨论说明了两个问题. 一方面, 等式 (4.1) (也叫作 Ératosthène 筛法公式) 含有太多的项而不具有实用价值; 另一方面, 由后面的素数定理, 上述主项的估计说明了将 $\lfloor x/d \rfloor$ 换成 x/d 而导致的 "余项" 其实在整体上与 "主项" 具有相同的阶. 这暗示了即使作适当的修正, 用上述方法也不能证明素数定理. 然而下面将会看到, 在相当一般的情形下, 该方法可得到一些 Tchébychev 型估计.

为从 (4.1) 得到非平凡的结论, 须引入一个参数 y, $1 \leqslant y \leqslant x$, 并用不超过 x 且不含有不大于 y 的素因子的整数 n 的个数来估计 $\pi(x)-\pi(y)+1$. 由如上计算得到

$$\pi(x) \leqslant x\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)+O(2^y)=x\frac{\mathrm{e}^{-\gamma}+o(1)}{\ln y}+O(2^y)\leqslant\{\mathrm{e}^{-\gamma}+o(1)\}\frac{x}{\ln_2 x},$$

其中参数 $y=\ln x$ 基本上是最优的.

为改进上述方法, 挪威数学家 Viggo Brun 在 1917 年到 1924 年之间发明了组合筛法理论.

§4.2　Brun 组合筛法

Ératosthène 筛法基于恒等式

$$\mu * \mathbf{1} = \delta.$$

Brun 的想法是引入两个辅助函数 μ_1 和 μ_2, 使得

$$\mu_1 * \mathbf{1} \leqslant \delta \leqslant \mu_2 * \mathbf{1}, \tag{4.2}$$

并且常取零值以使类似 (4.1) 的公式不至于有太多项. 以下定理是 Brun 最初的结论, 在文献中常称为纯粹 Brun 筛法.

定理 4.1 (Brun)　令 χ_t 为使得 $\omega(n)\leqslant t$ 的整数 n 之集的示性函数. 那么对任意整数 $h \geqslant 0$, 函数对

$$\mu_i(n) := \mu(n)\chi_{2h+2-i}(n) \qquad (i=1,2) \tag{4.3}$$

满足不等式 (4.2).

证明　由于 $\mu_i*\mathbf{1}(n)$ 的值仅依赖于 n 的无平方因子核, 只须考虑 $\mu(n)^2=1$ 的情形. 若 $\omega(n)=k$, 那么对任意整数 r, $0\leqslant r\leqslant k$, n 恰有 $\binom{k}{r}$ 个因子 d 使得 $\omega(d)=r$. 从而对任意 $t\geqslant 0$, 有

$$\mu\chi_t * \mathbf{1}(n) = \sum_{d|n,\, \omega(d)\leqslant t}\mu(d)=\sum_{r\leqslant t}(-1)^r\binom{k}{r}=(-1)^t\binom{k-1}{t}.$$

其中对 t 用归纳法易得最后一个等式. □

推论 4.2　设 $\mathcal{A}$ 为整数的有限集, $\mathcal{P}$ 为素数类. 令

$$A_d := \left|\{a\in\mathcal{A} : a\equiv 0 \,(\operatorname{mod} d)\}\right|,$$

$$P(y) := \prod_{p\in\mathcal{P},\, p\leqslant y} p,$$

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},y) := \left|\{a\in\mathcal{A} : (a,P(y))=1\}\right|.$$

那么对任意整数 $h \geqslant 0$, 有

$$\sum_{\substack{d|P(y)\\ \omega(d)\leqslant 2h+1}} \mu(d)A_d \leqslant S(\mathcal{A},\mathcal{P},y) \leqslant \sum_{\substack{d|P(y)\\ \omega(d)\leqslant 2h}} \mu(d)A_d. \tag{4.4}$$

下面将看到该结果可大幅改进 Ératosthène 筛法中 $\pi(x)$ 的上界估计.

在上述推论中令 $\mathcal{A}=\{n : n\leqslant x\}$ 并令 $\mathcal{P}=\mathbb{P}$ 为所有素数之集, 得

$$\begin{aligned}\pi(x) &\leqslant \sum_{\substack{d|P(y)\\ \omega(d)\leqslant 2h}} \mu(d)\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor + y = x\sum_{\substack{d|P(y)\\ \omega(d)\leqslant 2h}}\frac{\mu(d)}{d} + O\Bigg(y+\sum_{\substack{d|P(y)\\ \omega(d)\leqslant 2h}}1\Bigg)\\ &= x\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)+O\Bigg(y+\sum_{\substack{d|P(y)\\ \omega(d)\leqslant 2h}}1 + x\sum_{\substack{d|P(y)\\ \omega(d)>2h}}\frac{1}{d}\Bigg).\end{aligned} \tag{4.5}$$

余项的第二项等于整除 $P(y)$ 且满足 $\omega(d)\leqslant 2h$ 的正整数 d 的个数, 它不超过 y^{2h}. 对任意参数 $u\geqslant 1$, 余项第三部分中对 d 的和不超过

$$\sum_{d|P(y)}\frac{u^{\omega(d)-2h}}{d} = u^{-2h}\prod_{p\leqslant y}\left(1+\frac{u}{p}\right)\leqslant \exp\Big\{-2h\ln u + u\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}\Big\}.$$

取最优参数 $u=2h\Big/\sum_{p\leqslant y}p^{-1}$, 由定理 1.10 得该和式的估计

$$\ll_u (\ln y)^{-v},$$

其中 $v = u\ln u - u$. 当 $u>5$ 时 $v>3$. 容易知道, 当 y 足够大时, 存在 $u=u(y)$, $5<u<6$, 使得

$$h := \frac{1}{2}u\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}$$

是整数. 在此情形下, 当 x 大到满足

$$y\leqslant x^{1/(10\ln_2 x)} =: Y(x) \tag{4.6}$$

时有

$$y^{2h}\leqslant y^{6\ln_2 y+O(1)} < x^{2/3}.$$

综上估计, 当取 $y=Y(x)$ 时, 有

$$\pi(x)\ll \frac{x\ln_2 x}{\ln x}.$$

尽管弱于 Tchébychev 估计, 该结论的优势在于其方法具有一般性. 同样可得 $S(\mathcal{A},\mathcal{P},y)$ 的下界估计. $S(\mathcal{A},\mathcal{P},y)$ 具有如下内蕴的算术意义: 它等于不超过 x 且各素因子均大于 y 的正整数的个数. 对任意整数 $n\geqslant 1$, 用 $P^-(n)$ 表示 n 最小的素因子, 并约定 $P^-(1)=+\infty$. 令

$$\Phi(x,y) := \big|\{n\leqslant x : P^-(n)>y\}\big|. \tag{4.7}$$

定理 4.3 在条件 (4.6) 下有

$$\Phi(x,y)=x\prod_{p\leqslant y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big\{1+O\Big(\frac{1}{(\ln y)^2}\Big)\Big\}. \tag{4.8}$$

(4.3) 中函数 μ_1 和 μ_2 的选择并非最佳. 利用更复杂的技巧可细化此方法. 引进区间 $]1,y]$ 的剖分 $]y_j,y_{j+1}]$, $0\leqslant j\leqslant k$, 并对 $i=1,2$ 取

$$\mu_i(d)=\mu(d)\chi_i^*(d),$$

其中 χ_i^* 是对任意 j, $0\leqslant j\leqslant k$, 在 $\mathcal{P}\cap]y_j,y]$ 中至多有 $2h_j+2-i$ 个相异素因子的整数之集的示性函数 (见习题 86). 这样就需要优化两组参数 y_j 和 h_j.

篇幅有限, 不能详述仍在不断发展的组合筛法之全貌. 感兴趣的读者可参阅 Halberstam 和 Richert 的教材 Sieve Methods (1974), 亦可参考本章的注记.

在此仅描述由前面选择的 $\mu_i(d)$ 而得的如下基本结论. 通常在文献中不另行说明时, "Brun 方法" 便指该定理.

定理 4.4 (组合筛法基本引理) 在推论 4.2 的记号下, 假设存在乘性函数 $w\geqslant 0$, 实数 X 及正常数 κ 和 A, 使得

(a) $A_d:=Xw(d)/d+R_d \qquad (d\mid P(y))$,

(b) $\displaystyle\prod_{\eta\leqslant p\leqslant\xi}\Big(1-\frac{w(p)}{p}\Big)^{-1}<\Big(\frac{\ln\xi}{\ln\eta}\Big)^{\kappa}\Big(1+\frac{A}{\ln\eta}\Big) \qquad (2\leqslant\eta\leqslant\xi)$,

那么对 $\mathcal{A}$, X, y 及 $u\geqslant 1$ 一致地有

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},y)=X\prod_{p\leqslant y,\,p\in\mathcal{P}}\Big(1-\frac{w(p)}{p}\Big)\{1+O(u^{-u/2})\}+O\Big(\sum_{d\leqslant y^u,\,d\mid P(y)}|R_d|\Big). \tag{4.9}$$

从中容易得到 $\pi(x)$ 的 Tchébychev 型估计, 以及 $\Phi(x,y)$ 对 $y\leqslant x^\delta$ 的阶的估计, 其中 δ 是固定的正常数. 细节留给读者.

目前组合筛法最好的结果是 Iwaniec (1980a,b) 得出的.

§4.3 在孪生素数问题中的应用

本节将介绍上节 Brun 定理应用于孪生素数问题而得的结论.

显然相邻两个奇素数之差不小于 2. 若其差等于 2, 则称该素数对为孪生的. 例如 $\{3,5\}$, $\{5,7\}$, $\{11,13\}$, $\{17,19\}$, $\{29,31\}$, 等等. 著名的孪生素数猜想断言孪生素数对的个数无限.

令

$$\mathcal{J}:=\{p:p+2\text{ 为素数}\}\quad\text{及}\quad J(x)=|\mathcal{J}\cap[1,x]|.$$

从解析方法的角度, Hardy 和 Littlewood (1922) 猜想

$$J(x) \sim 2\prod_{p>2}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big)\frac{x}{(\ln x)^2} \qquad (x\to\infty), \tag{4.10}$$

这与概率上的计算尝试一致. 用纯粹 Brun 方法, 可得以下估计.

定理 4.5 (Brun) 当 x 趋于无穷时,

$$J(x) \ll x\Big(\frac{\ln_2 x}{\ln x}\Big)^2. \tag{4.11}$$

推论 4.6

$$\sum_{p\in\mathcal{J}}\frac{1}{p} < \infty. \tag{4.12}$$

证明 应用推论 4.2 于

$$\mathcal{A} = \{m(m+2) : m \leqslant x\}$$

并取 $\mathcal{P}$ 为所有素数之集. 对任意 y, $1 \leqslant y \leqslant x$, 有

$$J(x) \leqslant S(\mathcal{A},\mathcal{P},y) + y \leqslant \sum_{\substack{d\mid P(y)\\ \omega(d)\leqslant 2h}} \mu(d)A_d + y, \tag{4.13}$$

其中 A_d 是关于 $m \leqslant x$ 的同余方程

$$m(m+2) \equiv 0 \pmod d \tag{4.14}$$

正整数解的个数.

该方程等价于

$$m \equiv 0 \pmod{2^\nu}, \quad m \equiv 0 \text{ 或 } -2 \pmod p \quad (p \mid d,\ p \neq 2), \tag{4.15}$$

其中 ν 根据 d 的奇偶性分别取 0 或 1. 由中国剩余定理, 有 $\varrho(d)$ 个模 d 剩余类是方程的解, 其中 ϱ 是满足如下条件的强乘性函数:

$$\varrho(2) = 1, \quad \varrho(p) = 2 \qquad (p \geqslant 3). \tag{4.16}$$

每个长为 d 的区间均含有 $\varrho(d)$ 个 A_d 中的整数, 从而

$$A_d = x\frac{\varrho(d)}{d} + O(\varrho(d)) \qquad (\mu(d)^2 = 1). \tag{4.17}$$

代入 (4.13) 并作与 (4.5) 类似的运算, 得

$$J(x) \leqslant x\sum_{d\mid P(y)}\frac{\mu(d)\varrho(d)}{d} + O\Big(y + \sum_{\substack{d\mid P(y)\\ \omega(d)\leqslant 2h}}\varrho(d) + x\sum_{\substack{d\mid P(y)\\ \omega(d)>2h}}\frac{\varrho(d)}{d}\Big), \tag{4.18}$$

其主项等于

$$\frac{1}{2}x\prod_{2<p\leqslant y}\left(1-\frac{2}{p}\right)\leqslant 2x\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\sim 2\mathrm{e}^{-2\gamma}x(\ln y)^{-2}.$$

如 §4.2 中那样取 $h=c\ln_2 y+O(1)$, 其中 c 是适当的常数; 并对足够小的 c' 令

$$\ln y\sim c'\ln x/\ln_2 x$$

可验证余项的阶不超过 $x/(\ln y)^2$. 这推出 (4.11), 从而证明了定理. 用 Abel 求和法易得推论. □

§4.4 大筛法的解析形式

大筛法是解析数论中最强有力的工具之一. 它由 Linnik 于 1941 年创立, 进而从基础理论和算术应用两个方面系统地发展.

读者可参阅 Bombieri (1974) 中对该理论给出的详尽介绍以及完备的参考文献表, 亦可参考 Montgomery (1978a) 的综论. 这里只提醒读者, 现在的大筛法最关键的部分是由 Rényi (1950), Roth (1965) 及 Bombieri (1965) 发展的. 其最优的版本则是 Montgomery 和 Vaughan (1973, 1974) 的结果.

Davenport 和 Halberstam (1966) 最先将解析形式从大筛法中分离出来. 令 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为复数列, $M,N\geqslant 0$ 为任意整数. 令

$$S(\alpha):=\sum_{M<n\leqslant M+N}a_n\mathrm{e}(\alpha n)\tag{4.19}$$

为三角多项式, 其中 $\mathrm{e}(u):=\exp\{2\pi iu\}$ $(u\in\mathbb{R})$. 大筛法的解析形式是指形如下式的不等式:

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant R}|S(\alpha_i)|^2\leqslant\Delta(N,\delta)\sum_{M<n\leqslant M+N}|a_n|^2,\tag{4.20}$$

其中 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_R\}$ 是任意满足条件

$$\min_{1\leqslant i<j\leqslant R}\|\alpha_j-\alpha_i\|\geqslant\delta>0\tag{4.21}$$

的实数组, $\|u\|$ 表示实数 u 到整数集的距离. 本节的目的是证明如下最优的结论.

定理 4.7 (Montgomery 和 Vaughan; Selberg) 在上述条件下, 大筛法不等式 (4.20) 对于

$$\Delta(N,\delta)=N+\delta^{-1}-1\tag{4.22}$$

成立.

这里将采用的 Selberg 的证明来自 Montgomery (1987a) 的文章. Montgomery 和 Vaughan 于 1974 年得到的 $\Delta(N,\delta)$ 的值要稍弱一些: $\Delta = N+1/\delta$. 而形如 $\Delta \ll N+1/\delta$ 的上界估计已经够用. 从这个角度来说 Selberg 的改进并不重要, 是其论证方式促使了我们在书中采取他的证明.

注意到适当选取 α_i, N 及 δ 可取到 (4.22) 中的值. 事实上, 若对整数 $R \geqslant 1$ 取 $\alpha_j = j/R$ $(1 \leqslant j \leqslant R)$ 及 $\delta = 1/R$, 并对 $N \equiv 1 \pmod R$ 考虑 $a_n := \mathbf{1}_{\mathbb{N}}(n/R)$ $(0 \leqslant n < N)$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant j\leqslant R}|S(\alpha_j)|^2 &= \sum_{1\leqslant j\leqslant R}\Big|\sum_{\substack{0\leqslant n\leqslant N-1\\ n\equiv 0 \pmod R}}1\Big|^2 = R\Big(\frac{N-1}{R}+1\Big)^2\\ &= (N-1+R)\Big(1+\frac{N-1}{R}\Big) = \Big(N-1+\frac{1}{\delta}\Big)\cdot\sum_{0\leqslant n<N}|a_n|^2.\end{aligned}$$

定理 4.7 的证明归结为一个一般的对偶原则: Banach 空间上的算子与其对偶算子具有相同的范数. 这里只须考虑 $\ell^2(\mathbb{C})$ 到自身的算子, 此时该对偶法则具有如下简单形式.

引理 4.8 *设 (c_{nr}) 是复系数 $N\times R$ 矩阵. 以下关于正实数 D 的三个命题等价:*

(i) $\displaystyle\sum_r\Big|\sum_n c_{nr}x_n\Big|^2 \leqslant D\sum_n|x_n|^2 \qquad (\forall x_n\in\mathbb{C})$,

(ii) $\displaystyle\Big|\sum_{n,r}c_{nr}y_rx_n\Big|^2 \leqslant D\sum_n|x_n|^2\sum_r|y_r|^2 \qquad (\forall x_n, y_r\in\mathbb{C})$,

(iii) $\displaystyle\sum_n\Big|\sum_r c_{nr}y_r\Big|^2 \leqslant D\sum_r|y_r|^2 \qquad (\forall y_r\in\mathbb{C})$.

证明 只证明 (i) 与 (ii) 等价. 交换 r 和 n 便得到 (ii) 与 (iii) 的等价性.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): 有

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n,r}c_{nr}y_rx_n\Big|^2 &= \Big|\sum_r y_r\sum_n c_{nr}x_n\Big|^2\\ &\leqslant \Big(\sum_r|y_r|^2\Big)\Big(\sum_r\Big|\sum_n c_{nr}x_n\Big|^2\Big) \leqslant D\sum_n|x_n|^2\sum_r|y_r|^2,\end{aligned}$$

第一个不等号来自 Cauchy-Schwarz 不等式.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): 对每个 r, 令 $L_r := \sum_n c_{nr}x_n$. 对 $y_r = \overline{L}_r$, 用 (ii) 便得

$$\Big(\sum_r|L_r|^2\Big)^2 \leqslant D\sum_n|x_n|^2\sum_r|L_r|^2,$$

即 (i). □

今后总采用 (4.19) 中的记号. 下述结论是引理 4.8 的直接推论.

引理 4.9 设 α_r $(1 \leqslant r \leqslant R)$ 为固定的实数. 以下关于实数列 $b_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{Z})$, $b_n > 0$ $(M < n \leqslant M+N)$ 以及正实数 B 的两个命题等价:

(i) $\displaystyle\sum_{1\leqslant r\leqslant R} |S(\alpha_r)|^2 \leqslant B \sum_{M<n\leqslant M+N} |a_n|^2/b_n \qquad (\forall\, a_n \in \mathbb{C})$,

(ii) $\displaystyle\sum_{M<n\leqslant M+n} b_n \Big| \sum_{1\leqslant r\leqslant R} y_r \mathrm{e}(n\alpha_r)\Big|^2 \leqslant B \sum_{1\leqslant r\leqslant R} |y_r|^2 \quad (\forall\, y_r \in \mathbb{C})$.

证明 对 $c_{nr} = \mathrm{e}(n\alpha_r)\sqrt{b_n}$ 用引理 4.8. 将 a_n 换成 $a_n\sqrt{b_n}$ 后, 命题 (i) 等价于

$$\sum_{1\leqslant r\leqslant R}\Big|\sum_{M<n\leqslant M+N} a_n\sqrt{b_n}\,\mathrm{e}(\alpha_r n)\Big|^2 \leqslant B \sum_{M<n\leqslant M+N} |a_n|^2 \qquad (\forall\, a_n \in \mathbb{C}).$$

利用引理 4.8 中 (i) 和 (iii) 的等价性知, 上述条件等价于

$$\sum_{M<n\leqslant M+N}\Big|\sum_{1\leqslant r\leqslant R} y_r \mathrm{e}(n\alpha_r)\sqrt{b_n}\Big|^2 \leqslant B \sum_{1\leqslant r\leqslant R} |y_r|^2 \quad (\forall\, y_r \in \mathbb{C}),$$

此即是要证的结论. □

推论 4.10 设 $B(\alpha) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \mathrm{e}(n\alpha)$ 是收敛的 Fourier 级数, 其中 $b_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{Z})$, $b_n > 0$ $(M < n \leqslant M+N)$. 那么, 对任意正实数 B, 命题

(i) $\displaystyle\sum_{1\leqslant r\leqslant R} |S(\alpha_r)|^2 \leqslant B \sum_{M<n\leqslant M+N} |a_n|^2/b_n \qquad (\forall\, a_n \in \mathbb{C})$

是

(ii) $\displaystyle\sum_{1\leqslant r,s\leqslant R} y_r \overline{y}_s B(\alpha_r - \alpha_s) \leqslant B \sum_{1\leqslant r\leqslant R} |y_r|^2 \qquad (\forall\, y_r \in \mathbb{C})$

的必要条件.

证明 将 $B(\alpha_r - \alpha_s)$ 级数展开并交换求和号, 可知 (ii) 等价于引理 4.9 的第二个不等式 (对 n 的求和扩展到了 $\mathbb{Z}$ 上). 由于对任意 n, $b_n \geqslant 0$, 立得要证的结论. □

为使推论 4.10 中的条件成立, 显然只须令

(a) $b_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{Z})$, $b_n \geqslant 1$ $(M < n \leqslant M+N)$,

(b) $B(\alpha) = 0$ $(\|\alpha\| \geqslant \delta)$,

其中 δ 的定义见 (4.21). 为方便计, 这里设 $0 < \delta < \frac{1}{2}$, 取极限后可得 $\delta = \frac{1}{2}$ 的情形 (仅当 $R = 2$ 时可能取到). 当条件 (a) 和 (b) 均满足时, 推论 4.10 的命题 (i) 蕴涵了大筛法不等式 (4.20) 对于

$$\Delta(N, \delta) = B(0) \tag{4.23}$$

成立.

本节余下的部分将确定 $B(\alpha)$ 的 Fourier 系数 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 一个适当的选择.

自然地希望将 b_n 表示为一个函数 $b \in L^1(\mathbb{R})$ 在点 n 处的值, 这里 b 的 Fourier 变换

$$\widehat{b}(\vartheta) := \int_{-\infty}^{+\infty} b(t)\mathrm{e}(-\vartheta t)\,\mathrm{d}t$$

的支集包含于 $[-\delta, \delta]$. 条件 (b) 由 Poisson 求和公式

$$B(\alpha) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} b(n)\mathrm{e}(\alpha n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{b}(k-\alpha) \tag{4.24}$$

可得.

为说明 Poisson 求和公式在上述条件下成立, 可先从 $\widehat{b} \in L^1(\mathbb{R})$ 的事实推出如下积分公式 (见 Katznelson (1968) 第 126 页):

$$b(t) = \int_{-\delta}^{\delta} \widehat{b}(\vartheta)\mathrm{e}(\vartheta t)\,\mathrm{d}\vartheta. \tag{4.25}$$

特别地, $b(n)$ 是连续的周期函数 $\beta(\alpha) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{b}(k-\alpha)$ 的 Fourier 系数. 而对于 $N \geqslant 1$, $|\alpha| \leqslant \frac{1}{2}$, 从 (4.25) 中得出

$$\begin{aligned} \sum_{|n|\leqslant N} b(n)\mathrm{e}(\alpha n) &- \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} b(t)\mathrm{e}(\alpha t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\delta+\alpha}^{\delta+\alpha} \lambda_\alpha(\vartheta)\sin\{(2N+1)\pi\vartheta\}\,\mathrm{d}\vartheta, \end{aligned} \tag{4.26}$$

其中

$$\lambda_\alpha(\vartheta) := \widehat{b}(\vartheta-\alpha)\Big\{\frac{1}{\sin(\pi\vartheta)} - \frac{1}{\pi\vartheta}\Big\}.$$

由于 $|\pm\delta+\alpha| < 1$ (这里用到了 $\delta < \frac{1}{2}$ 的假设), 有 $\lambda_\alpha \in L^1([-\delta+\alpha, \delta+\alpha])$. 由 Riemann-Lebesgue 引理, 当 $N \to \infty$, 上面最后一个对 ϑ 的积分趋于 0. 而 $b \in L^1(\mathbb{R})$, 这说明了级数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} b(n)\mathrm{e}(\alpha n)$$

对称地收敛于 $\widehat{b}(-\alpha) = \beta(\alpha)$. 这对于 $|\alpha| \leqslant \frac{1}{2}$ 证明了 (4.24). 一般情形由周期性立得.

于是只要找到可积函数 b, 使得

$$B(0) = \widehat{b}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.27}$$

的值在约束条件

$$\begin{cases} b(t) \geqslant 0, & \text{若 } t \in \mathbb{R}, \\ b(t) \geqslant 1, & \text{若 } M+1 \leqslant t \leqslant M+N, \\ \widehat{b}(\vartheta) = 0, & \text{若 } |\vartheta| \geqslant \delta \end{cases} \tag{4.28}$$

下尽可能小.

由 Fejér 核容易得到一种可能的选择. 对于

$$b(t) := C \sum_{\delta(M+1)\leqslant n\leqslant\delta(M+N)} \Big(\frac{\sin(\frac{1}{2}\pi(n-\delta t))}{\frac{1}{2}\pi(n-\delta t)}\Big)^2$$

有

$$\widehat{b}(\vartheta) = \frac{2C}{\delta}(1-|\vartheta/\delta|)^+ \sum_{\delta(M+1)\leqslant n\leqslant\delta(M+N)} \mathrm{e}(-n\vartheta/\delta),$$

从而条件 (4.28) 对 $C=\frac{1}{4}\pi^2$ 成立. 此时有

$$\widehat{b}(0) \leqslant \tfrac{1}{2}\pi^2(N-1+1/\delta).$$

这对绝大部分应用足矣. Selberg 指出, 下述引理给出了 $b(t)$ 的一个最佳选择.

引理 4.11 令

$$F(z) := \Big(\frac{\sin(\pi z)}{\pi}\Big)^2\Big\{\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(z-n)^2} - \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(z+n)^2} + \frac{2}{z}\Big\}.$$

那么 F 是关于 z 的整函数, 且满足

$$F(z) \ll \mathrm{e}^{2\pi|\Im m\, z|}, \quad F(x) \geqslant \operatorname{sgn}(x) \ (x\in\mathbb{R}), \quad F(0)=1,$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{F(x)-\operatorname{sgn}(x)\}\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4.29}$$

注 由 (4.29) 知 $F \notin L^1(\mathbb{R})$. 然而 $F(z)$ 的上界估计可解释成在某种意义下 $\widehat{F}(\vartheta)=0$ 对于 $|\vartheta|\geqslant 1$ 成立. 例如, 对 $T>0$ 考虑函数 $F_T(x) := \frac{1}{2}\{F(T+x)+F(T-x)\}$. 那么 $F_T \in L^1(\mathbb{R})$ 对任意 $T>0$成立; 并且 Vaaler (1985) 证明了

$$\widehat{F}_T(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2\pi T|\vartheta|)}{\pi} + (1-|\vartheta|)\dfrac{\sin\{\pi\vartheta(2T+1)\}}{\sin(\pi\vartheta)}, & 若\ |\vartheta|\leqslant 1, \\ 0, & 若\ |\vartheta|>1, \end{cases}$$

其中 $\widehat{F}_T(\vartheta) := \int_{\mathbb{R}} F_T(x)\mathrm{e}(\vartheta x)\,\mathrm{d}x$ 是 F_T 的 Fourier 变换.

证明 前两个断言是显然的: 设 $z=x+\mathrm{i}y$, 那么对 $|y|\geqslant 1$ 有 $|z\pm n|^2 \geqslant 1+(|x|-n)^2$ $(n\geqslant 0)$. 为证明第三个断言, 先引入 Euler 公式

$$\Big(\frac{\sin(\pi z)}{\pi}\Big)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = 1 \qquad (z\in\mathbb{C}).$$

注意到对 $x > 0$, 有

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(x+n)^2}\leqslant\sum_{n\geqslant 1}\int_{x+n-1}^{x+n}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\frac{1}{x}=\sum_{n\geqslant 0}\int_{x+n}^{x+n+1}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\leqslant\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(x+n)^2}.$$

这说明对 $x > 0$ 有

$$F(x)=\Big(\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\Big)^2\Big\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-n)^2}-2\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(x+n)^2}+\frac{2}{x}\Big\}\geqslant 1;$$

且对 $x < 0$, 令 $y = -x$ 后有

$$F(x)=\Big(\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\Big)^2\Big\{-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-n)^2}+2\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(y+n)^2}-\frac{2}{y}\Big\}\geqslant -1.$$

最后

$$F(0)=\lim_{z\to 0}\Big(\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}\Big)^2=1\geqslant 0=\operatorname{sgn}(0).$$

下证 (4.29):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\{F(x)-\operatorname{sgn}(x)\}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\infty}\{F(x)-1\}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}\{F(-y)+1\}\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\infty}\{F(x)+F(-x)\}\,\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\infty}\Big(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\Big)^2\mathrm{d}x=1.\end{aligned}$$

□

定理 4.7 的证明 令

$$b(t):=\tfrac{1}{2}\big\{F\big(\delta(t-M-1)\big)+F\big(\delta(M+N-t)\big)\big\}. \tag{4.30}$$

那么 $b(t)$ 满足 (4.28) 的第一个条件. 而 (4.29) 推出 b 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}b(t)\,\mathrm{d}t=N-1+\frac{1}{\delta}. \tag{4.31}$$

事实上, 这是对 $t\neq M+1,\ M+N$ 成立的等式

$$\begin{aligned}b(t)=\mathbf{1}_{[M+1,M+N]}(t)&+\tfrac{1}{2}\big\{F\big(\delta(t-M-1)\big)-\operatorname{sgn}\big(\delta(t-M-1)\big)\big\}\\&+\tfrac{1}{2}\big\{F\big(\delta(M+N-t)\big)-\operatorname{sgn}\big(\delta(M+N-t)\big)\big\}\end{aligned}$$

的直接推论. 另外, 由引理 4.11, 有

$$b(z)\ll \mathrm{e}^{2\pi\delta|\Im m\, z|}\qquad (z\in\mathbb{C}). \tag{4.32}$$

特别地, b 在 $\mathbb{R}$ 上有界. 由 $b\in L^1(\mathbb{R})$ 知, $b\in L^2(\mathbb{R})$. 根据 Paley-Wiener 定理①, 有

$$\widehat{b}(\vartheta)=0\qquad (|\vartheta|\geqslant\delta).$$

定理 4.7 得证. □

① 可见 Katznelson (1968) 第 176 页定理 7.4.

§4.5 大筛法的算术形式

设 $\{a_n\}_{n=M+1}^{M+N}$ 为复数列, 且

$$S(\alpha) := \sum_{M<n\leqslant M+N} a_n \mathrm{e}(n\alpha).$$

以下将定理 4.7 应用于 α_r 为形如 a/q 的有理数的情形, 其中 $(a,q)=1$, $q\leqslant Q$. 显然对 $r\neq s$ 有

$$\|\alpha_r-\alpha_s\| = \|a/q-a'/q'\| = \|(aq'-a'q)/qq'\| \geqslant 1/Q^2.$$

这说明 α_r 是 $1/Q^2$-良分布的. 于是有

$$\sum_{q\leqslant Q}\sum_{1\leqslant a\leqslant q,\,(a,q)=1}|S(a/q)|^2 \leqslant (N-1+Q^2)\sum_{M<n\leqslant M+N}|a_n|^2. \tag{4.33}$$

该不等式的意义在于, 可用 q 的某个显式函数对其内部的和式行下界估计. 该函数与不含使 $a_n\neq 0$ 的 n 的模 p 剩余类个数 $w(p)$ 有关, 其中 $p\mid q$. 确切地说, 对素数 p 令

$$w(p) := \big|\{h\ :\ 0\leqslant h<p,\ n\equiv h\,(\mathrm{mod}\,p)\ \Rightarrow\ a_n=0\}\big| \tag{4.34}$$

及

$$g(q) := \mu(q)^2\prod_{p\mid q}\frac{w(p)}{p-w(p)} \tag{4.35}$$

(不妨设对任意 p 有 $w(p)<p$, 否则 $a_n\equiv 0$).

以下是大筛法算术形式的基本定理.

定理 4.12 如前述记号, 对 $q\geqslant 1$, 有

$$\Big|\sum_{M<n\leqslant M+N} a_n\Big|^2 g(q) \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}|S(a/q)|^2. \tag{4.36}$$

推论 4.13 (算术大筛法) 对任意复数列 $\{a_n\}_{M+1}^{M+N}$ 及整数 $Q\geqslant 1$, 有

$$\Big|\sum_{M<n\leqslant M+N} a_n\Big|^2 \leqslant \frac{N-1+Q^2}{L}\sum_{M<n\leqslant M+N}|a_n|^2, \tag{4.37}$$

其中

$$L := \sum_{q\leqslant Q} g(q), \tag{4.38}$$

$g(q)$ 的定义见 (4.34) 及 (4.35).

定理 4.12 的证明 须证对任意序列 $\{a_n\}$ 有

$$|S(0)|^2 g(q) \leqslant \sum_{1\leqslant a\leqslant q,\,(a,q)=1} |S(a/q)|^2. \tag{4.39}$$

将 a_n 换成 $a_n\mathrm{e}(n\beta)$ 后并不改变 $w(p)$ 的值, 故 (4.39) 等价于

$$|S(\beta)|^2 g(q) \leqslant \sum_{1\leqslant a\leqslant q,\,(a,q)=1} |S(a/q+\beta)|^2 \qquad (\beta\in\mathbb{R}). \tag{4.40}$$

假设(4.40) 对满足 $(q,q')=1$ 的 q 和 q' 成立, 由中国剩余定理,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leqslant c\leqslant qq'\\(c,qq')=1}} |S(c/qq')|^2 &= \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\sum_{\substack{1\leqslant b\leqslant q'\\(b,q')=1}} |S(a/q+b/q')|^2\\ &\geqslant \sum_{1\leqslant a\leqslant q,\,(a,q)=1} |S(a/q)|^2 g(q') \geqslant |S(0)|^2 g(q)g(q').\end{aligned}$$

由于 g 是乘性的, (4.39) (进而 (4.40)) 对 qq' 成立. 而当 q 含平方因子时, $g(q)=0$. 故只须对 q 是素数的情形证明(4.39).

对任意素数 p, 有

(4.41)

$$\begin{aligned}|S(0)|^2+\sum_{1\leqslant a<p}|S(a/p)|^2 &= \sum_{0\leqslant a,a'<p}\frac{S(a/p)\overline{S(a'/p)}}{p}\sum_{0\leqslant h<p}\mathrm{e}((a-a')h/p)\\ &= \frac{1}{p}\sum_{0\leqslant h<p}\Big|\sum_{0\leqslant a<p}\mathrm{e}(-ah/p)S(a/p)\Big|^2\\ &= \frac{1}{p}\sum_{0\leqslant h<p}\Big|\sum_{n}a_n\sum_{0\leqslant a<p}\mathrm{e}(a(n-h)/p)\Big|^2\\ &= p\sum_{0\leqslant h<p}|S(p,h)|^2,\end{aligned}$$

其中

$$S(p,h):=\sum_{\substack{M<n\leqslant M+N\\ n\equiv h\ (\mathrm{mod}\ p)}} a_n.$$

注意到由定义 $S(p,h)$ 可知, 至少在 $w(p)$ 个 h 的模 p 剩余类上取零值. 由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$|S(0)|^2 = \Big|\sum_{0\leqslant h<p}S(p,h)\Big|^2 \leqslant \{p-w(p)\}\sum_{0\leqslant h<p}|S(p,h)|^2,$$

从而由 (4.41) 知,

$$\sum_{1\leqslant a<p}|S(a/p)|^2=p\sum_{0\leqslant h<p}|S(p,h)|^2-|S(0)|^2$$
$$\geqslant\Big(\frac{p}{p-w(p)}-1\Big)|S(0)|^2=g(p)|S(0)|^2.$$

这对 $q=p$ 证明了 (4.39), 故而定理得证. □

由等式 $S(0)=\sum_{0\leqslant h<p}S(p,h)$ 知,

$$p\sum_{0\leqslant h<p}\Big|S(p,h)-\frac{1}{p}S(0)\Big|^2=p\sum_{0\leqslant h<p}|S(p,h)|^2-|S(0)|^2,$$

从而由 (4.41) 推知,

$$p\sum_{0\leqslant h<p}\Big|S(p,h)-\frac{1}{p}S(0)\Big|^2=\sum_{0\leqslant a<p}|S(a/p)|^2.$$

由 (4.33) 便得到如下结论.

定理 4.14 沿用上述记号, 有

$$\sum_{p\leqslant Q}p\sum_{0\leqslant h<p}\Big|S(p,h)-\frac{1}{p}S(0)\Big|^2\leqslant(N-1+Q^2)\sum_{M<n\leqslant M+N}|a_n|^2. \tag{4.42}$$

(4.42) 是大筛法不等式 (4.33) 的弱形式, 仅对 q 为素数时的贡献作上界估计. 然而该结论在实际应用中甚为有效, 见注记. 另外可将其推广到相对于合数的同余类情形. Montgomery (1968) 证明了, 若 q 无平方因子, 那么

$$q\sum_{0\leqslant h<q}\Big|\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}S(q/d,h)\Big|^2=\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}|S(a/q)|^2.$$

代入 (4.33) 便得到对于 d 整除 q 以及 $h\in[0,q-1]$ 平均地来说 $S(q/d,h)$ 接近 $(d/q)S(0)$.

§4.6 大筛法的应用

与 Brun 方法相比, 大筛法提供了不超过 x 的孪生素数个数 $J(x)$ 更为精确且实效的上界估计.

定理 4.15 当 x 趋于无穷时, 有

$$J(x)\leqslant\{8C+o(1)\}x/(\ln x)^2, \tag{4.43}$$

其中

$$C := 2\prod_{p\geqslant 3}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big). \tag{4.44}$$

渐近地讲, 该估计等于 $J(x)$ 猜想值的 8 倍. 对其改进的文献见注记.

证明 令 $\varepsilon > 0$. 当 $P^-(n(n+2)) > Q$ 时令 $a_n := 1$, 否则令 $a_n := 0$. 对 $N = \lfloor x \rfloor$, $Q = x^{1/2-\varepsilon}$ 及 a_n 应用 (4.37), 得

$$J(x) - J(\sqrt{x}) \leqslant \{1+o(1)\}x/L, \tag{4.45}$$

其中 L 由 (4.38) 中取 $w(2) = 1$, $w(p) = 2$ $(p \geqslant 3)$ 而定义. 此时有 $g(q) = 2^\omega * h(q)/q$, 其中 h 是如下定义的乘性函数:

$$h(2) = 0, \quad h(2^\nu) = 2(-1)^{\nu-1} \quad (\nu \geqslant 2),$$
$$h(p) = \frac{4}{p-2} \quad (p>2), \quad h(p^\nu) = \frac{2(-1)^{\nu-1}(p+2)}{p-2} \quad (p>2,\ \nu\geqslant 2).$$

容易验证级数 $\sum_{d\geqslant 1} h(d)/d^\sigma$ 在 $\sigma > \frac{1}{2}$ 上绝对收敛. 这样

$$\sum_{q\leqslant y} g(q) = \sum_{md\leqslant y}\frac{h(d)}{d}\frac{2^{\omega(m)}}{m} \sim \frac{3}{\pi^2}(\ln y)^2\sum_{d\geqslant 1}\frac{h(d)}{d} \qquad (y\to\infty),$$

其中对 m 求和的估计是通过对以下估计式作分部积分而得:

$$\sum_{m\leqslant y} 2^{\omega(m)} = \sum_{m\leqslant y} \mathbf{1} * \mu^2(m) \sim \frac{6}{\pi^2} y \ln y.$$

从 (4.45) 得到

$$J(x) \leqslant \frac{\{2C+o(1)\}x}{(\ln\sqrt{x})^2},$$

其中

$$\begin{aligned} C &= \frac{\pi^2}{6}\Big(\sum_{d\geqslant 1}\frac{h(d)}{d}\Big)^{-1} \\ &= \prod_p (1-p^{-2})^{-1}\frac{3}{2}\prod_{p\geqslant 3}\Big(1+\frac{4}{p(p-2)}-\frac{2(p+2)}{p^2(p-2)(1+p^{-1})}\Big)^{-1} \\ &= 2\prod_{p\geqslant 3}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big), \end{aligned}$$

从而命题得证. □

第二个应用是关于算术数列中素数分布的. 令

$$\pi(x;a,q) := \left|\{p \leqslant x \ : \ p \equiv a \ (\mathrm{mod}\ q)\}\right|,$$

除非 a 的模 q 剩余类是 $\varphi(q)$ 个可逆类之一, 函数 $\pi(x;a,q)$ 有界. 从而可自然地猜测在关于 q 和 x 相对值的一些条件成立的前提下有

$$\pi(x;a,q) \sim \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \sim \frac{x}{\varphi(q)\ln x}.$$

在第二部分中将证明 q 固定 (Dirichlet 定理), 以及 $q \leqslant (\ln x)^c$ (Siegel-Walfisz 定理) 的情形. 由大筛法可得同类型的上界估计对 "小区间" 情形也成立.

定理 4.16 (Brun-Titchmarsh) *设 x 和 y 是正实数, q, a 是整数. 若 $y/q \to \infty$, 有*

$$\pi(x+y;a,q) - \pi(x;a,q) \leqslant \frac{\{2+o(1)\}y}{\varphi(q)\ln(y/q)}. \tag{4.46}$$

证明 (4.46) 的左边不超过

$$\sum_n a_n + \pi(\sqrt{y/q}), \tag{4.47}$$

其中 $x < a+nq \leqslant x+y$ 且 $P^-(a+qn) > \sqrt{y/q}$ 时 $a_n := 1$, 否则 $a_n := 0$. (4.47) 的第二项可并入 (4.46) 的余项中. 用大筛法定理的记号, 有 $N \leqslant y/q+1$, 且对使得 $p \leqslant \sqrt{y/q}$ 及 $p \nmid q$ 的素数 p 有 $w(p) \geqslant 1$. 于是得到, 对任意 $Q \leqslant \sqrt{y/q}$, 有

$$\sum_n a_n \leqslant \frac{y/q + Q^2}{L}, \tag{4.48}$$

其中

$$L := \sum_{m \leqslant Q,\,(m,q)=1} \mu(m)^2 \prod_{p|m} \frac{1}{p-1} = \sum_{m \leqslant Q,\,(m,q)=1} \frac{\mu(m)^2}{\varphi(m)}.$$

注意到任意整数 $n \leqslant Q$ 可唯一地分解成 $n = mdt$ 的形式, 其中 $(m,q) = 1$, $\mu(m)^2 = 1$, $d \mid m^\infty$, $t \mid q^\infty$. 故有

$$\sum_{n \leqslant Q} \frac{1}{n} \leqslant \sum_{m \leqslant Q,\,(m,q)=1} \frac{\mu(m)^2}{m} \sum_{d|m^\infty} \frac{1}{d} \sum_{t|q^\infty} \frac{1}{t} = \sum_{m \leqslant Q,\,(m,q)=1} \frac{\mu(m)^2}{m} \frac{m}{\varphi(m)} \frac{q}{\varphi(q)},$$

从而

$$L \geqslant \frac{\varphi(q)}{q} \ln Q,$$

代入 (4.48) 并取 $Q = \sqrt{y/q}\Big/\ln(y/q)$ 便得题设结论. □

§4.7 Selberg 筛法

§4.7.1 简介

Selberg 于 1947 年创造的筛法基于二次型一个优美的优化估计. 相对于 20 世纪 20 年代的 Brun 筛法来说它有三重优点: 理论上较为简明, 技巧上更为灵活, 估计上更加精细 (至少在实际应用中如此).

在大筛法创立并完善的时期, Selberg 方法因其可筛选一个任意数列 (而非仅考虑某区间中的整数) 的特性而得以应用. 在某些情形, 如孪生素数 问题, 它可以得到较好的常数. 从 20 世纪 70 年代中期起, 人们曾认为, 在区间情形, 这两种方法基本等价 (见 Huxley (1972b), Kobayashi (1973)) 而大筛法则基于更深刻的对偶原则. 这是 Elliott (1977) 佳作的基本观点.

从 20 世纪 80 年代起, Rosser-Iwaniec 筛法 (具体见注记) 被认为是筛法的极致. 除了在余项处理上更为灵活外, 在最好的情形下它可在上界估计主项中渐近地有一个常数因子的改进.

近来 Goldston, Pintz 和 Yıldırım (2006) 在素数小差距问题上的重大进展使 Selberg 筛法重现光芒.

在此详述这些重要工作就与我们所讲内容偏离得太远了. 我们决定通过以下不甚为人所知的角度来介绍 Selberg 筛法: 用所有素数的幂来筛的可能性. 这归结为单变元或多变元乘性函数概念的一个内蕴延伸.

读者可参考 Halberstam 和 Richert (1974), 以及 Greaves (2001) 的著作, 其中有对 Selberg 方法经典形式的详尽介绍, 特别是本书中未涉及的下界估计的可能性.

§4.7.2 多变元数论函数

第二章中引入的传统乘性函数的概念有许多不便之处: 其一是当改变 Dirichlet 级数 Euler 乘积形式的有限多个因子中有限多项后一般不能保持乘性; 其二是多元推广并不显然.

Selberg 于 1977 年发表的一篇论文中提出了一个新的定义, 克服了这两个不便之处.

定义 4.17 *r 元数论函数 $f:(\mathbb{N}^*)^r\to\mathbb{C}$ 称为是 (Selberg 意义下) 乘性的, 如果其形式 Dirichlet 级数*

$$F(s_1,\ldots,s_r):=\sum_{n_1\geqslant 1,\ldots,n_r\geqslant 1}\frac{f(n_1,\ldots,n_r)}{n_1^{s_1}\cdots n_r^{s_r}}$$

可表示为乘积

$$F(s_1,\ldots,s_r)=\prod_p F_p(p^{-s_1},\ldots,p^{-s_r}),\tag{4.49}$$

其中 F_p 是 r 元幂级数

$$F_p(X_1,\ldots,X_r) := \sum_{\nu_1\geqslant 0,\ldots,\nu_r\geqslant 0} f_p(\nu_1,\ldots,\nu_r)X_1^{\nu_1}\cdots X_r^{\nu_r}$$

使得除了有限个 p 以外均有 $F_p(0,\ldots,0)=1$.

若 $f(1,\ldots,1)=0$, 称 f 是奇异的, 否则称之为正则的, 若 $f(1,\ldots,1)=1$, 称 f 是正规的.

在且仅在本节中, 所谓乘性函数, 无论是一元或是多元的, 均指 Selberg 意义下的乘性函数.

条件 (4.49) 等价于

$$f(n_1,\ldots,n_r)=\prod_p f_p(v_p(n_1),\ldots,v_p(n_r)), \tag{4.50}$$

其中 v_p 是 p 进赋值, 且除了有限个素数 p 外有 $f_p(0,\ldots,0)=1$.

在单变元情形, 传统的乘性函数类等同于 Selberg 意义下的正规乘性函数类, 从而新的概念确是原有概念的推广. 若 f 是正规乘性函数, 那么对任意 $k\in\mathbb{N}^*$, $n\mapsto f(kn)$ 是乘性函数.

以下仅讨论二元乘性函数.

§4.7.3 广义卷积

定义 4.18 若二元乘性函数 f 满足 $f(m,n)=f(n,m)$, 则称之为对称的. 若当 $n>m$ 时有 $f(m,n)=0$, 则称之为下三角的; 倘若它还满足 $f(m,m)=1$ $(\forall m\in\mathbb{N}^*)$, 称之为正规下三角的.

设 t 是正规下三角数论函数, 对任意固定的整数 $m\geqslant 1$, 线性方程组②

$$\sum_{n\leqslant k\leqslant m} t(k,n)x_k=\delta_{mn}\qquad (1\leqslant n\leqslant m)$$

是上三角的, 从而是 Cramér 的③. 用

$$x_k=t^*(m,k)\qquad (1\leqslant k\leqslant m)$$

表示它的解. 这样

$$\sum_{n\leqslant k\leqslant m} t^*(m,k)t(k,n)=\delta_{mn}\qquad (1\leqslant n\leqslant m). \tag{4.51}$$

② 这里及下文中均采用 Kronecker 记号: 若 $m=n$, $\delta_{mn}:=1$, 否则 $\delta_{mn}:=0$.
③ 亦即线性方程组对应的矩阵可逆. —— 译者注

该式说明, 对任意整数 $q \geqslant 1$, 下三角阵 $T_q^* := (t^*(j,k))_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant q}$ 及 $T_q := (t(r,s))_{1\leqslant s\leqslant r\leqslant q}$ 互逆, 取转置后得到对偶的等式

$$\sum_{n\leqslant k\leqslant m} t(m,k)t^*(k,n) = \delta_{mn} \qquad (1\leqslant n\leqslant m). \tag{4.52}$$

这样的两个正规下三角数论函数便称为是互逆的.

由上述可重新得到经典 Dirichlet 卷积逆的概念 (见 §2.4). 令 $t(m,n) := h(m/n)$, $t^*(m,n) := h^*(m/n)$, 其中 h 和 h^* 是一元数论函数. 这里约定当 m/n 不是整数时等式右端为零. 令 $m = Nn$ 并在 (4.52) 中作变量替换 $k = dn$, 便得到

$$\sum_{d|N} h^*(d)h(N/d) = \delta_{1N} = \delta(N) \qquad (N\in\mathbb{N}^*).$$

在新的框架下得到的反转公式推广了第二章中由 Dirichlet 卷积得出的公式.

性质 4.19 *设 t 是二元正规下三角数论函数.*

(i) *若 f 和 g 是一元数论函数, 满足*

$$f(m) = \sum_{1\leqslant n\leqslant m} t(m,n)g(n) \qquad (m\in\mathbb{N}^*), \tag{4.53}$$

那么

$$g(m) = \sum_{1\leqslant n\leqslant m} t^*(m,n)f(n) \qquad (m\in\mathbb{N}^*); \tag{4.54}$$

(ii) *若 f 和 g 是一元数论函数, 满足*

$$f(n) = \sum_{m\geqslant n} t(m,n)g(m) \qquad (n\in\mathbb{N}^*), \tag{4.55}$$

并假定上述级数对每个 n 均绝对收敛, 那么等式

$$g(n) = \sum_{m\geqslant n} t^*(m,n)f(m) \qquad (n\in\mathbb{N}^*) \tag{4.56}$$

在右边级数对任意 n 均一致收敛的前提下成立.

证明 将等式

$$f(n) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} t(n,k)g(k)$$

代入 (4.54) 的右边并交换和号就得到 (4.54). 类似地可从 (4.55) 推出 (4.56). 对右端的级数作截断来处理收敛性的问题, 具体细节略去. □

t 是乘性函数的情形有特别的实用意义.

性质 4.20 若 $t:(\mathbb{N}^*)^2\to\mathbb{C}$ 为正规下三角乘性函数, 那么其逆 t^* 亦然.

证明 形式幂级数 $T_p(X,Y):=1+\sum\limits_{\substack{0\leqslant\nu\leqslant\mu\\(\mu,\nu)\neq(0,0)}}t(p^\mu,p^\nu)X^\mu Y^\nu$ 可逆. 对任意素数 p, 有

$$T_p(X,Y)^{-1}=\sum_{j\geqslant0}(-1)^j\Big\{\sum_{\substack{0\leqslant\nu\leqslant\mu\\(\mu,\nu)\neq(0,0)}}t(p^\mu,p^\nu)X^\mu Y^\nu\Big\}^j$$
$$=1+\sum_{\substack{0\leqslant\nu\leqslant\mu\\(\mu,\nu)\neq(0,0)}}t^*(p^\mu,p^\nu)X^\mu Y^\nu,$$

其中 $t^*(1,1)=1$, 且对 $0\leqslant\nu\leqslant\mu$, $(\mu,\nu)\neq(0,0)$, 有

$$t^*(p^\mu,p^\nu)=\sum_{1\leqslant j\leqslant\nu}(-1)^j\sum_{\substack{\mu_1+\cdots+\mu_j=\mu\\\nu_1+\cdots+\nu_j=\nu}}\prod_{1\leqslant s\leqslant j}t(p^{\mu_s},p^{\nu_s}).$$

如上式确定的正规下三角乘性函数 t^* 即是 t 的逆. □

注意到若 t 是正规下三角函数, 那么仅当 $n\mid m$ 时 $t(m,n)$ 才有可能非零. 下述结果是性质 4.19 的一个相当有用的特例.

性质 4.21 设 t 是二元正规下三角乘性函数.

(i) 若 f 和 g 是一元数论函数, 满足

$$f(m)=\sum_{d\mid m}t(m,d)g(d)\qquad(m\in\mathbb{N}^*),\tag{4.57}$$

那么

$$g(m)=\sum_{d\mid m}t^*(m,d)f(d)\qquad(m\in\mathbb{N}^*).\tag{4.58}$$

(ii) 设 f 和 g 是一元数论函数, 满足

$$f(n)=\sum_{m\equiv0\,(\operatorname{mod}n)}t(m,n)g(m)\qquad(n\in\mathbb{N}^*),\tag{4.59}$$

并假设上述级数对每个 n 均绝对收敛, 那么等式

$$g(n)=\sum_{m\equiv0\,(\operatorname{mod}n)}t^*(m,n)f(m)\qquad(n\in\mathbb{N}^*)\tag{4.60}$$

在右边级数对任意 n 均绝对收敛的前提下成立.

固定整数 $k \geqslant 1$. 以下是正规下三角乘性函数对 (t, t^*) 的一个例子:

$$t(m,n) := \tau((m/n,k))\mathbf{1}_{\mathbb{N}}(m/n) \qquad (m,n \in \mathbb{N}^*).$$

令 $\kappa_p := v_p(k)$. 于是对任意素数 p, 有

$$\sum_{0\leqslant\nu\leqslant\mu} t_p(\mu,\nu)X^\mu Y^\nu = \frac{1-X^{\kappa_p+1}}{(1-X)^2(1-XY)}.$$

这样

$$t_p^*(\mu,\nu) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \mu=\nu=0, \\ -1, & \text{若 } \mu=1, \nu\in\{0,1\}, \kappa_p=0, \\ 1, & \text{若 } \mu=2, \nu=1, \kappa_p=0, \\ 1, & \text{若 } \mu\equiv 0 \text{ 或 } 2 \pmod{\kappa_p+1}, \nu=0, \kappa_p\geqslant 1, \\ -2, & \text{若 } \mu\equiv 1 \pmod{\kappa_p+1}, \nu=0, \kappa_p\geqslant 1, \\ -1, & \text{若 } \mu\equiv 1 \text{ 或 } 3 \pmod{\kappa_p+1}, \nu=1, \kappa_p\geqslant 1, \\ 2, & \text{若 } \mu\equiv 2 \pmod{\kappa_p+1}, \nu=1, \kappa_p\geqslant 1, \\ 0, & \text{若以上皆非.} \end{cases}$$

§4.7.4 二次型

用 $\ell_0(\mathbb{R})$ 表示从某项起恒零的序列之集.

定义 4.22 若对称数论函数 $f : (\mathbb{N}^*)^2 \to \mathbb{R}$ 使得二次型

$$Q(\boldsymbol{x}) := \sum_{m\geqslant 1,\, n\geqslant 1} f(m,n)x_m x_n \tag{4.61}$$

对任意 $\ell_0(\mathbb{R})$ 中的非零实序列 $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ 均取正值, 则称之为正定的.

显然若 f 正定, 则对任意整数 $N \geqslant 1$, 矩阵

$$F_N := (f(m,n))_{1\leqslant m,n\leqslant N}$$

对称、可逆, 且各特征值均为正数. 由经典的矩阵三角分解 (可参见 Gantmacher (1966) § 2.4) 可将 F_N 写成 TD^tT 的形式, 其中 T 是下三角阵, 其主对角线上元素均为 1, D 是对角阵, ${}^tT$ 是 T 的转置. 另外, 满足这些条件的 D 和 T 还是唯一的. 这样便可将 f 表示成

$$f(m,n) = \sum_{1\leqslant k\leqslant \min(m,n)} g(k)t(m,k)t(n,k), \tag{4.62}$$

其中 t 是正规下三角函数, g 取正值.

当 f 是乘性函数时, 上式有更为简单的形式.

性质 4.23 设 f 是二元正定乘性函数, 那么存在乘性函数 $g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}_+^*$ 以及正规下三角乘性函数 $t:(\mathbb{N}^*)^2\to\mathbb{R}$, 使得

$$f(m,n)=\sum_{d|(m,n)}g(d)t(m,d)t(n,d)\qquad(m,n\in\mathbb{N}^*). \tag{4.63}$$

另外, 满足上式的 g 和 t 是唯一的.

证明 对任意素数 p, $\mathbb{N}^2$ 上的函数 $f_p(\mu,\nu):=f(p^\mu,p^\nu)$ 正定. 从而存在分别是一元和二元的乘性函数 g_p 和 t_p, 使得 t_p 正规下三角, 且

$$f(p^\mu,p^\nu)=\sum_{0\leqslant\kappa\leqslant\min(\mu,\nu)}g_p(\kappa)t_p(\mu,\kappa)t_p(\nu,\kappa). \tag{4.64}$$

对 p 求积并如 (4.50) 定义 g 和 t 便得到 (4.63). 然后从 (4.62) 的唯一性就推出题设结论. □

现在来解决一个与二次型有关的带约束的最优化问题. 这里只考虑乘性函数的情形, 读者可自行得出一般情形.

定理 4.24 设 f 是二元正定乘性函数, $N\in\mathbb{N}^*$, g 和 t 是 (4.63) 中定义的乘性函数, 那么在约束条件 $x_1=1$ 及 $n>N\Rightarrow x_n=0$ 下, 二次型 (4.61) 取到其最小值

$$Q^*:=\Big\{\sum_{m\leqslant N}t^*(m,1)^2/g(m)\Big\}^{-1}. \tag{4.65}$$

对应的最值点是

$$x_n:=Q^*\sum_{1\leqslant m\leqslant N}t^*(m,n)t^*(m,1)/g(m)\qquad(1\leqslant n\leqslant N). \tag{4.66}$$

证明 令

$$y_d:=\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant N\\ m\equiv0\,(\mathrm{mod}\,d)}}t(m,d)x_m\qquad(d\geqslant1);$$

当 $d>N$ 时令 $y_d=0$. 将 (4.63) 代入 (4.61), 得

$$Q(x)=\sum_{1\leqslant d\leqslant N}g(d)y_d^2, \tag{4.67}$$

且由性质 4.21 (ii) 得

$$x_d=\sum_{m\equiv0\,(\mathrm{mod}\,d)}t^*(m,d)y_m\qquad(1\leqslant d\leqslant N). \tag{4.68}$$

特别地, 条件 $x_1 = 1$ 可写成

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant N} t^*(m,1) y_m = 1.$$

这样, 对任意实数 λ,

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{x}) &= \lambda + \sum_{1 \leqslant d \leqslant N} \left\{ \sqrt{g(d)} y_d - \lambda \frac{t^*(d,1)}{2\sqrt{g(d)}} \right\}^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 \sum_{1 \leqslant d \leqslant N} \frac{t^*(d,1)^2}{g(d)} \\ &\geqslant \lambda - \frac{1}{4}\lambda^2 \sum_{1 \leqslant d \leqslant N} \frac{t^*(d,1)^2}{g(d)} = \lambda - \frac{\lambda^2}{4Q^*}. \end{aligned}$$

右端对于 $\lambda = 2Q^*$ 取到最大值. 于是有 $Q(\boldsymbol{x}) \geqslant Q^*$. 当 $y_d = \lambda t^*(d,1)/2g(d)$ $(1 \leqslant d \leqslant N)$ 时等号成立. 由 (4.68) 便得 (4.66). □

§4.7.5 Johnsen-Selberg 指数筛法

对任意素数的幂 p^ν $(\nu \geqslant 1)$, 令 $\mathcal{W}(p^\nu)$ 为模 p^ν 的一些剩余类构成的集合, 并将之等同于这些剩余类在 $\mathbb{Z}$ 中代表元之集. 假设当 $\mu \neq \nu$ 时有 $\mathcal{W}(p^\mu) \cap \mathcal{W}(p^\nu) = \varnothing$. 令

$$\mathcal{W}(d) := \bigcap_{p^\nu \| d} \mathcal{W}(p^\nu). \tag{4.69}$$

这样, $n \in \mathcal{W}(d)$ 当且仅当 $p^\nu \| d \Rightarrow n \in \mathcal{W}(p^\nu)$. 约定 $\mathcal{W}(1) = \mathbb{Z}$.

设 $\mathcal{A}$ 是整数的有限列 (不要求相异), $\mathcal{P}$ 是素数类及 $z \geqslant 2$ 为实数. 令

$$\mathcal{P}_z := \mathcal{P} \cap [1, z].$$

希望得到以下数值的上界估计:

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}; z) := \left| \{ a \in \mathcal{A} : a \notin \mathcal{W}(p^\nu) \quad (p \in \mathcal{P}_z, \, \nu \geqslant 1) \} \right|.$$

假设

$$\sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ a \in \mathcal{W}(d)}} 1 = \frac{w(d)}{d} X + r_d \quad (d \geqslant 1), \tag{4.70}$$

其中 $X \geqslant 0$ 是与 d 无关的量, w 是非负乘性函数, r_d 在适当的意义下为余项. 不失一般性, 可设

$$w(p^\nu) = 0 \qquad (p \notin \mathcal{P}_z, \, \nu \geqslant 1) \tag{4.71}$$

且

$$\sum_{\nu \geqslant 1} \frac{w(p^\nu)}{p^\nu} < 1 \qquad (p \in \mathcal{P}_z). \tag{4.72}$$

在应用中, 该条件通常等价于对任意素数 p 有 $\bigcup_{\nu\geqslant 1}\mathcal{W}(p^\nu)\neq\mathbb{Z}$.

令

$$\vartheta(p^\nu):=1-\sum_{1\leqslant\mu\leqslant\nu}\frac{w(p^\mu)}{p^\mu}>0\qquad(p\geqslant 2,\ \nu\geqslant 0).\tag{4.73}$$

给定数论函数 f, 引进记号

$$\psi_f(x,y):=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n)\leqslant y}}\frac{f(n)}{n}\qquad(x\geqslant 1,\ y\geqslant 1).$$

定理 4.25 在假设 (4.70), (4.71) 和 (4.72) 下, 对任意整数 $D>1$ 有

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P};z)\leqslant\frac{X}{\psi_f(D,z)}+\sum_{\substack{m\leqslant D^2\\ P^+(m)\leqslant z}}3^{\omega(m)}|r_m|,\tag{4.74}$$

其中 f 是满足如下条件的正规乘性函数:

$$f(p^\nu):=p^\nu/\vartheta(p^\nu)-p^\nu/\vartheta(p^{\nu-1})=w(p^\nu)/\{\vartheta(p^\nu)\vartheta(p^{\nu-1})\}\qquad(\nu\geqslant 1).\tag{4.75}$$

证明 设 $D>1$. 对满足 $\lambda_1=1$ 及 $\lambda_d=0$ $(\forall\, d>D)$ 的实数列 $\{\lambda_d\}_{d\geqslant 1}$ 有

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P};z)\leqslant\sum_{a\in\mathcal{A}}\Big(\sum_{a\in\mathcal{W}(d)}\lambda_d\Big)^2.\tag{4.76}$$

事实上, (4.76) 和式中指标为 a 的项总非负 (由于 λ_d 是实数) 且当 $a\in S(\mathcal{A},\mathcal{P};z)$ 时它等于 $\lambda_1=1$.

引进乘性函数

$$\varepsilon(p^\mu,p^\nu):=\begin{cases}1, & 若\ \mu=\nu\ 或\ \mu\nu=0,\\ 0, & 若以上不然.\end{cases}$$

题设中 $\mathcal{W}(p^\nu)$ 不交的假设说明了除非 $\varepsilon(p^\mu,p^\nu)=1$ 不能有 $\mathcal{W}(p^\mu)\cap\mathcal{W}(p^\nu)\neq\varnothing$. 由乘性, 当 $\mathcal{W}(d)\cap\mathcal{W}(d')\neq\varnothing$ 时即有 $\varepsilon(d,d')=1$. 将 (4.76) 中的平方展开便得到

$$\begin{aligned}S(\mathcal{A},\mathcal{P};z)&\leqslant\sum_{d,d'\leqslant D}\lambda_d\lambda_{d'}\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\in\mathcal{W}(d)\cap\mathcal{W}(d')}}1\\ &=\sum_{d,d'\leqslant D}\lambda_d\lambda_{d'}\varepsilon(d,d')\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\in\mathcal{W}([d,d'])}}1=XQ+R,\end{aligned}\tag{4.77}$$

其中

$$(4.78)\qquad Q := \sum_{d,d'\leqslant D} \lambda_d\lambda_{d'}\varepsilon(d,d')\frac{w([d,d'])}{[d,d']},\quad R := \sum_{d,d'\leqslant D} \lambda_d\lambda_{d'}\varepsilon(d,d')r_{[d,d']}.$$

用定理 4.24 可得二次型 Q 的最小值. 为此需计算函数

$$f(m,n) := \varepsilon(m,n)w([m,n])/[m,n]$$

所对应的 g,t 及 t^*.

对 (μ,ν) 用归纳法, 从 (4.64) 中知道, 在 (4.73) 的记号下,

$$g(p^\nu) := \{\vartheta(p^{\nu-1})-\vartheta(p^\nu)\}\frac{\vartheta(p^\nu)}{\vartheta(p^{\nu-1})}\qquad(\nu\geqslant 1),$$

$$t(p^\mu,p^\nu) := \begin{cases}\vartheta(p^{\mu-1})-\vartheta(p^\mu), & 若\ \nu=0,\\ -\{\vartheta(p^{\mu-1})-\vartheta(p^\mu)\}/\vartheta(p^\nu), & 若\ 0<\nu<\mu,\\ \delta_{\mu\nu}, & 若\ \mu\leqslant\nu.\end{cases}$$

从而

$$t^*(p^\mu,p^\nu) := \begin{cases}-\{\vartheta(p^{\mu-1})-\vartheta(p^\mu)\}/\vartheta(p^{\mu-1}), & 若\ \nu=0,\\ \{\vartheta(p^{\mu-1})-\vartheta(p^\mu)\}/\vartheta(p^{\mu-1}), & 若\ 0<\nu<\mu,\\ \delta_{\mu\nu}, & 若\ \mu\leqslant\nu.\end{cases}$$

当 $\{\lambda_d\}_{d\geqslant 1}$ 如 (4.66) 定义, 即

$$(4.79)\qquad \lambda_d := \frac{\sum_{m\leqslant D} t^*(m,d)t^*(m,1)/g(m)}{\sum_{m\leqslant D} t^*(m,1)^2/g(m)}\quad(d\leqslant D),\quad \lambda_d^* := 0\quad(d>D)$$

时二次型 Q 取到最小值.

注意到当 $P^+(m)>z$ 时 $t^*(m,1)=0$, 由 (4.65) 得

$$(4.80)\qquad Q^* = \left(\sum_{\substack{d\leqslant D\\ P^+(d)\leqslant z}}\prod_{p^\nu\|d}\left(\frac{1}{\vartheta(p^\nu)}-\frac{1}{\vartheta(p^{\nu-1})}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\psi_f(D,z)}.$$

另外, 由于 $\sup_d|\lambda_d^*|=1$, 有

$$|R| \leqslant \sum_{\substack{m\leqslant D^2\\ P^+(m)\leqslant z}}\sum_{[d,d']=m}\varepsilon(d,d')|r_m| = \sum_{\substack{m\leqslant D^2\\ P^+(m)\leqslant z}} 3^{\omega(m)}|r_m|,$$

其中对 d,d' 的求和对于 m 是乘性的, 且当 m 为素数的幂时它恰等于 3. □

当 $\mathcal{A}$ 是某区间中的整数之集时, 上界估计 (4.74) 可有另一种形式.

定理 4.26 (Selberg) 设 $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}$ 是相继的 N 个整数之集. 若函数 $w(d) := \left|\mathcal{W}(d) \cap [0, d[\right|$ 满足 (4.71) 和 (4.72), 那么对任意整数 $D \geqslant 1$, 有

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}; z) \leqslant \frac{N + D^2 - 1}{\psi_f(D, z)},$$

其中 f 是如 (4.75) 定义的正规乘性函数.

证明 存在整数 M 使得 $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{Z} : M < n \leqslant M + N\}$. 令 b 为 (4.30) 中定义的 Beurling 函数, 其中 $\delta := 1/D^2$. 由 (4.77) 中第二个上界估计, 有

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}, \mathcal{P}; z) &\leqslant \sum_{d, d' \leqslant D} \lambda_d \lambda_{d'} \varepsilon(d, d') \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathcal{W}([d, d'])}} b(n) \\ &= \sum_{d, d' \leqslant D} \lambda_d \lambda_{d'} \varepsilon(d, d') \sum_{\substack{0 \leqslant m < [d, d'] \\ m \in \mathcal{W}([d, d'])}} \sum_{n \equiv m \,(\mathrm{mod}\, [d, d'])} b(n). \end{aligned}$$

由 (4.24), 内部的和式等于

$$\begin{aligned} &\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{b(n)}{[d, d']} \sum_{0 \leqslant j < [d, d']} \mathrm{e}\Big(\frac{(n - m)j}{[d, d']}\Big) \\ &= \frac{1}{[d, d']} \sum_{0 \leqslant j < [d, d']} \mathrm{e}\Big(\frac{-mj}{[d, d']}\Big) \sum_{n \in \mathbb{Z}} b(n) \mathrm{e}\Big(\frac{nj}{[d, d']}\Big) = \frac{\widehat{b}(0)}{[d, d']}, \end{aligned}$$

由 (4.31), $\widehat{b}(0) = N + D^2 - 1$. 对 m 求和, 在 (4.78) 的记号下, 有

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}; z) \leqslant (N + D^2 - 1)Q.$$

由 (4.80) 便知欲证的结论成立. □

对任意素数 p, 有

$$\sum_{\nu \geqslant 0} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} = 1 + \sum_{j \geqslant 1} \left(\frac{1}{\vartheta(p^j)} - \frac{1}{\vartheta(p^{j-1})}\right) = \frac{1}{\lim\limits_{j \to \infty} \vartheta(p^j)} = \Big(1 - \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{w(p^\nu)}{p^\nu}\Big)^{-1}.$$

从而

$$\lim_{D \to \infty} \frac{1}{\psi_f(D, z)} = W(z) := \prod_{p \leqslant z} \Big(1 - \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{w(p^\nu)}{p^\nu}\Big). \tag{4.81}$$

在一些实际运用中并无影响的附加假设下, 对乘积 $\psi_f(D, z)W(z)$ 可有最优估计. 比如可假设存在常数 $r \in \mathbb{N}^*$, $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$ 及 $\kappa > 0$, 使得

$$\vartheta(p^\nu) \geqslant \eta \quad (p \in \mathcal{P},\ \nu \geqslant 1), \tag{4.82}$$

$$\sum_p \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant r} \frac{w(p^\nu)^2 \ln p}{p^{2\nu}} + \sum_p \sum_{\nu > r} \frac{w(p^\nu)}{p^{(1-\eta)\nu}} < \infty, \tag{4.83}$$

及

$$\sum_{\substack{y<p\leqslant t\\1\leqslant\nu\leqslant r}}\frac{w(p^\nu)\ln p}{p^\nu}\leqslant\kappa\ln(t/y)+O(1)\qquad(t\geqslant y\geqslant 1).\tag{4.84}$$

$\psi_f(D,z)W(z)$ 渐近行为的精细估计可用一些微分差分方程的连续解来描述. 其中一个原型是 Dickman 函数, 在第三部分 §5.4 中将详述.

令 ϱ_κ 为方程组

$$\begin{cases}\varrho_\kappa(u)=u^{\kappa-1}/\Gamma(\kappa), & \text{若}\, 0<u\leqslant 1,\\ u\varrho_\kappa'(u)+(1-\kappa)\varrho_\kappa(u)+\kappa\varrho_\kappa(u-1)=0, & \text{若}\, u>1\end{cases}\tag{4.85}$$

的连续解, 其中 Γ 表示 Euler Γ-函数. 用 Laplace 变换[④]知函数 ϱ_κ 是 $\varrho:=\varrho_1$ 的卷积 κ 次幂. 任意 κ, ϱ_κ 承袭了函数 ϱ 的速降性. 例如有

$$\varrho_\kappa(u)=(u\ln u)^{-u}\mathrm{e}^{O_\kappa(u)}\quad(u\to\infty),$$

本章注记中将给出一个渐近公式.

·又令

$$\lambda_\kappa(u):=\mathrm{e}^{-\gamma\kappa}\int_u^\infty\varrho_\kappa(v)\,\mathrm{d}v,\quad j_\kappa(u)=1-\lambda_\kappa(u)\quad(u\geqslant 0),\tag{4.86}$$

其中 γ 是 Euler 常数. 像第三部分 §5.4 中 $\kappa=1$ 的情形那样, 可以证明 $\lambda_\kappa(0)=j_\kappa(\infty)=1$, 可见 Hensley (1986a).

以下是 Tenenbaum 和吴杰 (2007a) 的一个结果, 证明略去.

定理 4.27 *设 $\kappa>0,\eta\in]0,\frac12[$. 在假设 (4.70), (4.71), (4.82), (4.83), (4.84) 下, 存在常数 B, 使得对 $2\leqslant z\leqslant D^{1/r}$ 一致地有*

$$\frac{1}{\psi_f(D,z)}\leqslant\frac{W(z)}{j_\kappa(v)}\left\{1+O\left(\frac{\lambda_\kappa^+(v)}{\ln z}\mathrm{e}^{Bv(\ln v)/\ln z}\right)\right\},\tag{4.87}$$

其中 $W(z)$ 的定义见 (4.81), 而且

$$\nu:=\min\{(\ln D)/(r\ln z),3(\ln D)/(r\eta\ln_2 z)\},\quad\lambda_\kappa^+(v):=\lambda_\kappa(v)v\ln(1+v).$$

注意到 (4.87) 的余项 (记作 R) 满足上界估计

$$R\ll v^{-v(1-\varepsilon)}/\ln z\qquad(z>z_0(\varepsilon)).$$

④ 见第三部分第五章, 那里对 $\kappa=1$ 作了计算, 一般情形类似.

§4.8 区间中的平方和

上节描述的 Selberg 筛法的形式正适于讨论某区间中可表为两个平方数之和的整数个数的上界估计.

以该集合的一个描述开始讨论. 下文中的定理是 Girard 在 1632 年的猜想, 1654 年被 Fermat 解决.

下文中提到的证明将利用如下事实: 给定素数 p, -1 是模 p 平方剩余类 (即同余方程 $x^2+1\equiv 0 \pmod p$ 有解) 当且仅当 $p\equiv 1 \pmod 4$.

这个经典结论从模 p 的可逆剩余类群 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ 是循环群的事实容易得到.[5] 另一方法是研究乘法群同态

$$f:(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*\longrightarrow\{-1,1\},\quad f(x)=x^{(p-1)/2}.$$

它在平方剩余类构成的子群 Q_p 上的限制恒为 1. 由于多项式函数 $f(x)=1$ 在域 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上至多有 $\frac{1}{2}(p-1)$ 个根, 可知 Q_p 恰为其解集. 这样当 a 是模 p 的平方剩余类时 $f(a)$ 等于 1, 否则等于 -1. 通常用 Legendre 符号来表示这一性质:

$$\left(\frac{a}{p}\right):=\begin{cases}1, & 若\, a\in Q_p,\\ -1, & 若\, a\notin Q_p.\end{cases}$$

定理 4.28 对任意 $a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, 有

$$\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{(p-1)/2}\pmod p.$$

现在可证明 Girard-Fermat 定理. 另一个基于连分式的证明见第七章.

定理 4.29 (Girard-Fermat) 奇素数可表为两平方数之和当且仅当它模 4 余 1.

证明 由于两个平方数之和模 4 余 0, 1 或 2, 必要性成立. 下证充分性. 给定素数 p, 使得 $p\equiv 1\pmod 4$. 令 $N:=\lfloor\sqrt{p}\rfloor$ 并令 x 为方程 $x^2\equiv -1\pmod p$ 的一个解. 在 $(N+1)^2>p$ 个形如 $u+vx$ 的数 $(0\leqslant u,v\leqslant N)$ 中, 至少两者模 p 同余. 取二者之差便知同余方程 $a\equiv bx\pmod p$ 对于满足 $\max(|a|,|b|)<\sqrt{p}$ 的 a,b 有非平凡解. 这说明了 $a^2\equiv x^2b^2\equiv -b^2\pmod p$. 从而 $p\mid a^2+b^2$. 由于 $0<a^2+b^2<2p$, 有 $p=a^2+b^2$. □

定理 4.30 正整数 n 可表示为两个平方数之和当且仅当对任意满足 $p\equiv 3\pmod 4$ 的素数 p, 有 $v_p(n)\equiv 0\pmod 2$.

---

⑤ 见习题 232, 第 367 页.

证明 令为 h 平方数集的示性函数. 等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \tag{4.88}$$

说明了 h 是超乘性的, 亦即, h 满足不等式

$$h(mn)\geqslant h(m)h(n).$$

从而, 由 Girard-Fermat 定理, 满足题设条件的数可表示为两个平方数之和.

反过来, 若 n 可写成 $n=a^2+b^2$, 且 p 是使得 $v_p(n)=2\nu+1$ 的奇素数, $\nu\in\mathbb{N}$. 令 $\mu:=v_p(a)$. 这样 $\mu\leqslant\nu$, 从而 $v_p(b)=\mu$. 将等式 $n=a^2+b^2$ 两边除以 $p^{2\mu}$, 得 $\alpha^2+\beta^2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$ 且 $p\nmid\alpha\beta$. 这说明 -1 是模 p 平方剩余类, 故 $p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)$. □

注 从前述证明还可得出示性函数 h 实际上是乘性的, 且满足

$$h(p^\nu)=\begin{cases}1, & 若\, p=2\, 或\, p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)\, 或\, 2\mid\nu,\\ 0, & 若\, p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)\, 且\, 2\nmid\nu.\end{cases} \tag{4.89}$$

利用第二部分中将介绍的标准技巧可估计 h 的部分和函数. 例如 (见第二部分第八章习题 240) 有

$$\sum_{n\leqslant N}h(n)=\left\{1+O\Big(\frac{1}{\ln N}\Big)\right\}\frac{K_0N}{\sqrt{\ln N}}\quad (N\geqslant 2), \tag{4.90}$$

其中

$$K_0:=\frac{1}{\sqrt{2}}\prod_{p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)^{-1/2}. \tag{4.91}$$

现在可用 Johnsen-Selberg 筛法估计区间中两平方数之和个数的上界. 为增强命题的可读性, 在下述结论第二部分证明中将用到公式

$$\prod_{p>2}\Big(1-\frac{(-1)^{(p-1)/2}}{p}\Big)=\frac{4}{\pi}, \tag{4.92}$$

这可由第二部分定理 8.17 的算术数列中素数分布定理或常见的等式

$$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n/(2n+1)=\pi/4$$

得出.

定理 4.31 设 I 是实区间, 含有 N 个正整数. 存在绝对常数 K, 使得 I 中可写成两个平方数之和的整数个数 Z_N 满足

$$Z_N \leqslant KN \prod_{\substack{p\leqslant N\\ p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}} \Big(1-\frac{1}{p}\Big). \tag{4.93}$$

另外, 当 N 趋于无穷时, 有

$$Z_N \leqslant \{\pi + o(1)\}\frac{K_0 N}{\sqrt{\ln N}}. \tag{4.94}$$

证明　对

$$\mathcal{P} := \{p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)\},\quad \mathcal{W}(p^\nu) = \begin{cases}\{mp^{\nu-1} : p\nmid m\}, & 若\, p\in\mathcal{P},\, 2\mid\nu,\\ \varnothing, & 若\, p\in\mathcal{P},\, 2\nmid\nu\end{cases}$$

应用定理 4.26, 得

$$w(p^\nu) = \begin{cases} p-1, & 若\, 2\mid\nu\, 且\, p\in\mathcal{P},\\ 0, & 若\, 2\nmid\nu\, 或\, p\notin\mathcal{P}.\end{cases}$$

从而定理 4.27 的假设对于 $r=2$ 成立: 由定理 1.10, 取 $\kappa=1$ 是可行的, 这足以证明 (4.93). 事实上, 由第二部分定理 8.16 知可取 $\kappa=\frac{1}{2}$, 这样得到

$$Z_N \leqslant \frac{N+D^2}{j_{\frac{1}{2}}(v)} \prod_{\substack{p\leqslant z\\ p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}} \Big(1-\frac{1}{p+1}\Big)\Big\{1+O\Big(\frac{v^{-v/2}}{\ln z}\Big)\Big\},$$

其中 D 任意, v 如题设定义.

取 $D=z^2 := \sqrt{N}/\ln N$, 这样 $v=1$, 且

$$j_{\frac{1}{2}}(1) = 2\mathrm{e}^{-\gamma/2}/\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = 2\mathrm{e}^{-\gamma/2}/\sqrt{\pi}.$$

最后只须估计乘积 $W(z)$. 有

$$\begin{aligned} W(z) &= \prod_{\substack{p\leqslant z\\ p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}} \Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)^{-1}\\ &= \sqrt{2}\prod_{p\leqslant z}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{1/2} \prod_{2<p\leqslant z}\Big(1-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}\Big)^{-1/2} \prod_{\substack{p\leqslant z\\ p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}}\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)^{-1/2}\\ &= \frac{2\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\gamma/2}K_0 + o(1)}{\sqrt{\ln N}}. \end{aligned}$$

□

注　(4.94) 与 (4.90) 的比较说明, 从渐近上讲筛法损失的因子不超过 π. 由函数方程 (4.85), 函数 $j_{1/2}(v)/\sqrt{v}$ 对于 $v\geqslant 1$ 单调下降, 从而前述证明中 $v=1$ 的选择对于所采用的方法来说是最优的.

注记

§4.2 为估计 (4.5) 的第三个余项, 用了*参数方法*. 在 Hall 和 Tenenbaum 的著作第零章有详述. 著名的 Rankin *方法* (见第三部分 §5.1) 是这个强大的计算技巧运用的又一典范, 它用一个含参数的乘性函数的常数倍来估计示性函数的上界并优化参数.

文中 Brun 方法在 $\pi(x)$ 上界估计中的应用不过是其主要意义的简单展示, 不应视为真正的结果. 它不仅如前文所见, 在精度上弱于 Tchébychev 估计, 而且从严格的意义上讲, 其过程中也忽略了一些信息. 事实上, 我们应用了定理 1.10, Mertens 定理的一个推论. 而后者可直接给出 $\pi(x)$ 的一个 Tchébychev 型上界估计: 当 x 足够大时, 有

$$\pi(x)-\pi(x/2)\leqslant\frac{x}{\ln x}\sum_{x/2<p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}\ll\frac{x}{\ln x}.$$

然而容易验证 Brun 方法实际上只需要 $\sum_{p\leqslant x}1/p$ 的一个渐近公式, 它比定理 1.10 或定理 1.8 要弱得多. 这恰好反映了筛法有广阔应用前景的原因.

关于 $\Phi(x,y)$ 的其他结果见第三部分第六章.

Alladi (1988) 阐述了 Brun 方法沿乘性函数在 $\mathbb{N}$ 的某些子集上求和这一方向上的进展.

对组合筛法现状感兴趣的读者可参阅 Diamond 和 Halberstam (2000) 的著作及 Iwaniec (1980a,b, 1981) 深刻的文章.

在原理上与 Brun 方法较为接近, 而在得到的结论上与文献中最好的改进可相提并论的是 Hooley (1994) 的结果. Ford 和 Halberstam (2000) 简化了该结果, 提出了 “可即用” 的形式.

以下简述 “线性筛法” (即代表筛去的模 p 剩余类个数的函数 $w(p)$ 平均上以 1 为其上界, 也称为 *1 维筛法*) 系数的关键性质, 见 Iwaniec (1980a,b). 他的工作涵盖了一般维数的情形.

给定素数类 $\mathcal{P}$. 令

$$P(z):=\prod_{p\in\mathcal{P},\,p\leqslant z}p.$$

Buchstab 函数 $\omega(t)$ 在 $0\leqslant t<1$ 上恒零, 在 $[1,\infty[$ 上定义为差分微分方程

$$(t\omega(t))'=\omega(t-1)\qquad(t>2)$$

在初值条件 $t\omega(t)=1\ (1\leqslant t\leqslant 2)$ 下的解. 定义筛函数 F 和 f 为

$$F(t)=\mathrm{e}^{\gamma}\Big\{\omega(t)+\frac{\varrho(t-1)}{t}\Big\},\quad f(t)=\mathrm{e}^{\gamma}\Big\{\omega(t)-\frac{\varrho(t-1)}{t}\Big\},$$

其中 γ 是 Euler 常数, ϱ 是 Dickman 函数. $f(t)>0$ 当且仅当 $t>2$. 另外 (见第三部分推论 6.9) 有渐近公式

$$\frac{F(t)}{f(t)}=1+O(\varrho(t-1)/t)=1+O(t^{-t})\qquad(t\to\infty).$$

定理 4.32 (Iwaniec) 设 $D\geqslant 1$. 存在两个序列 $\{\lambda_d^+\}_{d\geqslant 1}$ 及 $\{\lambda_d^-\}_{d\geqslant 1}$, 当 $d>D$ 或 $\mu(d)=0$ 时取零值, 满足 $\lambda_1^\pm=1$, $|\lambda_d^\pm|\leqslant 1$, 并使得

$$\lambda^- * \mathbf{1}\leqslant \mu * \mathbf{1}\leqslant \lambda^+ * \mathbf{1},$$

且使得

$$\sum_{d|P(z)}\lambda_d^+\frac{w(d)}{d}\leqslant\prod_{\substack{p\leqslant z\\ p\in\mathcal{P}}}\Big(1-\frac{w(p)}{p}\Big)\Big\{F(s)+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{L}-s}}{(\ln D)^{1/3}}\Big)\Big\},$$

$$\sum_{d|P(z)}\lambda_d^-\frac{w(d)}{d}\geqslant\prod_{\substack{p\leqslant z\\ p\in\mathcal{P}}}\Big(1-\frac{w(p)}{p}\Big)\Big\{f(s)+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{L}-s}}{(\ln D)^{1/3}}\Big)\Big\}.$$

对任意 $z\in[2,D]$, $D=z^s$, 任意素数类 $\mathcal{P}$ 及任意满足下列条件的乘性函数 w 成立:

(i) $0<w(p)<p\qquad(p\in\mathcal{P})$,

(ii) $\displaystyle\prod_{u<p\leqslant v,\,p\in\mathcal{P}}\Big(1-\frac{w(p)}{p}\Big)^{-1}\leqslant\frac{\ln v}{\ln u}\Big(1+\frac{L}{\ln u}\Big)\qquad(2\leqslant u\leqslant v\leqslant z)$.

§4.4 虽然 (至少在最优情形下) 大筛法解析形式的证明用到了单复变函数论及调和分析中一个深刻的结论, 大筛法仍可认为是基本上初等的方法. 从前文可见不等式

$$\Delta(N,\delta)\leqslant\frac{1}{2}\pi^2(N-1+\delta^{-1})$$

的证明是初等的. 还可参见 Montgomery (1971) [$\Delta\leqslant N+2/\delta$], Bombieri (1974) [同前] 及 Elliott (1980) [$\Delta\leqslant N+1/\delta$] 等人完全不同的证明.

20 世纪 30 年代末, Beurling 研究了引理 4.11 中的函数 $F(z)$. 对最优化问题 (4.27) — (4.28) 及其在各式推广中的诸多应用的详尽研究, 见 Graham 和 Vaaler (1981, 1984), Vaaler (1985).

大筛法也可用于估计特征和的均值, 见第二部分 §8.1. 令

$$T(\chi):=\sum_{M<n\leqslant M+N}a_n\chi(n).$$

Gallagher (1967) 证明了不等式

$$\sum_{\chi}{}^{*}|T(\chi)|^2\leqslant\frac{\varphi(q)}{q}\sum_{1\leqslant a\leqslant q,\,(a,q)=1}\Big|S\Big(\frac{a}{q}\Big)\Big|^2,$$

其中求和遍历模 q 本原特征, 即不由模 d 特征导出的特征, $d \mid q$, $d < q$. 由 (4.33) 得上界估计

$$\sum_{q \leqslant Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi}^{*} |T(\chi)|^2 \leqslant (N - 1 + Q^2) \sum_{M < n \leqslant M+N} |a_n|^2.$$

该不等式在算术数列素数分布及 L-函数研究中起关键作用 (见第二部分 §8.2). 特别地, 它是 Bombieri-Vinogradov (1965, 1966) 定理证明中的一个基本要素, 见第二部分第八章注记.

§4.5 定理 4.14 在许多数论问题的优雅证明中有用. 比如它是 Daboussi 定理原始证明的基础 (Daboussi 和 Delange, 1974)；亦是 Hildebrand (1986c, d, e, 1987a) 研究模不超过 1 的乘性函数均值一个新方法的出发点. Hildebrand (1986b) 还用该不等式给出了素数定理一个新的初等证明. Elliot (1979, 引理 4.7) 得到定理 4.14 的一个变体, 证明了不等式 (也见第三部分定理 3.2)

$$\sum_{p \leqslant N} p \left| S(p, 0) - \frac{1}{p} S(0) \right|^2 \leqslant 16N \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} |a_n|^2.$$

该结论不能直接与 (4.42) 比较: 对 p 的求和较长[⑥], 然而仅考虑每个素数 p 的一个同构类.

§4.6 $J(x)$ 的最好的上界估计是吴杰 (2004) 的结果, 改进了 Fouvry 和 Grupp (1986), 以及他本人 (1990) 的结论. 定理 4.15 中的因子 8 被改进为 3.399 6. 此问题的 "基础" 结论给出因子 4: 见习题 82. 这是 Bombieri 和 Davenport (1966) 的结果, 见 Halberstam 和 Richert (1974). 证明中除用到 Selberg 筛法外, 还用了 Bombieri-Vinogradov 定理, 见第二部分定理 8.34.

不等式 (4.46) 其实是无余项地一致成立的, 即

$$\pi(x + y; \ell, k) - \pi(x; \ell, k) < \frac{2y}{\varphi(k) \ln(y/k)} \qquad (1 \leqslant k < y \leqslant x).$$

这是 Montgomery 和 Vaughan (1973) 的结果.

§4.7 Johnsen (1971) 最先考虑了 $\mathcal{A}$ 是区间的特殊情形下的指数筛法, 其假设比本书中的更为局限. 后者见于 Selberg (1977) 的工作, 是其方法的延伸. Gallagher (1972, 1973/1974) 提出一个比 Johnsen 估计更为简单的证明. Motohashi (1979) 随即用大筛法给出了 Selberg 结果的一个新证, 回答了 Selberg (1977) 中的一个问题.

当 $\mathcal{A}$ 是区间时, Selberg 确立了 $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}; z)$ 的最终上界估计 (相应于定理 4.26). 定理 4.25 中则考虑更一般的情形, 采用了 Tenenbaum 和吴杰 (2007a) 的表达方式.

---

⑥ 实际上, (4.42) 仅在 $Q \ll \sqrt{N}$ 时可推出同阶的上界估计.

定理 4.27 基于这样的观察: 对任意非负乘性函数 f 有

$$\psi_f(D,z) \geqslant \psi_{f_r}(D^{1/r},z) \qquad (D \geqslant 1,\, z \geqslant 1), \tag{4.95}$$

其中 f_r 是如下定义的乘性函数

$$f_r(p^\nu) := \begin{cases} \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} f(p^j)/p^{j-1}, & 若\ \nu = 1, \\ 0, & 若\ 1 < \nu \leqslant r, \\ f(p^\nu), & 若\ \nu > r. \end{cases}$$

这样, 在假设 (4.82), (4.83) 及(4.84) 下便可应用 Tenenbaum 和吴杰文中定理 3.1 于 (4.75) 中的函数 f.

以下给出关于结论中出现的函数 ϱ_κ 及 λ_κ 的一些信息. 令 $\xi(u)$ 为方程 $\mathrm{e}^\xi = 1 + u\xi$ 唯一的非零解 ($u > 0$, $u \neq 1$), 并令 $\xi(1) = \xi(0) = 0$. 定义

$$\begin{aligned} \xi_\kappa(u) &:= \max\{1, \xi(u/\kappa)\}, \\ I(s) &:= \int_0^s \frac{\mathrm{e}^v - 1}{v}\mathrm{d}v, \\ \sigma_j(u) &:= \kappa I^{(j)}(\xi_\kappa(u)), \end{aligned} \tag{4.96}$$

这样, 由本书第三部分引理 5.11 及 Smida (1991) 引理 4.5, 对任意固定的整数 $j \geqslant 0$ 有

$$\left.\begin{aligned} \xi_\kappa(u) &= \ln u + \ln_2 u + O\Big(\frac{\ln_2 u}{\ln u}\Big) \\ \sigma_j(u) &= u\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\ln u}\Big)\Big\} \end{aligned}\right. \qquad (u \to \infty). \tag{4.97}$$

由 Smida (1991) 定理 1 或更一般地, 由 Hildebrand 和 Tenenbaum (1993a) 定理 2, 有

$$\varrho_\kappa(u) = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big\}\frac{\mathrm{e}^{\gamma\kappa - u\xi_\kappa(u) + \sigma_0(u)}}{\sqrt{2\pi\sigma_2(u)}} \qquad (u \to \infty), \tag{4.98}$$

其中 γ 是 Euler 常数.

正如 Hanrot, Tenenbaum 和吴杰 (2007) (4.12) 式中提到的, 有

$$\lambda_\kappa(u) = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big\}\frac{\mathrm{e}^{-\gamma\kappa}\varrho_\kappa(u)}{\xi_\kappa(u)} \qquad (u > 0). \tag{4.99}$$

关于 Goldston, Pintz 和 Yıldırım 结果的综述, 见 Soundararajan (2007).

习题

77. 对 $x \geqslant z \geqslant y \geqslant 1$ 令 $\Psi_0(x,y,z)$ 为不含 $]y,z]$ 中素因子的整数 $n \leqslant x$ 的个数.

(a) 用 Ératosthène 筛法证明

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}\Psi_0(x,y,z) = \prod_{y<p\leqslant z}\Big(1-\frac{1}{p}\Big).$$

(b) 用纯粹 Brun 方法证明, 存在正绝对常数 c, 使得对于

$$1 \leqslant y \leqslant z \leqslant \exp\{c\ln x/\ln_2 x\}$$

一致地有

$$\Psi_0(x,y,z) \sim x \prod_{y<p\leqslant z}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) \qquad (x\to\infty). \tag{4.100}$$

(c) 用组合筛法基本引理拓展该结论.

(d) 承认素数定理, 证明 (4.100) 对 $1 \leqslant y < z \leqslant \sqrt{x}$ 不能一致成立.

78. *形如 n^2+1 的素数及拟素数.*

(a) 证明同余方程 $\xi^2+1\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$ 解的个数 $\varrho(p)$ 当 $p\equiv 2\,(\mathrm{mod}\, p)$ 时等于 1, 当 $p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\, 4)$ 时等于 2, 当 $p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\, 4)$ 时等于 0.

(b) 推出当 d 无平方因子时, 方程 $\xi^2+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, d)$ 有 $\varrho(d) := \prod_{p|d}\varrho(p)$ 个解.

(c) 用组合筛法基本引理证明形如 $p=n^2+1$ 的素数 $p\leqslant x$ 的个数 $S(x)$ 满足

$$S(x) \ll \sqrt{x}\prod_{p\leqslant x,\, p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}\Big(1-\frac{2}{p}\Big).$$

(d) 用 Dirichlet 定理

$$\sum_{p\leqslant x,\, p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}\frac{1}{p} = \frac{1}{2}\ln_2 x + O(1)$$

来计算上式.

(e) 在同样的假设下, 证明存在正绝对常数 B, 使得

$$\big|\{n\leqslant\sqrt{x} : n^2+1\in Q(B,x)\}\big| \asymp \sqrt{x}/\ln x,$$

其中 $Q(B,x) := \{m\leqslant x : p\mid m \Rightarrow p > x^{1/B}\}$. ⑦

79. *殆平方数.*

(a) 令 $p>2$ 为素数. 证明 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ 的自同态 $x\mapsto x^2$ 的核是 $\{\pm 1\}$, 并推出模 p 的非平方剩余类数是 $(p-1)/2$.

---

⑦ 通常将该集合中的元素称为“拟素数”, 见 Halberstam 和 Richert (1974) §2.8. 特别地, 拟素数的素因子个数有界. 另外 $|Q(B,x)| \asymp \pi(x)$.

(b) 用不大于 $\sqrt{x}$ 的素数对适当的整数类来 "筛" 集合 $\mathcal{A}=\{n : n\leqslant x\}$, 证明对任意 $p\leqslant\sqrt{x}$ 均为模 p 平方剩余类的整数 $n\leqslant x$ 的个数 S 满足 $\lfloor\sqrt{x}\rfloor\leqslant S\leqslant C\sqrt{x}$, 其中 C 是绝对常数, 并计算 C 的值.

80. 用大筛法证明, 若 $\mathcal{A}\subset]M,M+N]$ 是整数类, 使得对任意素数 p, 它落在 $w(p)$ 个模 p 剩余类之外, 其中 $w(p)\ll 1$, 那么

$$|\mathcal{A}|\ll N\prod_{p\leqslant N}\Big(1-\frac{w(p)}{p}\Big).$$

用 Selberg 筛法重证该结论.

81. Goldbach 猜想中和表示方法数的上界估计.

令 N 为偶数. 用 $r(N)$ 表示把 N 写成形如 $N=p+q$ 的方法数, 其中 p 和 q 是素数. Goldbach 猜想断言对任意偶数 $N>2$ 有 $r(N)>0$. 从概率上考虑, 应有

$$r(N)\sim C_N N/(\ln N)^2 \qquad (N\to\infty),$$

其中 $C_N := 2\prod_{p>2}\Big(1-\dfrac{1}{(p-2)^2}\Big)\prod_{p|N,\,p>2}\dfrac{p-1}{p-2}$.

(a) 证明对任意使得 $\mu(m)=0\Rightarrow f(m)=0$ 的非负乘性函数 f 有

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)\leqslant\sum_{d|N}f(d)\sum_{m\leqslant x,\,(m,N)=1}f(m)\qquad(1\leqslant x\leqslant N).$$

(b) 证明存在绝对常数 C, 使得

$$r(N)\leqslant C\prod_{p|N}\Big(1+\frac{2}{p}\Big)\frac{N}{(\ln N)^2}.$$

(c) 令 h 为乘性函数, 满足

$$|h(p)|\leqslant 1\,(若\,p\mid N),\quad |h(p)|\leqslant p^{-\delta}\,(若\,p\nmid N),\quad |h(p^\nu)|\ll 1\,(\nu\geqslant 2),$$

其中 δ 是正常数. 证明对 $0\leqslant\alpha\leqslant 1/\ln_2 N$ 有

$$\sum_{d\geqslant 1}|h(d)|d^{\alpha-1}\ll\ln_2 N.$$

(d) 对适当的函数 h 使用前述结论, 证明不等式

$$r(N)\leqslant(8+o(1))C_N\frac{N}{(\ln N)^2},$$

这使 (b) 中的结果明确化了[⑧].

---

⑧ 渐近地讲, 该估计 8 倍于 $r(N)$ 的猜想值. 用 Bombieri-Vinogradov 定理, Bombieri 和 Davenport (1966) 得到一个新的估计, 其中常数 8 换成了 4: 见 Halberstam 和 Richert (1974) 定理 3.11.

82. 广义孪生素数.

对于 $k \in \mathbb{N}^*$, $x \geqslant 2$, 用 $J_{2k}(x)$ 表示不超过 x 且使得 $p+2k$ 为素数的素数的数目. 对 $\mathcal{A} := \{n(n+2k) : n \leqslant x\}$ 用 Selberg 筛法, 证明当 $x \to \infty$ 时对 $k \geqslant 1$ 一致地有

$$J_{2k}(x) \leqslant \{8C_2 + o(1)\} \frac{g(k)x}{(\ln x)^2}$$

其中 $C_2 := 2\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$, $g(k) := \prod_{\substack{p|k \\ p>2}}\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)^{-1}$.

说明 Bombieri-Vinogradov 定理 (第二部分定理 8.34) 如何渐近地将上述估计除以 2. 可应用 Selberg 筛法于集合 $\mathcal{A} := \{p+2k : p \leqslant x, p \in \mathbb{P}\}$ 中.

83. 素数间小差距.

令 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为所有素数的渐升列. 令 $d_n := p_{n+1} - p_n$ $(n \geqslant 2)$. 以下将证明 $\alpha := \liminf_n d_n/\ln n < 1$. ⑨

对 $x \geqslant 2$, $0 < \delta < 1$ 令 $I_x := \{n \in \mathbb{N}^* : x < p_n < p_{n+1} \leqslant 2x\}$ 及

$$N_x(\delta) := \sum_{\substack{n \in I_x \\ 1-\delta < d_n/\ln x \leqslant 1+\delta}} 1, \qquad S(x) := \sum_{n \in I_x} d_n.$$

(a) 假设 $\alpha > 1 - \delta$. 证明当 x 趋于无穷时有

$$\{1 + \delta + o(1)\}x - 2\delta N_x(\delta)\ln x \leqslant S(x) \leqslant x.$$

(b) 令 g 为习题 82 中的数论函数. 用卷积证明存在常数 $A > 0$, 使得

$$\sum_{k \leqslant y} g(k) = \{A + o(1)\}y \qquad (y \to \infty).$$

(c) 证明对足够大的 x 有 $N_x(\delta) < B\delta x/\ln x$, 其中 B 是绝对常数.

(d) 通过给出 α 的一个数值上界估计来证明题设命题.

84. Poisson 求和公式.

令 $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) 证明函数项级数 $\varphi(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+t)$ 几乎处处收敛.

(b) 假设 f 连续且在 $\mathbb{R}$ 上有界变差. 证明 Poisson 求和公式

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{|n| \leqslant N} \widehat{f}(n)\, \mathrm{e}(tn)$$

对任意 $t \in [0, 1[$ 成立.

⑨ 该结果属于 Erdős (1940). 最近 Goldston, Pintz 和 Yıldırım (2006) 证明了 $\alpha = 0$.

85. 与 q 互素的整数.

对任意整数 $q \geqslant 1$, 令 $N_q(x) := \left|\{n \leqslant x : (n,q)=1\}\right|$.

(a) 证明对每个固定的 $q \geqslant 1$ 有

$$\lim_{x\to\infty} N_q(x)/x = \varphi(q)/q.$$

(b) 固定整数 q. 证明每个整数 $n \geqslant 1$ 可唯一地写成 $n = hdt$ 的形式, 其中 $(h,q)=1$, $d \mid q$, $\mu(d)^2=1$, $p \mid t \Rightarrow p \mid d$.

(c) 计算 $\displaystyle\sum_{p|t\Rightarrow p|d} 1/t$.

(d) 对 $q \geqslant 1$, $Q \geqslant 1$, 令 $L(q,Q) := \displaystyle\sum_{d|q,\, d\leqslant Q} \mu(d)^2/\varphi(d)$. 证明

$$\ln(Q+1) \leqslant L(q,Q) \prod_{p\leqslant Q,\, p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

由此推出对于 $x \geqslant Q \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $P^+(q) \leqslant x$ 有

$$\frac{1}{L(q,Q)} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\gamma}\varphi(q)\ln x}{q\ln(Q+1)}\left\{1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right\}.$$

(e) 证明对 $x \geqslant 3$, $q \geqslant 1$, $P^+(q) \leqslant x$ 一致地有上界估计[10]

$$N_q(x) \leqslant \left\{1+O\left(\frac{\ln_2 x}{\ln x}\right)\right\} 2\mathrm{e}^{\gamma}\frac{\varphi(q)}{q}x.$$

86. 组合筛法函数.

(a) 证明对任意数论函数 χ 有

$$\mu\chi * \mathbf{1}(n) = \sum_{d\mid \frac{m}{q}} \mu(d)\{\chi(d)-\chi(qd)\} \qquad (n \geqslant 1),$$

其中 $q := P^-(n)$, $m := \prod_{p|n} p$.

(b) 令 $\mathcal{P}$ 为素数类, y 为实数. 定义 $P(y) := \displaystyle\prod_{p\leqslant y,\, p\in\mathcal{P}} p$. 证明若 χ_1 和 χ_2 满足以下三个条件

(α) $\chi_i(d) = 0$ 或 1 (若 $d \mid P(y)$),

(β) $\chi_i(d) = 1 \Rightarrow$ 对任意 $t \mid d$, $\chi_i(t) = 1$,

(γ) $\chi_i(d) = 1$, $\mu(d) = (-1)^{i-1} \Rightarrow$ 当 $pd \mid P(y)$, $p < P^-(d)$ 时有 $\chi_i(pd) = 1$,

那么当 n 整除 $P(y)$, $q = P^-(n)$ 时有

$$(-1)^i\mu(d)\{\chi_i(d)-\chi_i(qd)\} \geqslant 0 \qquad (d \mid (m/q)),$$

---

[10] 可将之除以 2, 见习题 276, 第 426 页.

并推出

$$\mu\chi_1 * \mathbf{1}(n) \leqslant \delta(n) \leqslant \mu\chi_2 * \mathbf{1}(n) \qquad \big(n \mid P(y)\big). \tag{4.101}$$

(c) 证明定理 4.3 中定义的函数 μ_1 和 μ_2 满足关系式 (4.101).

第五章　极阶

§5.1　简介和定义

虽然均阶从直观上体现了数论函数的行为, 但从个体变化的角度讲, 它所反映的信息就非常粗略了. 本章将通过几个具代表性的例子来阐明单个函数值在一定意义下 (解释见后文) 最优区间估计的常用方法.

令 f 为数论函数. 用 g, h 表示一般的单调 "初等" 函数. 如前, f 的性质可用下述式子之一来刻画:

(a) $f(n) = O(g(n)) \qquad (n \geqslant n_0)$,

(b) $f(n) = o(g(n)) \qquad (n \to \infty)$,

(c) $f(n) = \{1 + o(1)\}g(n) \qquad (n \to \infty)$,

(d) $f(n) = g(n) + O(h(n)) \qquad (n \geqslant n_0)$.

在 (d) 中自然希望 $h(n)$ 是 $o(g(n))$. 这些渐近关系的最优性又可用如下关系之一来描述 (假定 $g(n)$ 在无穷远点附近严格为正):

(α) $f(n) = \Omega_+(g(n)) \qquad$ (即 $\limsup f(n)/g(n) > 0$),

(β) $f(n) = \Omega_-(g(n)) \qquad$ (即 $\liminf f(n)/g(n) < 0$),

(γ) $f(n) = \Omega(g(n)) \qquad$ (即 $\limsup |f(n)|/g(n) > 0$).

记号 $f(n) = \Omega_\pm(g(n))$ 表示条件 (α) 和 (β) 同时成立. 这里符号 Ω 是特定情况下使用的记号, 实际应用中不会与 "素因子个数" 函数混淆.

对于估计函数在单点值的阶来说, 下述定义比前面提到的要更为精确.

定义 5.1　*设 f 是数论函数, g 是单调上升函数, 在无穷远点附近取正值.*

如果

$$\limsup_{n\to\infty} f(n)/g(n)=1 \qquad (\text{相应地, } \liminf_{n\to\infty} f(n)/g(n)=1),$$

则称 g 是 f 的极大阶 (相应地, 极小阶).

这样, 若已知 f 的两个极阶, 那么在差一个趋于 1 的因子的意义下, 就可知 $f(n)$ 的一种最优的区间估计. 以下将研究第二章中提到的数论函数的极阶.

§5.2　函数 $\tau(n)$

定理 5.2　设 f 是乘性函数, 满足

$$\lim_{p^\nu\to\infty} f(p^\nu)=0,$$

那么 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=0$.

推论 5.3　对任意 $\varepsilon>0$, 有 $\tau(n)=O_\varepsilon(n^\varepsilon)$.

对 $f(n)=\tau(n)/n^\varepsilon$ 用定理 5.2 即得推论. 事实上, 对 $q=p^\nu$ 有

$$f(q)=\frac{\nu+1}{p^{\nu\varepsilon}}\leqslant 2(1+\ln q)/q^\varepsilon\to 0 \qquad (q\to\infty).$$

定理 5.2 的证明　令 q 为素数的幂. 由题设知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在整数 $Q=Q(\varepsilon)$, 使得

$$q>Q\Rightarrow |f(q)|\leqslant\varepsilon.$$

考虑以下分拆

$$Q_1:=\{q\,:\,q\leqslant Q,\,|f(q)|\leqslant 1\},$$
$$Q_2:=\{q\,:\,q\leqslant Q,\,|f(q)|>1\},$$
$$Q_3:=\{q\,:\,q>Q\}.$$

每个整数 n 可唯一地分解为

$$n=n_1n_2n_3, \qquad \text{其中 } n_i:=\prod_{q\| n,\ q\in Q_i} q \qquad (i=1,2,3).$$

显然 n_i 两两互素, 故

$$f(n)=f(n_1)f(n_2)f(n_3). \tag{5.1}$$

由 Q_1 的定义知 $|f(n_1)|\leqslant 1$. 由于 Q_2 包含于使 $|f(q)|>1$ 的 q 构成的集合, 存在与 ε 无关的常数 A, 使得

$$|f(n_2)|\leqslant A.$$

另外, 除有限个整数 n 外, 有 $|f(n_3)| \leqslant \varepsilon$. 这样, 由 (5.1) 知

$$\limsup_{n\to\infty} |f(n)| \leqslant A\varepsilon.$$

命题由此得证. □

下述结论说明了推论 5.3 远非最佳: ε 只能以 $c/\ln_2 n$ 的速度趋于零.

定理 5.4 $\tau(n)$ 的一个极大阶是 $(\ln 2)(\ln n)/\ln_2 n$.

证明 对每个 $\varepsilon > 0$, 不等式

$$\tau(n) < n^{(\ln 2+\varepsilon)/\ln_2 n} \tag{5.2}$$

对 $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ 成立, 且

$$\tau(n) > n^{(\ln 2-\varepsilon)/\ln_2 n} \tag{5.3}$$

对无穷多个 n 成立.

容易得到上界估计. 对任意参数 t, $2 \leqslant t \leqslant n$, 有

$$\begin{aligned}\tau(n) = \prod_{p^\nu \| n} (\nu+1) &\leqslant \prod_{p^\nu \| n,\, p\leqslant t} (\nu+1) \prod_{p^\nu \| n,\, p>t} 2^\nu \\ &\leqslant \Big(1+\frac{\ln n}{\ln 2}\Big)^t \Big(\prod_{p^\nu \| n} p^\nu\Big)^{\ln 2/\ln t} \leqslant \exp\Big\{t(2+\ln_2 n) + \frac{\ln 2\cdot \ln n}{\ln t}\Big\}.\end{aligned}$$

取参数 $t = \ln n/(\ln_2 n)^3$, 得

$$\tau(n) \leqslant \exp\Big\{\frac{\ln 2\cdot\ln n}{\ln_2 n}\Big(1+O\Big(\frac{\ln_3 n}{\ln_2 n}\Big)\Big)\Big\}, \tag{5.4}$$

从中立得 (5.2).

为得到下界估计 (5.3), 需寻求有 “许多” 素因子的整数, 其中自然的选择便是

$$n_k := \prod_{1\leqslant j\leqslant k} p_j \qquad (k=1,2,\ldots), \tag{5.5}$$

其中 $\{p_j : j \geqslant 1\} = \{2,3,5,\ldots\}$ 是所有素数组成的渐升列. 这样 $\tau(n_k) = 2^k$, 且

$$\ln n_k = \vartheta(p_k) = \sum_{p\leqslant p_k} \ln p \leqslant \pi(p_k)\ln p_k = k\ln p_k.$$

这说明

$$\ln \tau(n_k) \geqslant (\ln 2\cdot \ln n_k)/\ln p_k. \tag{5.6}$$

要证的不等式 (5.3) 由如下形式的 Tchébychev 估计 (2.29) 可得:

$$\ln n_k = \vartheta(p_k) \geqslant A p_k, \tag{5.7}$$

其中 A 是适当的常数. 将 (5.7) 代入 (5.6), 得

$$\ln \tau(n_k) \geqslant \frac{\ln 2 \cdot \ln n_k}{\ln_2 n_k}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\ln_2 n_k}\Big)\Big\}, \tag{5.8}$$

推出了 (5.3). □

注 $\tau(n)$ 的极小阶显然: $\tau(n) \geqslant 2$, 且当 n 是素数时, 等号成立.

§5.3 函数 $\omega(n)$ 和 $\Omega(n)$

由乘性易知, 对任意整数 $n \geqslant 1$, 有

$$2^{\omega(n)} \leqslant \tau(n) \leqslant 2^{\Omega(n)} \leqslant n, \tag{5.9}$$

其中每个不等式都是最优的. 前两个等号成立当且仅当 n 无平方因子; 第三个等号成立当且仅当 n 是 2 的幂.

由之即得 $\omega(n)$ 和 $\Omega(n)$ 的极阶, 其中极小阶是显然的.

一方面, (5.4) 和 (5.9) 说明

$$\omega(n) \leqslant \{1 + o(1)\} \ln n / \ln_2 n \qquad (n \to \infty).$$

由 (5.8), 此上界估计在相差一个 $\{1 + o(1)\}$ 因子的意义下最优. 这是因为 (5.8) 中出现的 n_k 无平方因子.

$\Omega(n)$ 的情形更为简单: (5.9) 中最后一个等号对于无穷多个 n 成立.

于是证明了如下结论.

定理 5.5 (i) $\omega(n)$ 的一个极大阶是 $\ln n / \ln_2 n$.

(ii) $\Omega(n)$ 的一个极大阶是 $\ln n / \ln 2$.

§5.4 Euler 函数 $\varphi(n)$

Euler 示性函数是乘性函数, 它在素数的幂上的值为

$$\varphi(p^\nu) = p^\nu(1 - p^{-1}), \tag{5.10}$$

可参见 §2.7. 于是有

$$\varphi(n) \leqslant n \qquad (n \geqslant 1), \tag{5.11}$$

且对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\varphi(n) \geqslant n^{1-\varepsilon} \qquad (n \geqslant n_0(\varepsilon)). \tag{5.12}$$

上界估计 (5.11) 显然. 对 $f(n) = n^{1-\varepsilon}/\varphi(n)$ 用定理 5.2 即得 (5.12).

下述结论细化了这些估计.

定理 5.6 $\varphi(n)$ 的一个极大阶是 n, 一个极小阶是

$$\mathrm{e}^{-\gamma} n/\ln_2 n,$$

其中 γ 是 Euler 常数.

证明 由 (5.10) 立得第一个结论. 下证第二个结论. 注意到

$$\varphi(n) = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right) \geqslant n\prod_{p\leqslant q}\left(1-\frac{1}{p}\right), \tag{5.13}$$

其中 q 是满足 $\pi(q) \geqslant \omega(n)$ 的整数. 由 Tchébychev 下界估计 (定理 1.3), 当

$$q/\ln q \geqslant (\omega(n)/\ln 2) + 4$$

时该条件成立. 特别地, 当 A 为适当的正常数时 $q = \lfloor A\omega(n)\ln\omega(n)\rfloor$ 即可. 由定理 5.5 (i), 在此情形下

$$q \ll \ln n.$$

从而由 (5.13), 用 Mertens 公式便得

$$\varphi(n) \geqslant n\frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\ln q}\left\{1+O\left(\frac{1}{\ln q}\right)\right\} \geqslant n\frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\ln_2 n}\left\{1+O\left(\frac{1}{\ln_2 n}\right)\right\}. \tag{5.14}$$

为完成定理 5.6的证明, 只须验证该下界估计对恰当的子列是渐近可达的. 而对 (5.5) 中定义的 n_k, 由如下形式的 Tchébychev 估计 (2.29)

$$\ln_2 n_k = \ln\vartheta(p_k) = \ln p_k + O(1)$$

知

$$\frac{\varphi(n_k)}{n_k} = \prod_{p\leqslant p_k}(1-p^{-1}) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\ln p_k}\left\{1+O\left(\frac{1}{\ln p_k}\right)\right\} = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\ln_2 n_k}\left\{1+O\left(\frac{1}{\ln_2 n_k}\right)\right\},$$

命题于是得证. □

§5.5 函数 $\sigma_\kappa(n)$, $\kappa > 0$

在 §2.2 中曾定义数论函数

$$\sigma_\kappa(n) = \sum_{d|n} d^\kappa \qquad (\kappa \in \mathbb{R}).$$

它是乘性函数 ($\sigma_\kappa = j^\kappa * \mathbf{1}$), 且等式 $\sigma_\kappa(n) = n^\kappa \sigma_{-\kappa}(n)$ 说明了只须研究参数为正的情形下的极阶 ($\kappa = 0$ 的情形已知: $\sigma_0 = \tau$).

易知

$$\sigma_\kappa(p^\nu) = \frac{p^{(\nu+1)\kappa} - 1}{p^\kappa - 1} = p^{\nu\kappa} \frac{1 - p^{-(\nu+1)\kappa}}{1 - p^{-\kappa}}, \tag{5.15}$$

从而

$$\sigma_\kappa(n) \geqslant n^\kappa \qquad (n \geqslant 1). \tag{5.16}$$

且对任意 $\varepsilon > 0$, 由定理 5.2 知

$$\sigma_\kappa(n) \leqslant n^{\kappa(1+\varepsilon)} \qquad (\kappa > 0,\, n \geqslant n_0(\varepsilon)). \tag{5.17}$$

当 $\kappa \geqslant 1$ 时, σ_κ 极阶的研究与 $\varphi(n)$ 类似, 可化归到上节的方法. 下界估计 (5.16) 给出了 $\sigma_\kappa(n)$ 的一个显然的极小阶, 而上界估计 (5.17) 容易细化: 事实上, 若如 (5.13) 那样取 q, 得

$$\frac{\sigma_\kappa(n)}{n^\kappa} \leqslant \prod_{p \leqslant q} \left(1 - \frac{1}{p^\kappa}\right)^{-1} =: \zeta(\kappa, q). \tag{5.18}$$

当 $\kappa > 1$ 时乘积收敛, 其在 $\kappa = 1$ 处的极限等于 $\mathrm{e}^\gamma \ln q + O(1)$. 另外, $\ln q \leqslant \ln_2 n + O(1)$. 特别地, 有

$$\sigma_\kappa(n) n^{-\kappa} \leqslant \begin{cases} \mathrm{e}^\gamma \ln_2 n + O(1), & \text{若 } \kappa = 1, \\ \zeta(\kappa)\Big\{1 + O_\kappa\big(\frac{1}{(\ln n)^\kappa}\big)\Big\}, & \text{若 } \kappa > 1. \end{cases} \tag{5.19}$$

当 $\{m_k\}$ 如下定义时, 这些上界渐近可达:

$$m_k := \Big(\prod_{1 \leqslant j \leqslant k} p_j\Big)^{\ell(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

其中 $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \cdots$ 表示所有素数的渐升列, $\ell(k) = \lfloor \ln k \rfloor$. 证明细节留给读者.

当 $0 < \kappa < 1$ 时, 上述推理仍然成立, 不过 (5.18) 中因子 $\zeta(\kappa, q)$ 的渐近性质更为复杂. 用 Abel 求和法, 从素数定理推出

$$\ln \zeta(\kappa, q) \sim q^{1-\kappa}/(1-\kappa)\ln q. \tag{5.20}$$

然而最强的形式结果也不能具体给出与 $\zeta(\kappa, q)$ 等价的初等函数. 另一个内蕴的困难是, 素数定理中余项的波动性说明了 (5.18) 中的 q 值作为 n 的函数尚无精确的估计. 当 $\kappa \geqslant 1$ 时, 这并无影响, 因为此时 $\zeta(\kappa, q)$ 作为 $\ln q$ 的函数是速降的; 然而 $0 < \kappa < 1$ 的情形却在本质上是不同的.

上述结果可概括成如下定理.

定理 5.7 对 $\kappa > 0$, $\sigma_\kappa(n)$ 的一个极小阶是 n^κ. 当 $\kappa > 1$时, 其一个极大阶是 $\zeta(\kappa)n^\kappa$; 当 $\kappa = 1$ 时, 其一个极大阶是 $\mathrm{e}^\gamma n \ln_2 n$; 当 $0 < \kappa < 1$ 时, 有

$$\sigma_\kappa(n) \leqslant n^\kappa \exp\left\{(1 + o(1))\frac{(\ln n)^{1-\kappa}}{(1-\kappa)\ln_2 n}\right\},$$

反向不等式对无穷多个 n 成立.

注记

§5.1 — §5.5 Ramanujan (1915) 最先系统地研究了数论函数的极阶. 他不仅致力于确定 $\tau(n)$ 的大数值, 而且还力求得到取大数值的点的具体分布. 当前数论函数极阶的研究是数论中活跃的分支之一, 有许多强大的方法和原创性的技巧. Nicolas (1988) 撰写了精彩的综述, 内有详尽的参考文献表. 感兴趣的读者可在 Nicolas (1974/1975, 1978, 1983a), Erdős 和 Nicolas (1981a,b, 1989), Erdős 和 Tenenbaum (1989b) 及 Erdős 和 Sárközy (1994) 中找到其他范例、问题及猜想.

与极阶有关的问题, 尤其是那些蕴含整数精细结构的问题, 通常是高度非平凡的. 一般说来, 与 "大数值" 相关的问题可自然地导出关于它们的分布的问题. 然而这方面往往相当困难. 即便是著名的 $\tau(n)$ 函数以及 Ramanujan 高合数的情形, 目前得到的结果也尚不完全, 见 Nicolas (1988).

§5.5 $\zeta(\kappa, q)$ 的渐近性质见第三部分引理 5.16.

习题

87. 何为 "r 进制表示各位和" 函数的极阶?

88. 令 $\delta_r(n) := \left|\{m_1, \ldots, m_r : n = [m_1, \ldots, m_r]\}\right|$. 计算 $\delta_r * \mathbf{1}$ 并证明 δ_r 是乘性函数. 确定 $\ln \delta_r$ 的极阶.

89. 本题将重现 Erdős 和 Nicolas (1981b) 关于函数 $F(n) = \varphi(n) + \varphi(n+1)$ 的一个结果.

(a) 证明 $F(n) \leqslant 3n/2 \quad (n > 1)$.

(b) 令 $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \ldots$ 为所有素数的渐升列, 并记 $N_k := 1 + \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} p_j$. 证明 $p \mid N_k \Rightarrow p > p_k$ 且 $p \mid (N_k + 1) \Rightarrow p = 2$ 或

$p > p_k$. 证明 $\ln N_k \asymp p_k \asymp k \ln k$, 并推出, 当 $k \to \infty$ 时, $\varphi(N_k) \sim N_k$ 且 $\varphi(N_k+1) \sim \frac{1}{2}N_k$, 何为 $F(n)$ 的极大阶?

(c) 证明当 $n \to \infty$ 时, 有 $\varphi(n) \sim n \prod_{p|n,\, p \leqslant \ln n} \Big(1 - 1/p\Big)$.

(d) 由上推出

$$F(n) \geqslant \{1+o(1)\}2\mathrm{e}^{-\gamma/2}n\big/\sqrt{\ln_2 n} \quad (n \to \infty). \tag{5.21}$$

[可用不等式 $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.]

(e) 证明存在整数 $r = r(k)$, 使得

$$\prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \Big(1 - \frac{1}{p_j}\Big) \sim \prod_{r < j \leqslant k} \Big(1 - \frac{1}{p_j}\Big) \quad (k \to \infty).$$

(f) 令 M_k 为同余方程

$$M \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p_1 \cdots p_r), \quad M \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, p_{r+1} \cdots p_k)$$

的最小解. 证明

$$\max\Big(\frac{\varphi(M_k)}{M_k}, \frac{\varphi(M_k+1)}{M_k+1}\Big) \leqslant (1+o(1)) \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \Big(1 - \frac{1}{p_j}\Big) \qquad (k \to \infty),$$

并推出 (5.21) 的第二项是 $F(n)$ 的极小阶.

90. $\tau(n)$ 极大阶的 Ramanujan 估计.

(a) 令 $\varepsilon > 0$. 证明当 $n = N_\varepsilon := \prod_p p^{\nu_p}$ 时 $\tau(n)/n^\varepsilon$ 达到极大值, 其中 $\nu_p := \lfloor 1/(p^\varepsilon - 1) \rfloor$.

(b) 记 $x_k := (1+1/k)^{1/\varepsilon}$ $(k \geqslant 1)$, $K := \nu_2 = \lfloor 1/(2^\varepsilon - 1) \rfloor$. 证明

$$N_\varepsilon = \prod_{1 \leqslant k \leqslant K} \Big(\prod_{x_{k+1} < p \leqslant x_k} p \Big)^k.$$

(c) 使用 Tchébychev 记号

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \ln p, \qquad \pi(x) := \sum_{p \leqslant x} 1 \quad (x > 0),$$

证明

$$\ln N_\varepsilon = \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \vartheta(x_k) = \vartheta(x_1) + O(x_1^{3/4}),$$

$$\ln \tau(N_\varepsilon) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \pi(x_k) \ln(1+1/k) = (\ln 2)\pi(x_1) + O(x_1^{3/4}).$$

(d) 设 $R(x)$ 是单调上升函数, 使得 $\pi(x)-\mathrm{li}(x)\ll R(x)$ 且 $\vartheta(x)-x\ll R(x)$. 假定 $x^{4/5}\ll R(x)\ll x/(\ln x)^2$. 证明对任意整数 $n\geqslant 1$, 有

$$\ln\tau(n)\leqslant(\ln 2)\,\mathrm{li}(x_1)-\varepsilon x_1+\varepsilon\ln n+O(R(x_1)).$$

选取恰当的 ε, 证明

$$\ln\tau(n)\leqslant(\ln 2)\,\mathrm{li}(\ln n)+O(R(\ln n))\quad(n\geqslant 2).\tag{5.22}$$

特别地,

$$\ln\tau(n)\leqslant\{1+O(1/\ln_2 n)\}(\ln 2)(\ln n)/\ln_2 n\qquad(n\geqslant 2).$$

(e) 证明不等式 (5.22) 对无穷多个 n 成立.

91. (a) 确定函数 $n\mapsto\ln\tau(n^2)$ 的极阶.

(b) 令 $S:=\{s:p\mid s\Rightarrow p^2\mid s\}$ 为满平方数之集. 何为函数 $s\mapsto\ln\tau(s)$ $(s\in S)$ 的极大阶?

(c) 令 $\omega_1(n)$ 为使得 $p^2\nmid n$ 的 n 的素因子 p 的个数. 证明

$$\tau(n)\leqslant D(n)^{\lambda+o(1)}2^{(1-\lambda)\omega_1(n)}\quad(n\to\infty),$$

其中 $\lambda:=(\ln 3)/\ln 4$, $D(n):=\max_{m\leqslant n}\tau(m)$.

92. 令 $\alpha>1$. 记 $F_\alpha(n):=\sum_{1\leqslant i<\tau(n)}\big((d_{i+1}/d_i)-1\big)^\alpha$, 其中 $\{d_j\}_{j=1}^{\tau(n)}$ 表示 n 的所有因子的渐升列.

(a) 记 $\chi(n;u,v):=\begin{cases}1, & \text{若}\, d\mid n\Rightarrow d\notin\,]u,v],\\ 0, & \text{若}\,\exists\, d\mid n,\ u<d\leqslant v.\end{cases}$

证明
$$F_\alpha(n)=\alpha\int_1^n\int_1^v\chi(n;u,v)(v-u)^{\alpha-2}(\alpha v-u)u^{-1-\alpha}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

(b) 令 n 为整数. 若有限序列 $\{n_j:1\leqslant j\leqslant k\}$ 使得 $n_1=1$, $n_j\mid n_{j+1}$ $(1\leqslant j<k)$, $n_k=n$, 则称之为 n 的分解. 若实数列 $\{\varepsilon_j:1<j\leqslant k\}$ 使得对任意 $j\in[2,k]$ 及任意 $z\in\,]\sqrt{n_{j-1}},\sqrt{n_j}\,]$, 区间 $]z,(1+\varepsilon_j)z]$ 含有至少一个 n_j 的因子, 则说它相对于 $\{n_j\}$ 是 "好的".

证明: 对 n 的任意分解 $\{n_j:1\leqslant j\leqslant k\}$ 以及任意相对于它的好的数列 $\{\varepsilon_j:1<j\leqslant k\}$ 有①

$$F_\alpha(n)\leqslant\alpha\sum_{2\leqslant j\leqslant k}(1+\varepsilon_j)\varepsilon_j^{\alpha-1}\ln(n_j/n_{j-1}).$$

---

① 这是 Erdős 猜想证明的第一步. 由此可得, $\liminf F_\alpha(n)<\infty$ 对任意 $\alpha>1$ 成立. 参见 Vose (1984). 利用这一点加上鞍点方法的简易形式, Tenenbaum (1987) 证明了, 对任意 $\alpha>1$, $F_\alpha(n!)$, $F_\alpha([1,2,\ldots,n])$ 及 $F_\alpha(\prod_{p\leqslant n}p)$是一致有界的.

93 考虑数论函数 $f(n) := \omega(n)\sigma(n)/n$.

(a) 对 $k \geqslant 1$, 令 $r = r(k) := \lfloor \ln k \rfloor$ 及 $n_k := \Big(\prod_{1 \leqslant j \leqslant r} p_j^r \Big) \Big(\prod_{r < j \leqslant k} p_j \Big)$, 其中 p_j 是第 j 个素数. 承认素数定理, 证明 $f(n_k) \sim e^\gamma \ln n_k$ $(k \to \infty)$.

(b) 证明 $f(n)$ 的一个极大阶是 $e^\gamma \ln n$.

(c) 应用: 令 $A(n) := \prod_{p^\nu \| n} \nu p$ 为 Alladi-Erdős (1977, 1979) 函数. 令 $A^*(n) := \sum_{d|n} A(d)/d$. 确定加性函数 $g(n)$, 使得

$$A^*(n) = \sigma(n)\{\omega(n) + g(n)\}/n.$$

证明 $g(p^\nu) \ll 1/p$ 及 $g(n) \ll \ln_3 n$. 推出 $A^*(n)$ 的极大阶是 $e^\gamma \ln n$.②

② 该结果改进了 Sitaramaiah 和 Subbarao (1993) 的估计.

第六章　van der Corput 方法

§6.1　简介和回顾

20 世纪 20 年代, van der Corput 发展了一种三角和的估计方法, 它在数论中有许多应用. Dirichlet 因子问题以及圆内整点问题 (计算满足 $m^2+n^2 \leqslant x$ 的整数对 $(m,n) \in (\mathbb{Z}^+)^2$ 的个数) 即是该理论中的典型问题. 更一般地, 它还可用于研究平面围道中整点的个数, 见习题 98.

早在 1922 年, van der Corput 就证明了 Dirichlet 问题中余项的阶为 $\ll_\varepsilon x^{33/100+\varepsilon}$. 此后关于该问题或类似问题的工作大量出现, 它们都基于 van der Corput 的思想, 见关于 §3.2 的注记.

本章的主要目的是阐述该方法的原理, 只涉及其最简单的形式, 从中导出 Voronoï 定理, 余项为 $O(x^{1/3})$ 的圆内整点估计, 以及 ζ 函数在特征线上指数为 1/6 的上界估计 (见第二部分 §3.4). 对于该方法更深刻的研究, 感兴趣的读者可参考 Titchmarsh (1951) 的著作, van der Corput 最初的文章 (1922—1937) 以及 Kolesnik 的工作 (1981, 1985), Bombieri 和 Iwaniec (1986), Iwaniec 和 Mozzochi (1988), Huxley 和 Watt (1988), Watt (1989), Huxley (1990, 1993a,b, 2005), Huxley 和 Kolesnik (1991) 等进展. Graham 和 Kolesnik (1991) 的专著对该方向的现状作了详尽的介绍. Huxley (1996) 的专著可谓面面俱到, 其中还附有应用.

该方法将用到 Poisson 求和公式. 毋庸置疑, 这是研究三角和最自然的方法. 定义 Fourier 变换为

$$\widehat{f}(\vartheta) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}(-\vartheta t)\,\mathrm{d}t \qquad (f \in L^1(\mathbb{R})). \tag{6.1}$$

下列结论点明了 Poisson 求和公式适用的场合.

定理 6.1　设 $f \in L^1(\mathbb{R})$. 假定级数

$$\varphi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+t) \tag{6.2}$$

对任意 t 收敛, 且定义了一个在点 0 连续而在 $[0,1]$ 上有界变差的函数, 那么有

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|\nu|\leqslant N} \widehat{f}(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n). \tag{6.3}$$

证明　Fourier 级数的 Jordan 定理 (例如见 Titchmarsh (1939) 第 406 页) 说明了所有周期的、且在某周期上有界变差的函数在其任一连续点上等于其 Fourier 级数之和. 由于 φ 的 ν 阶 Fourier 系数是 $\widehat{f}(\nu)$, 由此推出了 (6.3). □

§6.2　三角积分

本节讨论三角积分上界估计的两个结论, 后面将会用到.

定理 6.2　设 $f \in \mathcal{C}^1(]a,b[)$ 使得 $f'(t)$ 单调且在 $]a,b[$ 上同号, 并满足 $m := \inf_{a<t<b} |f'(t)| > 0$, 这样

$$\Big|\int_a^b \mathrm{e}(f(t))\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \frac{1}{\pi m}. \tag{6.4}$$

证明　不失一般性, 可设 f' 在 $]a,b[$ 上单调下降. 于是有

$$\begin{aligned}\Big|2\pi\int_a^b \mathrm{e}(f(t))\,\mathrm{d}t\Big| &= \Big|\int_a^b \frac{\mathrm{d}\{\mathrm{e}(f(t))\}}{f'(t)}\Big| = \Big|\Big[\frac{\mathrm{e}(f(t))}{f'(t)}\Big]_a^b - \int_a^b \mathrm{e}(f(t))\,\mathrm{d}\Big\{\frac{1}{f'(t)}\Big\}\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{|f'(a)|} + \frac{1}{|f'(b)|} + \frac{1}{|f'(b)|} - \frac{1}{|f'(a)|} \leqslant \frac{2}{m}.\end{aligned}$$
□

定理 6.3　设 $f\in\mathcal{C}^2(]a,b[)$ 使得 $f''(t)$ 在 $]a,b[$ 上同号, 且 $r := \inf_{a<t<b} |f''(t)| > 0$, 那么

$$\Big|\int_a^b \mathrm{e}(f(t))\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \frac{4}{\sqrt{\pi r}}. \tag{6.5}$$

证明　不妨设 $f''(t) \leqslant -r < 0$ 对于 $a < t < b$ 成立, 那么 $f'(t)$ 在 $]a,b[$ 上至多取一次零值. 假定 $t = c$ 是 $f'(t)$ 的零点 (若 $f'(t)$ 不取零值, 那么推理过程类似, 甚至更为简单). 在此情形下, 可记

$$I := \int_a^b \mathrm{e}(f(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^{b} = I_1 + I_2 + I_3,$$

其中正参数 δ 满足 $a+\delta \leqslant c \leqslant b-\delta$. 这样

$$|f'(t)| = \left|\int_c^t f''(v)\,\mathrm{d}v\right| \geqslant r|t-c| \geqslant r\delta$$

对于 $t \in [a, c-\delta] \cup [c+\delta, b]$ 成立. 由定理 6.2, 得

$$|I_1| + |I_3| \leqslant \frac{2}{\pi r\delta}.$$

显然有 $|I_2| \leqslant 2\delta$, 故

$$|I| \leqslant 2\delta + \frac{2}{\pi r\delta}.$$

取 $\delta = \sqrt{1/\pi r}$ 便得题设结论. 显然, 对这样的 δ 值, 当 $c < a+\delta$ 或 $c > b-\delta$ 时, 同样的上界估计仍成立. □

§6.3 三角和

var der Corput 的初衷是用一个积分来具体逼近三角和的.

定理 6.4 设 $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ 使得 $f'(t)$ 在 $]a,b[$ 上单调. 令

$$\alpha := \inf_{a<t<b} f'(t), \qquad \beta := \sup_{a<t<b} f'(t),$$

那么对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\sum_{a<n\leqslant b} \mathrm{e}(f(n)) = \sum_{\alpha-\varepsilon<\nu<\beta+\varepsilon} \int_a^b \mathrm{e}(f(t)-\nu t)\,\mathrm{d}t + O_\varepsilon(\ln(\beta-\alpha+2)). \tag{6.6}$$

证明 固定 $\varepsilon > 0$. 不妨设

$$-1 \leqslant \alpha - \varepsilon < 0. \tag{6.7}$$

事实上, 若将 $f(t)$ 换成 $f(t)+kt$ $(k \in \mathbb{Z})$, (6.6) 不变. 同样可假设 a 和 b 均具有 $m+\frac{1}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$ 的形式: 导致的余项在等式左边是 $O(1)$, 在等式右边 $\ll \ln(\beta-\alpha+2)$. 其中后者由交换和号及积分号, 并用显然的上界估计 $\sum_\nu \mathrm{e}(-\nu t) \ll \min(\beta-\alpha+2, 1/\|t\|)$ 易得, 其中 $\|t\|$ 表示 t 与整数集之间的距离. 最后, 假设 f' 在 $]a,b[$ 上单调下降.

令

$$F(t) := \begin{cases} \mathrm{e}(f(t)), & 若\, a < t \leqslant b, \\ 0, & 若以上不然. \end{cases} \tag{6.8}$$

可得 $\varphi(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n+t)$ 在点 0 连续 (因为 $a, b \notin \mathbb{Z}$), 在 $[0,1]$ 上有界变差. Poisson 公式 (6.3) 可写成

$$\sum_{a<n\leqslant b} \mathrm{e}(f(n)) = \sum_{|\nu|\leqslant N} \widehat{F}(\nu) + o(1) \qquad (N\to\infty),$$

其中

$$\widehat{F}(\nu) = \int_a^b \mathrm{e}(f(t)-\nu t)\,\mathrm{d}t.$$

由 (6.7), 只须证明

$$\sum_{\substack{|\nu|\leqslant N\\ \nu\notin[0,\beta+\varepsilon[}} \widehat{F}(\nu) \ll_\varepsilon \ln(\beta+2). \tag{6.9}$$

现有

$$\begin{aligned}2\pi\mathrm{i}\widehat{F}(\nu) &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}\{\mathrm{e}(f(t)-\nu t)\}}{f'(t)-\nu} = \left[\frac{\mathrm{e}(f(t)-\nu t)}{f'(t)-\nu}\right]_a^b - \int_a^b \mathrm{e}(f(t)-\nu t)\,\mathrm{d}\left\{\frac{1}{f'(t)-\nu}\right\}\\ &= (-1)^\nu\frac{\mathrm{e}(f(b))}{\alpha-\nu} + (-1)^{\nu+1}\frac{\mathrm{e}(f(a))}{\beta-\nu} + O\Big(\frac{1}{\alpha-\nu}-\frac{1}{\beta-\nu}\Big).\end{aligned}$$

其主项在 (6.9) 中的贡献显然为 $O_\varepsilon(1)$, 而

$$\begin{aligned}\text{余项的贡献} &\ll \sum_{\nu\notin[0,\beta+\varepsilon[} \frac{\beta+1}{\nu(\nu-\beta)}\\ &= (\beta+1)\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{1}{\nu(\nu+\beta)} + (\beta+1)\sum_{\nu>\beta+\varepsilon}\frac{1}{\nu(\nu-\beta)}\\ &\ll_\varepsilon \sum_{1\leqslant\nu\leqslant\beta+1}\frac{1}{\nu} + \sum_{\beta+\varepsilon<\nu\leqslant 2\beta}\frac{1}{\nu-\beta} + 2(\beta+1)\sum_{\nu>2\beta}\frac{1}{\nu^2} \ll_\varepsilon \ln(\beta+2).\end{aligned}$$

命题于是得证. □

当 $\|f'(t)\| \geqslant \vartheta$ 在 $[a,b]$ 上成立时, 在 (6.6) 的和式中只有一个 ν 被计到, 从而

$$\sum_{a<n\leqslant b} \mathrm{e}(f(n)) \ll 1/\vartheta. \tag{6.10}$$

实际应用中, 条件 $\min\|f'(t)\| > 0$ 往往不成立. 下述结论由定理 6.3 和定理 6.4 易得, 使该困难得以克服. 作为代价, 需引入一个关于二次导数的附加假设.

定理 6.5 (van der Corput 不等式) 令 $a, b\in\mathbb{R}$, $a<b$ 及 $f\in\mathcal{C}^2(]a,b])$, 满足

$$|f''(t)| \asymp \lambda > 0 \qquad (a<t<b),$$

那么

$$\sum_{a<n\leqslant b} \mathrm{e}(f(n)) \ll (b-a+1)\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}. \tag{6.11}$$

证明 不妨设 $\lambda \leqslant 1$, 否则 (6.11) 显然成立. 用定理 6.4 的记号, (6.11) 的左边

$$\begin{aligned} &\ll (\beta-\alpha+1)\max_{\nu}\left|\int_a^b \mathrm{e}(f(t)-\nu t)\,\mathrm{d}t\right| + \ln(\beta-\alpha+2) \\ &\ll (\beta-\alpha+1)\lambda^{-1/2} + \ln(\beta-\alpha+2), \end{aligned}$$

其中第二个上界估计由定理 6.3 可得. 这样有

$$\beta-\alpha = \left|\int_a^b f''(t)\,\mathrm{d}t\right| \asymp \lambda(b-a).$$

前述估计于是化为

$$\lambda^{1/2}(b-a) + \lambda^{-1/2} + 1 + \lambda(b-a) \ll \lambda^{1/2}(b-a) + \lambda^{-1/2}. \qquad \square$$

(6.6) 是 van der Corput 方法的基础, 对 (6.11) 的改进来说是不可或缺的, 见注记. 然而, 如果只限制在 (6.11) 上, 便可用较简单的方法. 它源于 (6.10) 的一个直接的证明, 形如一个最优的不等式.

引理 6.6 (Kusmin–Landau) 令 $\{x_n\}_{n=1}^N$ 为有限数列, $\vartheta \in]0, \frac{1}{2}]$, 使得

$$\vartheta < x_2 - x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_N - x_{N-1} \leqslant 1-\vartheta,$$

那么

$$\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \mathrm{e}(x_n)\right| \leqslant \cot(\pi\vartheta/2) \leqslant 2/(\pi\vartheta). \tag{6.12}$$

证明 对 $1 \leqslant n < N$, 令 $y_n := x_{n+1} - x_n$ 及

$$c_n := \mathrm{e}(x_n)/\{\mathrm{e}(x_n) - \mathrm{e}(x_{n+1})\} = 1/\{1-\mathrm{e}(y_n)\} = \frac{1}{2}\{1 + \mathrm{i}\cot(\pi y_n)\}.$$

首先注意到

$$|c_n| = |1-c_n| \leqslant \frac{1}{2|\sin(\pi y_n)|} \leqslant \frac{1}{\sin(\pi\vartheta)}.$$

易知

$$\begin{aligned} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \mathrm{e}(x_n) &= \sum_{1\leqslant n<N} c_n\{\mathrm{e}(x_n) - \mathrm{e}(x_{n+1})\} + \mathrm{e}(x_N) \\ &= \sum_{1\leqslant n<N} c_n \mathrm{e}(x_n) - \sum_{2\leqslant n\leqslant N} c_{n-1}\mathrm{e}(x_n) + \mathrm{e}(x_N) \\ &= \sum_{1<n<N} \{c_n - c_{n-1}\}\mathrm{e}(x_n) + c_1\mathrm{e}(x_1) + \{1 - c_{N-1}\}\mathrm{e}(x_N). \end{aligned}$$

从序列 y_n 的单调上升性知 $|c_n - c_{n-1}| = \frac{1}{2}\cot(\pi y_{n-1}) - \frac{1}{2}\cot(\pi y_n)$, 故

$$\Big|\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \mathrm{e}(x_n)\Big| \leqslant \frac{1}{2}\cot(\pi y_1) - \frac{1}{2}\cot(\pi y_{N-1}) + |c_1| + |1 - c_{N-1}|$$

$$\leqslant \cot(\pi\vartheta) + \frac{1}{\sin(\pi\vartheta)} = \frac{1+\cos(\pi\vartheta)}{\sin(\pi\vartheta)} = \cot(\pi\vartheta/2).$$

(6.12) 的第二个不等式源于不等式 $\cot x \leqslant 1/x$ $(0 < x < \pi/2)$. 后者可由不等式 $x\cos x - \sin x \leqslant 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$ 推出. □

定理 6.7 (Kusmin–Landau 不等式) *令 I 为 $\mathbb{R}$ 中有界区间, $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$, 使得 f' 在 I 上单调, 且满足*

$$\min_{x\in I} \|f'(x)\| \geqslant \lambda > 0, \tag{6.13}$$

那么

$$\Big|\sum_{n\in I} \mathrm{e}(f(n))\Big| \leqslant \frac{2}{\pi\lambda}.$$

证明 通过将 $f(x)$ 换成 $\pm f(x+a)$, 可设 $I = [1, N]$ 且 f 单调上升. 由关于 $\min\|f'(x)\|$ 的假设, 存在整数 k, 使得 $k + \lambda \leqslant f'(x) \leqslant k + 1 - \lambda$ 对任意 $x \in I$ 成立. 通过将 $f(x)$ 换成 $f(x) - kx$, 可设 $\lambda \leqslant f'(x) \leqslant 1 - \lambda$ 对 $x \in I$ 成立. 由微分中值定理, 差分序列 $\{f(n+1) - f(n)\}_{n=1}^{N}$ 单调上升, 且取值于 $[\lambda, 1-\lambda]$ 中. 于是可应用引理 6.6.

如前文, 从 Kusmin-Landau 定理可推出 van der Corput 不等式. 这里给出其一个实效形式. 对 $N \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b - a = N$, $I :=]a, b]$, $f \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$, $\lambda > 0$, $C > 0$, 使得 $\lambda \leqslant |f''(x)| \leqslant C\lambda$ $(\forall x \in I)$, 有

$$\Big|\sum_{n\in I} \mathrm{e}(f(n))\Big| \leqslant 3CN\sqrt{\lambda} + 6/\sqrt{\lambda}. \tag{6.14}$$

不妨设 $\lambda < \frac{1}{9}$, 否则 (6.14) 显然. 通过将 f 换成 $-f$, 可设 $f'' > 0$.

设 $[\alpha, \beta]$ 是端点为整数且包含于 $]f'(a), f'(b)]$ 的最大区间. 这样便有 $]f'(a), f'(b)] \cap \mathbb{Z} \subset [\alpha, \beta+1]$. 令 $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$ 为待定参数. 对于 $\nu \in [\alpha, \beta+1] \cap \mathbb{Z}$, 令 I_ν 为满足 $\nu - \delta < f'(x) \leqslant \nu + \delta$ 的实数 x 组成的集合, 并令 J_ν 为满足 $\nu + \delta < f'(x) \leqslant \nu + 1 - \delta$ 的实数 x 构成的集合. 由微分中值定理, 对每个 ν 有 $2\delta \geqslant \lambda|I_\nu|$. 所以至多有 $1 + 2\delta/\lambda$ 个整数 n 位于 I_ν 之中. 这样 I_ν 在和式 $\sum_{n\in I} \mathrm{e}(f(n))$ 中的贡献的绝对值有显然的上界估计:

$$(\beta - \alpha + 2)(1 + 2\delta/\lambda) \leqslant (CN\lambda + 2)(1 + 2\delta/\lambda).$$

另外, 定理 6.7 说明 J_ν 的贡献的绝对值不超过 $2/\pi\delta$. 对 ν 求和后, 可知 (6.14) 的左边 $\leqslant (CN\lambda+2)(1+2\delta/\lambda+2/\pi\delta)$. 由于 $\lambda<\frac{1}{9}$, 选取 $\delta:=\sqrt{\lambda/\pi}<\frac{1}{2}$. 这样 $1+2\delta/\lambda+2/\pi\delta\leqslant 3/\sqrt{\lambda}$. 命题于是得证. □

显然仅当 f'' 在 I 上较小时 van der Corput 不等式才有用, 否则可使用如下引理, 称之为 Weyl–van der Corput 不等式. 它基本上是 Weyl (1916, 1921) 的杰作.

引理 6.8 (Weyl–van der Corput) 对任意整数 $N\geqslant 1$, $Q\geqslant 1$ 及任意复数列 $\{z_n\}_{n=1}^N$, 有

$$\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant N} z_n\right|^2 \leqslant \left(1+\frac{N-1}{Q}\right)\sum_{|q|<Q}\left(1-\frac{|q|}{Q}\right)\sum_{1\leqslant n,\, n+q\leqslant N} z_{n+q}\overline{z}_n. \tag{6.15}$$

证明 约定当 $n\notin[1,N]$ 时 $z_n=0$. 易知

$$Q\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n = \sum_{1\leqslant q\leqslant Q}\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_{n+q} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{1\leqslant q\leqslant Q} z_{n+q}.$$

只有那些满足 $1-Q\leqslant n\leqslant N-1$ 的 n 可以对最后一个和式有非零的贡献. 这样的 n 至多有 $N-1+Q$ 个.

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$\begin{aligned}
Q^2\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n\right|^2 &\leqslant (N-1+Q)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{1\leqslant q\leqslant Q} z_{n+q}\right|^2\\
&= (N-1+Q)\sum_{1\leqslant q_1\leqslant Q}\sum_{1\leqslant q_2\leqslant Q}\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_{n+q_1}\overline{z}_{n+q_2}\\
&= (N-1+Q)\sum_{1\leqslant q_1\leqslant Q}\sum_{1\leqslant q_2\leqslant Q}\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_{m+q_1-q_2}\overline{z}_m\\
&= (N-1+Q)\sum_{-Q\leqslant q\leqslant Q} r(q)\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_{m+q}\overline{z}_m,
\end{aligned}$$

其中 $r(q)=\left|\{(q_1,q_2):1\leqslant q_1\leqslant Q,\ 1\leqslant q_2\leqslant Q,\ q_1-q_2=q\}\right|$. 显然

$$r(-q)=r(q)=\left|\{q_1:\max(0,q+1)\leqslant q_1\leqslant\min(Q,Q+q)\}\right|=Q-|q|.$$

上式两边除以 Q^2 后就得到 (6.15). □

当函数 f 三阶连续可微时, 可得到定理 6.5 的以下变体 (见 Titchmarsh (1951) §5.9).

定理 6.9 设 $N\in\mathbb{N}^*$, $a,b\in\mathbb{Z}$, $b-a=N$, $I:=]a,b]$, $f\in C^3(I,\mathbb{R})$, $\lambda>0$, 使得

$$|f'''(t)|\asymp\lambda>0\qquad(t\in I),$$

那么

$$\sum_{n\in I} \mathrm{e}(f(n)) \ll N\lambda^{1/6} + N^{1/2}\lambda^{-1/6}. \tag{6.16}$$

证明 将 Weyl 引理用于 $z_n := \mathrm{e}(f(n))$ $(a < n \leqslant b)$ 的情形. 在附加条件 $1 \leqslant Q \leqslant N$ 下, 通过单独处理 $q = 0$ 的情形, 得

$$\left|\sum_{n\in I} \mathrm{e}(f(n))\right| \leqslant \frac{2N}{\sqrt{Q}} + 2\left\{\frac{N}{Q}\sum_{1\leqslant q<Q} |S_q(f)|\right\}^{1/2}, \tag{6.17}$$

其中 $S_q(f) := \sum_{a<n\leqslant b-q} \mathrm{e}(g_q(n))$, $g_q(x) := f(x+q) - f(x)$. 而

$$|g_q''(x)| \asymp q\lambda \qquad (a < x \leqslant b-q),$$

这由 f'' 的一阶 Lagrange 余项的 Taylor 公式立得. 用定理 6.5 来对 $S_q(f)$ 作上界估计, 得到

$$\sum_{a<n\leqslant b} \mathrm{e}(f(n)) \ll \frac{N}{\sqrt{Q}} + \left\{\frac{N}{Q}\sum_{1\leqslant q<Q} \left(N(q\lambda)^{1/2} + (q\lambda)^{-1/2}\right)\right\}^{1/2}$$

该估计 $\ll NQ^{-1/2} + N(Q\lambda)^{1/4} + N^{1/2}(Q\lambda)^{-1/4}$. 在条件 $1 \leqslant \lambda^{-1/3} \leqslant N$ 下, 可选择 $Q = \lfloor \lambda^{-1/3} \rfloor$. 这样前两项具有相同的阶 $N\lambda^{1/6}$. 如此便得到 (6.16). 显然 (6.16) 对于 $\lambda > 1$ 或 $\lambda < 1/N^3$ 成立. □

适当地递归上述过程, 可得以下结论. 证明略去.

定理 6.10 (van der Corput) 设 N, R 是整数, 使得 $N \geqslant 1$, $R \geqslant 2$. 设 $I \subset [N+1, 2N]$ 是区间, $f \in \mathcal{C}^R(I, \mathbb{R})$. 又假设存在常数 $F = F(I)$, 使得

$$FN^{-r} \ll |f^{(r)}(x)| \ll FN^{-r} \qquad (x \in I,\ 1 \leqslant r \leqslant R),$$

那么

$$\sum_{n\in I} \mathrm{e}(f(n)) \ll N\{F^u N^{-v} + F^{-1}\},$$

其中 $u := 1/(2^R - 2)$, $v := R/(2^R - 2)$.

§6.4 在 Voronoï 定理中的应用

我们证明 Dirichlet 问题中的余项是 $O_\varepsilon(x^{1/3+\varepsilon})$. 同样的方法可得到圆内整点问题有相同的结果 (见习题 99). 还可得到估计 $\zeta(1/2+it) \ll_\varepsilon t^{1/6+\varepsilon}$ (见习题 95 及第二部分 §3.4).

定理 6.11 (Voronoï, 1903) 对 $x \geqslant 2$ 有

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)=x(\ln x+2\gamma-1)+O(x^{1/3}\ln x). \tag{6.18}$$

证明 令 $N:=\lfloor\sqrt{x}\rfloor$. 双曲律 (见 (3.4)) 说明了 (6.18) 的左边等于

$$2\sum_{d\leqslant N}\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor-N^2=2\sum_{d\leqslant N}\left(\frac{x}{d}-B_1\Big(\frac{x}{d}\Big)\right)-N-N^2,$$

其中 $B_1(t)=\langle t\rangle-\frac{1}{2}$ 表示第一个 Bernoulli 函数. 用定理 0.8 估计 $\sum_{d\leqslant N}1/d$, 可将上式写成 $P(x)-2R(x)$ 的形式, 其中

$$P(x):=2x\Big(\ln N+\gamma+\frac{1}{2N}+O\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)-N-N^2,$$
$$R(x):=\sum_{d\leqslant N}B_1\Big(\frac{x}{d}\Big).$$

令 $N=\sqrt{x}-\vartheta$, $0\leqslant\vartheta<1$. 将 $P(x)$ 在 $\vartheta/\sqrt{x}$ 处一阶展开, 得

$$P(x)=x(\ln x+2\gamma-1)+O(1),$$

这样 (6.18) 等价于

$$R(x)\ll x^{1/3}\ln x. \tag{6.19}$$

为证明 (6.19), van der Corput 的技巧主要是将 $B_1(x/d)$ Fourier 展开. 交换和号并将对 $\sin(2\pi jx/d)$ 的和 (j 为指标, x 固定) 用上节的结果来估计. B_1 的 Fourier 级数不绝对收敛的事实所带来的困难可通过将 $B_1(t)$ 换成

$$B(t):=\frac{1}{2}J\int_{-1/J}^{1/J}B_1(t+u)\,\mathrm{d}u$$

来克服, 其中 J 是一个 "大" 参数. 由于 B 是 1-Lipschitz 的, 其 Fourier 级数绝对收敛. 具体地, 有

$$B(t)=\sum_{j\geqslant 1}a_j\sin(2\pi jt), \tag{6.20}$$

其中

$$a_j=-\frac{J}{2\pi^2j^2}\sin\Big(\frac{2\pi j}{J}\Big)\qquad(j\geqslant 1). \tag{6.21}$$

另外, 函数

$$h(t):=|B(t)-B_1(t)|$$

也是 Lipschitz 的. 实际上, 有

$$h(t)=\frac{1}{2}(1-J\|t\|)^{+}\qquad(J>1),$$

其中 $\|t\|$ 是 t 与整数集之间的距离. 通过简单的计算, 知

$$h(t)=\frac{1}{2J}+\sum_{j\geqslant 1}b_j\cos(2\pi jt),\tag{6.22}$$

其中

$$b_j=\frac{J}{\pi^2j^2}\sin^2\left(\frac{\pi j}{J}\right)\qquad(j\geqslant 1).\tag{6.23}$$

特别地, 由 (6.21) 和 (6.23) 得

$$|a_j|+|b_j|\ll\min(j,J)/j^2\qquad(j\geqslant 1).\tag{6.24}$$

证明进入了最后阶段. 对 $M<T\leqslant 2M$, 令

$$R(x;M,T):=\sum_{M<d\leqslant T}B_1(x/d).$$

显然

$$\left|R(x;M,T)-\sum_{M<d\leqslant T}B(x/d)\right|\leqslant\sum_{M<d\leqslant T}h(x/d),$$

由 (6.20) 及 (6.22), 有

$$\begin{aligned}R(x;M,T)=&\sum_{j\geqslant 1}a_j\sum_{M<d\leqslant T}\sin(2\pi jx/d)\\&+O\left(\frac{M}{J}+\sum_{j=1}^{\infty}b_j\left|\sum_{M<d\leqslant T}\cos(2\pi jx/d)\right|\right).\end{aligned}\tag{6.25}$$

现在由定理 6.5 可得, 对任意实数 y,

$$\sum_{M<d\leqslant T}\mathrm{e}(y/d)\ll\left(\frac{y}{M}\right)^{1/2}+\left(\frac{M^3}{y}\right)^{1/2}.\tag{6.26}$$

对 $y=jx$ 用上述估计并代入 (6.25), 得

$$\begin{aligned}R(x;M,T)&\ll\frac{M}{J}+\sum_{j\geqslant 1}(|a_j|+|b_j|)\left(\left(\frac{jx}{M}\right)^{1/2}+\left(\frac{M^3}{jx}\right)^{1/2}\right)\\&\ll\frac{M}{J}+\left(\frac{Jx}{M}\right)^{1/2}+\left(\frac{M^3}{x}\right)^{1/2},\end{aligned}$$

其中对 j 的求和是通过 (6.24) 来估计的. 对于最优的参数 $J:=Mx^{-1/3}$, 得

$$R(x;M,T)\ll x^{1/3}+\left(\frac{M^3}{x}\right)^{1/2}.\tag{6.27}$$

初看起来该估计仅对 $J>1$ 即 $M>x^{1/3}$ 成立. 然而在相反的情形同样的估计显然成立.

令 $r_0=\lfloor \ln N/\ln 2\rfloor-1$. 有

$$\begin{aligned}R(x)&=\sum_{-1\leqslant r\leqslant r_0}R(x;2^r,2^{r+1})+R(x;2^{r_0+1},N)\\&\ll\sum_{-1\leqslant r\leqslant r_0}\Big(x^{1/3}+\frac{2^{3r/2}}{\sqrt{x}}\Big)+x^{1/3}\ll r_0x^{1/3}+\frac{N^{3/2}}{\sqrt{x}}\ll x^{1/3}\ln x.\end{aligned}$$

这证明了 (6.19). 从而定理 6.11 得证. □

§6.5 模 1 均匀分布

§6.5.1 定义, 偏差, Weyl 判别法

指数和估计在数论中的典范应用是研究一列取值在 $\mathbb{T}:=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 中的数列的分布, 或等价地, 一个实数列分数部分的分布.

定义 6.12 设 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 是实数列. 如果对任意 α,β, $0\leqslant\alpha\leqslant\beta<1$, 有

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ \alpha<\langle u_n\rangle\leqslant\beta}}1=\beta-\alpha+o(1)\qquad(N\to\infty),$$

则说它模 1 均匀分布.

由区间 $[0,1]$ 的紧性易知, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 模 1 均匀分布当且仅当偏差

$$D_N:=\sup_I\left|\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\mathbf{1}_I(\langle u_n\rangle)-|I|\right|$$

趋于 0 $(N\to\infty)$, 其中上确界是关于 $[0,1[$ 的所有子区间 I 的.

定理 6.13 (Weyl 判别法, 1916) 实数列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 模 1 均匀分布当且仅当下列等价条件成立:

(i) 对任意 $[0,1]$ 上的 Riemann 可积函数 f 有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}f(\langle u_n\rangle)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x;$$

(ii) 对任意整数 $h\in\mathbb{Z}^*$, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\mathrm{e}(hu_n)=0.$

证明 若 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 模 1 均匀分布, (i) 对所有区间的示性函数成立, 故而对所有阶梯函数成立. 倘若 f 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在

两个阶梯函数 g_1 和 g_2, 使得 $g_1 \leqslant f \leqslant g_2$ 及 $\int (g_2 - g_1)\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$. 从而

$$\begin{aligned}\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(\langle u_n\rangle) \leqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} g_2(\langle u_n\rangle) &= \int_0^1 g_2(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon;\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(\langle u_n\rangle) \geqslant \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} g_1(\langle u_n\rangle) &= \int_0^1 g_1(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得 (i).

由于 $\int_0^1 \mathrm{e}(hx)\,\mathrm{d}x = 0$ 对任意 $h \in \mathbb{Z}^*$ 成立, 故可知 (i) 推出 (ii).

最后, 若 (ii) 成立, 那么由 Weierstrass 逼近定理, (i) 对所有 $[0,1]$ 上的连续 1-周期函数成立. 倘若 I 是 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 中的区间, 那么存在 1-周期连续函数 φ_1 和 φ_2, 使得 $\varphi_1 \leqslant \mathbf{1}_I \leqslant \varphi_2$ 且 $\int_0^1 \{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\}\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$. 如前可得 (i) 对 $\mathbf{1}_I$ 成立, 故而 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 模 1 均匀分布. □

注 不能将定理推广到 Lebesgue 可积的情形: 集合 $\{u_n : n \geqslant 1\}$ 是 Lebesgue 零测集.

例 从 Weyl 判别法知道, 对任意无理数 ϑ, $\{n\vartheta\}_{n=1}^{\infty}$ 是模 1 均匀分布的: (ii) 中的指数和是等比数列, 可以作具体计算, 它是有界的.

考虑序列 $\{\ln n\}_{n=1}^{\infty}$. 由 Riemann 积分学的知识, 对应的三角和是

$$S_N = \sum_{n\leqslant N} n^{2\pi i h} = N^{2\pi i h} \sum_{n\leqslant N} \left(\frac{n}{N}\right)^{2\pi i h} \sim N^{1+2\pi i h} \int_0^1 x^{2\pi i h}\,\mathrm{d}x = \frac{N^{1+2\pi i h}}{1+2\pi i h}.$$

这样 S_N/N 不趋于 0, 故而序列 $\{\ln n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是模 1 均匀分布的. 然而它是模 1 稠密的. 这是因为 $\ln n \to \infty$ 且 $\ln(n+1) - \ln n \to 0$ $(n \to \infty)$.

§6.5.2 Erdős-Turán 不等式

Weyl 判别法不提供偏差的任何数值信息. 本书的定理 6.15 基本上是 Erdős 和 Turán 的结果, 它给出偏差 D_N 与指数和

$$\sigma_N(h) := \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \mathrm{e}(hu_n)$$

之间的具体联系.

为明确思路, 先看一个反向不等式:

性质 6.14 $|\sigma_N(h)| \leqslant 4|h|D_N \qquad (h \in \mathbb{Z}^*)$.

证明 令 $\vartheta \in [0, 2\pi[$, 使得 $|\sigma_N(h)| = \sigma_N(h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$. 通过将 u_n 换成 $u_n + \vartheta/(2\pi h)$, 可设 $\vartheta = 0$: D_N 保持不变. 令

$$Z_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant N \\ \langle u_n \rangle \leqslant t}} 1,$$

使得

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |Z_N(t) - t| \leqslant D_N.$$

于是有

$$\begin{aligned}
|\sigma_N(h)| = \sigma_N(h) &= 1 - \frac{2\pi \mathrm{i} h}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \int_{\langle u_n \rangle}^1 \mathrm{e}(ht)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 - 2\pi \mathrm{i} h \int_0^1 Z_N(t)\mathrm{e}(ht)\,\mathrm{d}t = 2\pi \mathrm{i} h \int_0^1 \{t - Z_N(t)\}\mathrm{e}(ht)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi h \int_0^1 \{Z_N(t) - t\}\sin(2\pi h t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2\pi|h| \int_0^1 |t - Z_N(t)||\sin(2\pi h t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant 2\pi|h|D_N \int_0^1 |\sin(2\pi h t)|\,\mathrm{d}t = 4|h|D_N.
\end{aligned}$$

□

定理 6.15 (Erdős-Turán, 1948; Rivat-Tenenbaum, 2005)

$$D_N \leqslant \frac{1}{H+1} + \frac{2}{3} \sum_{1 \leqslant h \leqslant H} \frac{|\sigma_N(h)|}{h} \qquad (H \geqslant 1).$$

这里不证明该结论, 但在习题 107 中将用简单的方法证明一个稍弱的命题.

注记

§6.2 — §6.3 用 Poisson 求和公式来证明 van der Corput 不等式的部分来自 Titchmarsh (1951) 的第四章和第五章.

早在 1921 年, van der Corput 就在 Kusmin-Landau 不等式中得到估计 $\ll 1/\vartheta$. Kusmin (1927) 证明了上界为 $1/\vartheta$ 的 (6.12) 型不等式, 而 Laudau (1928) 则证明了最优值 $\cot(\pi\vartheta/2)$.

§6.3 定理 6.5 体现了 van der Corput 方法较为粗略的应用. 仅用了 (6.6), 即

$$\sum_n F(n) = \sum_{\alpha-\varepsilon<\nu<\beta+\varepsilon} \widehat{F}(\nu) + \text{余项} \tag{6.28}$$

的较弱形式

$$\sum_n F(n) \ll \sum_\nu |\widehat{F}(\nu)|.$$

事实上, 用 Laplace 的平稳相位方法, 可以证明积分

$$\widehat{F}(\nu) = \int_a^b \mathrm{e}(f(t) - \nu t)\,\mathrm{d}t$$

有振荡性. 若在定理 6.5 的假设中, 令 x_ν 为方程 $f'(x_\nu) = \nu$ 可能的 (唯一) 解 (见 Titchmarsh (1951) 第四章), 得

$$\widehat{F}(\nu) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/4}|f''(x_\nu)|^{-1/2}\mathrm{e}(f(x_v) - \nu x_v) + \text{余项},$$

余项可具体地用参数 λ, μ 的函数作上界估计, 这里 λ, μ 满足

$$|f'(t)| \asymp \lambda, \quad |f'''(t)| \ll \mu \qquad (a < t \leqslant b).$$

通过适当的逼近, 可视 (6.28) 第二项为新的三角和, 其系数为 $|f''(x_\nu)|^{-1/2}$. 对该三角和的一个非平凡的处理可改进最后的估计. 注意: 若重新使用 Poisson 求和公式则只能得到原来的三角和. 然而添加一个简单的变换却可以有根本的改进 (该过程基于 Cauchy-Schwarz 不等式, 就如引理 6.8 那样, 称之为 Weyl–van der Corput 变换), 见 Weyl (1916, 1921) 及 van der Corput (1922). 这样可依如下程序轮换使用该变换 (称之为过程 A) 以及 Poisson 求和公式 (称之为过程 B)

$$A^{r_1}BA^{r_2}\cdots BA^{r_n} \qquad (r_1 \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n).$$

r_i 的选择是困难的最优化问题. 该问题由 van der Corput 在 20 世纪 20 年代提出, 进而被 Phillips (1933) 简化. 当前称它为 “指数对理论”, 见 Ivić (1985) 第二章以及 Graham 和 Kolesnik (1991).

Huxley (1996) 的专著从现代观点介绍指数和的估计及其应用, 可供专家以及有志于深入这一领域的学生参阅.

Weyl 和 van der Corput 的结果 (引理 6.8) 可推广为只与某些 q 对应的

$$\gamma_N(q) := \frac{1}{N}\sum_{1 \leqslant n, n+q \leqslant N} z_{n+q}\overline{z}_n$$

有关的不等式, 如见 Montgomery (1994) 第二章引理 1. 这样的推广可用来加强 van der Corput (1931) 定理: *序列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 模 1 均匀分布当且仅当对任意 $h \in \mathbb{N}^*$, $\{u_{n+h} - u_n\}_{n=1}^\infty$ 模 1 均匀分布*. 若附加上 h 是平方数, 或 h 形如 $p+1$ ($p \in \mathbb{P}$), 抑或 h 形如 $p-1$ ($p \in \mathbb{P}$) 等限制, 同样的命题还成立. 然而仅限于 $\mathbb{P}$ 中的 h 则是不够的. 这些结果原属于 Kamae 和 Mendès France (1978).

§6.4 van der Corput 的定理 6.10 依赖于一个整参数 R. 实用中相位函数通常具有 $f(x) = Ax^\alpha + u(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) 的形式 ($\alpha = 0$ 的情形下 $f(x) = F\ln x + u(x)$), 其中 u 是光滑函数, 其各阶导数相对于 f 相应的导数可忽略不计. R 便在那些使得 $f^{(r)}$ 具有 "小" 的阶的前几个 r 之间进行选择. 在 Voronoï 定理 (定理 6.11) 证明中, van der Corput 选择了 $R = 2$.

在第二部分第三章 (推论 3.7) 中将看到 $R = 3$ 的选择可得到 Riemann ζ-函数在临界线上的基础估计.

另一个重要的应用是关于 $\zeta(s)$ 在临界线上的零点序列 $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$.[①]令 β 为使得 $\gamma_{n+1} - \gamma_n \ll \gamma_n^\xi$ 的实数 ξ 构成的集合的下确界. 已知[②] $\gamma_n \sim 2\pi n/\ln n$, 并猜想 $\beta = 0$. 第二部分 §4.3 注记的 Hardy 方法的精细化中出现了定理 6.10 对应于参数 $R = 4$ 的指数和. Karatsuba (1981) 证明了 $\beta \leqslant 5/32$. 此后尽管用了许多工具, 对该结果也只有很小的改进, 这主要归功于 Huxley (1996, 定理 21.4.4).

参数为 $R = 5$ 的定理 6.10 出现于近来的 Piatetski–Shapiro 问题, 即形如 $\lfloor n^c \rfloor$, $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ 的素数分布问题的研究中, 见 Rivat 和 Sargos (2001), Rivat 和吴杰 (2001).

最后指出由任意大的参数 R 的定理 6.10 可推出 $\zeta(1 + it)$ 的非平凡的上界估计. 20 世纪 30 年代 Vinogradov 方法得到的结果大大超过了这些结论.

§6.5 Erdős 和 Turán 最先证明了存在两个绝对常数 c_1 和 c_2, 使得

$$D_N \leqslant \frac{c_1}{H+1} + c_2 \sum_{1 \leqslant h \leqslant H} \frac{|\sigma_N(h)|}{h} \qquad (H \geqslant 1).$$

随后这些常数的值被改进. 一般猜想可取 $c_1 = 1$ 及 $c_2 = 2/\pi$. Rivat 和 Tenenbaum (2005) 证明了可取 $c_1 = 1$ 及 $c_2 = 0.652\,8 < 2/3$, 而 $2/\pi \approx 0.636\,6$.

习题

94. 令 $\tau(n, \vartheta) := \sum_{d|n} d^{i\vartheta}$ ($\vartheta \in \mathbb{R}$). 利用定理 6.4, 证明[③]

$$\frac{1}{x}\left|\sum_{n \leqslant x} \tau(n, \vartheta)\right| \ll \ln(2 + |\vartheta|) + \frac{1}{|\vartheta|} \qquad (\vartheta \neq 0, \quad x > 1 + |\vartheta|).$$

95. 证明 $\sum_{n \leqslant t} n^{-1/2 - it} \ll t^{1/6} \ln t$ ($t \geqslant 2$). (提示: 可在适当的区域内应用定理 6.5 和定理 6.9.)

96. 当 $0 < \alpha < 2$ 时, 给出 $\sum_{n \leqslant x} \exp\{in^\alpha\}$ 的上界估计.

---

① 见第二部分 §3.7.

② 见第二部分 §3.7 的注记.

③ 又见第二部分定理 3.5 及定理 3.9.

97. 分数部分之和.

(a) 证明

$$\langle x\rangle = \frac{1}{2} + \int_0^1 \{y - \mathbf{1}_{[\langle x\rangle,1]}(y)\}\,\mathrm{d}y \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(b) 令 I 为长度为 $N \in \mathbb{N}^*$ 的区间, λ, C 为正实数. 又令 $f \in \mathcal{C}^2(I)$ 使得 $\lambda \leqslant |f''(t)| \leqslant C\lambda$ 对任意 $t \in I$ 成立. 证明

$$\sum_{n\in I}\langle f(n)\rangle = \frac{1}{2}N + O(N\lambda^{1/3} + \lambda^{-1/2}),$$

其中隐含的常数与 C 有关.

98. 整数部分之和. 利用 0 阶 Euler-Maclaurin 求和公式, 以及第二中值公式, 证明若 $I =]a,b]$ 是以整数为端点的区间, 且 f 对于 I 及 $\lambda \leqslant 1$ 满足习题 97 的假设, 那么

$$\sum_{n\in I}\lfloor f(n)\rfloor = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t - \tfrac{1}{2}N + \tfrac{1}{2}[f(t)]_I + O(N\lambda^{1/3} + \lambda^{-1/2}).$$

99. 圆内整点问题, 或两个平方数之和个数的均值. 对于适当的区间将习题 98 的结论应用于函数 $t \mapsto \sqrt{x - t^2}$, 证明④

$$\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m^2+n^2\leqslant x}} 1 = \pi x + O(x^{1/3}) \qquad (x \geqslant 1).$$

100. 证明对任意 $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ 有

$$\sum_{n\leqslant x}\exp\{\mathrm{i}\lambda n\ln n\} = o(x) \qquad (x \to \infty).$$

101. 设 f 是从 $[1,+\infty[$ 到 $\mathbb{R}^+$ 上的可微函数, 使得 $f'(x)$ 单调下降, $f'(x) \to 0$ 及 $xf'(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$.

(a) 或利用定理 6.4, 或用 0 阶 Euler-Maclaurin 求和公式, 证明

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\mathrm{e}(f(n)) = o(N) \qquad (x \to +\infty). \tag{6.29}$$

(b) 对 $\int_1^N \mathrm{e}(f(n))\,\mathrm{d}t$ 作分部积分, 证明当 $xf'(x)$ 收敛于有限值时, (6.29) 不能成立.

102. 证明实数列模 1 均匀分布当且仅当其偏差趋于 0.

103. 设 $\vartheta \in [0,1[$. 对 $x \in \mathbb{R}$ 将 $\langle x - \vartheta\rangle - \langle x\rangle + \vartheta$ 表示成 $\langle x\rangle$ 的函数, 并推出实序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 模 1 均匀分布当且仅当

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} B_1(u_n - \vartheta) = 0$$

对任意 $\vartheta \in [0,1[$ 成立.

---

④ 至今最好的余项是 Huxley (2003) 的结果: $\ll x^{131/416+\varepsilon}$.

104. 设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为序列

$$\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{0}{2},\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{0}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\cdots$$

证明 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 模 1 均匀分布: (a) 直接证明, (b) 应用 Weyl 判别法.

105. (a) 设 ϑ 是无理数, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是实数列, 使得 $x_{n+1}-x_n \to \vartheta$. 证明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 模 1 均匀分布.

(b) 证明序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n=\sqrt{2}n+\sqrt{n}\sin(n^{1/3})$ 模 1 均匀分布.

106. Fejér 判别法. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为实数列, 满足

$$x_{n+1}-x_n \searrow 0 \quad \text{且} \quad n(x_{n+1}-x_n)\to\infty.$$

利用 Kusmin-Landau 不等式 (定理 6.7), 证明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 模 1 均匀分布.

107. Erdős-Turán 不等式. 记

$$F_H(t):=\sum_{|h|\leqslant H}\Big(1-\frac{|h|}{H}\Big)\cos(2\pi ht)=\frac{1}{H}\Big(\frac{\sin(\pi Ht)}{\sin(\pi t)}\Big)^2.$$

为 H 阶 Fejér 核, $H\in\mathbb{N}$. 定义函数 $f\in L^1(\mathbb{T})$ 的指标为 $h\in\mathbb{Z}$ 的 Fourier 系数为

$$c_h(f):=\int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}(-hx)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\mathrm{e}(u):=\exp(2\pi \mathrm{i}u)$. 对于 $f,g\in L^1(\mathbb{T})$ 定义卷积

$$f*g(x):=\int_{\mathbb{T}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

最后, 用 $\langle x\rangle$ 表示实数 x 的小数部分.

(a) 设 $f\in L^1(\mathbb{T})$ 为实值函数, 使得对适当的整数 $H\geqslant 4$, 有

$$c_h(f)=0 \qquad (|h|\leqslant H). \tag{6.30}$$

证明 $f*F_H=0$, 并推出对任意 $x\in\mathbb{T}$ 有

$$\begin{aligned} f(x)(1-I)&+\int_{|t|\leqslant 2/H}\{f(x-t\pm 2/H)-f(x)\}F_H(t)\,\mathrm{d}t\\ &+\int_{2/H<|t|\leqslant 1/2} f(x-t\pm 2/H)F_H(t)\,\mathrm{d}t=0,\end{aligned}$$

其中 $I:=\int_{\|t\|>2/H}F_H(t)\,\mathrm{d}t$.

(b) 证明 $I\leqslant \frac{1}{4}$.

(c) 设 f 在 $\mathbb{T}$ 上有界, 并令

$$K := \sup_{\substack{0\leqslant y\leqslant 1/H\\ x\in\mathbb{T}}} \{f(x+y)-f(x)\}.$$

证明在 (6.30) 的假设下, 有

$$\|f\|_\infty \leqslant 4K(1-I)/(1-2I) \leqslant 6K.$$

(d) 不再假设 (6.30), 证明

$$\|f\|_\infty \leqslant 6K + 13\sum_{|h|\leqslant H} |c_h(f)|.$$

(e) 设 $\{u_n\}_{n=1}^N$ 是实数有限列, 令

$$F(x) := \frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \mathbf{1}_{[0,x]}(\langle u_n\rangle).$$

应用前述结果于函数

$$f(x) := \langle x\rangle - \tfrac{1}{2} + c_0(F) - F(x).$$

证明对任意整数 $H \geqslant 1$, 有

$$\sup_{I\subset\mathbb{T}} \left|\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \mathbf{1}_I(\langle u_n\rangle) - |I|\right| \leqslant \frac{12}{H} + 9\sum_{0<h\leqslant H} \frac{|\sigma_N(h)|}{h},$$

其中 $\sigma_N(h) := (1/N)\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \mathrm{e}(hu_n)$.

108. 证明一般的 Erdős-Turán 不等式

$$D_N \leqslant \frac{c_1}{H+1} + c_2\sum_{1\leqslant h\leqslant H} \frac{|\sigma_N(h)|}{h}$$

成立蕴涵了 $c_1 \geqslant 1$, $c_2 \geqslant 2/\pi$. 可考虑特殊序列 $x_n := n/N$ 及 $x_n := n/(2N)$ $(1\leqslant n\leqslant N)$.

109. 证明序列 $\{\sqrt{n}(\ln n)^2\}_{n=1}^\infty$ 模 1 均匀分布并给出其偏差具体的上界估计.

110. 证明对任意 $\alpha \in]0,1[$, 序列 $x_n = n^\alpha$ 模 1 均匀分布, 并给出其偏差的上界估计.

111. 证明对 $1<\alpha<2$, 序列 $\{n^\alpha\}_{n=1}^\infty$ 模 1 均匀分布, 并给出其偏差的一个上界估计.

112. 令 I 为含有 N 个整数的区间, $f\in C^2(I,\mathbb{R})$, 使得存在 $\lambda>0$ 及 $C>1$, 满足 $\lambda \leqslant |f''(x)| \leqslant C\lambda$ $(\forall x\in I)$. 证明序列 $\{f(n)\}_{n\in I}$ 的偏差 D_N 满足

$$D_N \ll \lambda^{1/3} + N^{-1}\lambda^{-1/2},$$

其中隐含的常数可依赖于 C.

113. 用 k 阶导数. 设 k 为 $\geqslant 3$ 的整数, I 是含有 N 个整数的区间, $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$. 假设存在 $\lambda > 0$ 及 $C > 1$, 满足 $\lambda \leqslant |f^{(k)}(x)| \leqslant C\lambda$ $(x \in I)$. 对 k 用归纳法, 证明

$$\left|\sum_{n \in I} \mathrm{e}(f(n))\right| \ll N\lambda^{\alpha_k} + N^{1-\alpha_k}\lambda^{-\alpha_k},$$

其中 $\alpha_k := 1/\{2^k - 2\}$.

114. 证明对任意不是整数的 $\alpha > 0$, 序列 $\{n^\alpha\}_{n=1}^\infty$ 模 1 均匀分布.

115. 小区间中的无平方因子数.

(a) 用第 37 页习题 44 (c) 中的结论证明, 存在绝对常数 $c > 0$, 使得当 x 足够大且 $y \geqslant c\sqrt{x}$ 时, 区间 $]x - y, x]$ 含有至少一个无平方因子数.

(b) 设整数 $R \geqslant 2$, 整数 $N \geqslant 1$ 且 I 是包含于 $[N + 1, 2N]$ 的区间. 证明若 $f \in \mathcal{C}^R(I, \mathbb{R})$ 且存在 $F > 0$, 使得

$$|f^{(r)}(x)| \asymp FN^{-r} \qquad (1 \leqslant r \leqslant R,\ x \in I),$$

那么 $\displaystyle\sum_{n \in I} B_1(f(n)) \ll (FN^{-R})^{1/(2^R-1)}N + F^{-1}N.$

(c) 设 $1 \leqslant y \leqslant x/2$. 令 $S := \sum_{x-y<n\leqslant x} \mu^2(n)$. 证明 $S = S_1 + O(S_2)$, 其中

$$S_1 := \sum_{\substack{x-y<d^2m\leqslant x \\ d\leqslant\sqrt{y}}} \mu(d), \qquad S_2 := \sum_{\substack{x-y<d^2m\leqslant x \\ d>\sqrt{y}}} 1.$$

(d) 证明 $S_1 = \dfrac{6}{\pi^2}y + O(\sqrt{y})$.

(e) 令 $\sqrt{y} \leqslant D \leqslant \sqrt{x}$. 将 S_2 写成 S_3 与 S_4 之和, 其中

$$S_3 := \sum_{\substack{x-y<d^2m\leqslant x \\ \sqrt{y}<d\leqslant D}} 1, \qquad S_4 := \sum_{\substack{x-y<d^2m\leqslant x \\ d>D}} 1.$$

证明 $S_3 = -R_3 + O(\sqrt{y})$, 其中 $R_3 := \displaystyle\sum_{d\leqslant D}\left\{B_1\left(\frac{x}{d^2}\right) - B_1\left(\frac{x-y}{d^2}\right)\right\}$.

(f) 证明 $R_3 \ll x^{1/7}D^{2/7} + x^{-1}D^3$.

(g) 证明 $S_4 \ll xD^{-2} + yD^{-1}$.

(h) 证明 $S = 6y/\pi^2 + O(x^{1/4} + yx^{-3/8} + \sqrt{y})$.

(i) 证明对任意足够大的 x 及 $y \geqslant Cx^{1/4}$, 其中 $C > 0$ 是适当的常数, 区间 $]x - y, x]$ 含有一个无平方因子数.

第七章 Diophantus 逼近

§7.1 从 Dirichlet 到 Roth

Diophantus 逼近是算术中研究整参数不等式可解性的分支. 该理论的基础性结论是 Dirichlet 于 1842 年得到的, 其证明基于抽屉原则.

记号 $\lfloor\vartheta\rfloor$ 表示 ϑ 的整数部分, $\lceil\vartheta\rceil$ 表示不小于 ϑ 的最小整数, $\langle\vartheta\rangle$ 是其小数部分, $\|\vartheta\|$ 则是 ϑ 到整数集之间的距离.

有 $\|\vartheta\| = \min(\langle\vartheta\rangle, 1-\langle\vartheta\rangle) \in [0,\frac{1}{2}]$.

定理 7.1 (Dirichlet) 设 $\vartheta\in\mathbb{R}$, 有

$$\min_{1\leqslant q\leqslant Q}\|q\vartheta\| \leqslant \frac{1}{Q+1} \qquad (Q\in\mathbb{N}^*). \tag{7.1}$$

证明 设 $Q\in\mathbb{N}^*$. 可假设

$$\max_{1\leqslant m\leqslant Q}\langle m\vartheta\rangle < Q/(Q+1),$$

否则 (7.1) 显然成立. 于是 $Q+1$ 个实数 $\langle m\vartheta\rangle$ $(0\leqslant m\leqslant Q)$ 落在 $[0,Q/(Q+1)[$ 之中. 这样, 它们之中的两者, 不妨设为 $\langle u\vartheta\rangle$ 和 $\langle v\vartheta\rangle$, 其距离在 $[0,1/(Q+1)[$ 中. 这样, 对适当的整数 a 和 b, 有

$$0\leqslant (u\vartheta-a)-(v\vartheta-b) < 1/(Q+1).$$

从而 $\|q\vartheta\| < 1/(Q+1)$, 其中 $q := |u-v| \leqslant Q$. □

注 (7.1) 中等号成立当且仅当 ϑ 是形如 $a/(Q+1)$ 的有理数, 其中 $(a, Q+1)=1$.

推论 7.2 设 $\vartheta \in \mathbb{R}$. 下列命题等价:

(i) $\vartheta \in \mathbb{Q}$;

(ii) 存在常数 $c = c(\vartheta) > 0$, 使得

$$\|q\vartheta\| \neq 0 \Rightarrow \|q\vartheta\| \geqslant c; \tag{7.2}$$

(iii) 不等式

$$0 < q\|q\vartheta\| < 1 \tag{7.3}$$

只有有限多个整数解 q.

证明 (i)⇒(ii): 若 $\vartheta = a/b \in \mathbb{Q}$, 那么 $\|q\vartheta\| \in \{j/b : 0 \leqslant j \leqslant b/2\}$. 所以 $\|q\vartheta\| \neq 0$ 推出 $\|q\vartheta\| \geqslant 1/b$.

(ii)⇒(iii) 是显然的.

(iii)⇒(i): 设 $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 且 $q_1, \ldots, q_n$ 是 (7.3) 的解. Dirichlet 定理说明了存在整数 q, 使得

$$\|q\vartheta\| \leqslant \tfrac{1}{2} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \|q_j\vartheta\| \quad \text{及} \quad q\|q\vartheta\| < 1,$$

从而对 $1 \leqslant j \leqslant n$ 必有 $q \neq q_j$. □

例 从 (ii) 易知 e 是无理数, 具体证明留给读者.

Liouville 于 1844 年对一般的代数数, 也就是说整系数多项式的 (实或复) 根证明了类似于 (7.2) 的结论. 如果该代数数是某 d 次多项式的根, 而不是小于 d 次非零多项式的根, 则称之为 d 次的. 可以证明, 若规定该 d 次多项式最高项系数为正, 且系数互素, 则它是唯一的, 称之为其最小多项式.

定理 7.3 (Liouville) 设 ϑ 是 $d \geqslant 1$ 次代数数, 那么存在常数 $c = c(\vartheta)$, 使得

$$\|q\vartheta\| \neq 0 \Longrightarrow \|q\vartheta\| > c/q^{d-1} \qquad (q \in \mathbb{N}^*).$$

证明 可设 ϑ 为实数且 $d \geqslant 2$. 令 F 为 ϑ 的最小多项式. 由微分中值定理, 对任意有理数 p/q, 存在 ϑ 和 p/q 之间的 ξ, 使得

$$F(\vartheta) - F(p/q) = (\vartheta - p/q)F'(\xi).$$

由于 F 不可约, $F(p/q) \neq 0$, 而 $F(\vartheta) = 0$. 由 $q^d F(p/q)$ 是整数知 $|F(p/q)| \geqslant 1/q^d$. 现在可设 $|\vartheta - p/q| \leqslant \frac{1}{2}$, 否则 p 不是最接近 $q\vartheta$ 的整数, 从而 $|F'(\xi)| \leqslant M(\vartheta) := \sup\limits_{|z-\vartheta| \leqslant 1/2} |F'(z)|$. 故

$$|\vartheta - p/q| \geqslant 1/\big(M(\vartheta)q^d\big).$$ □

从该定理出发容易构造超越数, 亦即非代数数.

推论 7.4 对任意整数 $a > 1$,

$$\vartheta := \sum_{k \geqslant 0} a^{-k!}$$

是超越数.

证明 令 $p_n/q_n := \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a^{-k!}$. 易知 $q_n \mid a^{n!}$, 且对任意固定的 $d > 1$, 有

$$|\vartheta - p_n/q_n| \leqslant 1/q_n^{n+1} + 1/q_n^{(n+1)(n+2)} + \cdots < 2/q_n^{n+1} = o(1/q_n^d). \qquad \square$$

注 通过代数数集的可数性, Cantor 证明了超越数的存在性. 将代数数映为其最小多项式系数的映射是单射. 由于 $\mathbb{R}$ 不是可数集 (Cantor 对角线法, 见习题 116 和 117), 其中必有超越数. 由 Lebesgue 理论, 几乎所有的实数都是超越数.

Liouville 定理有着十分丰富的后继工作. Thue 于 1909 年证明了可将 $d-1$ 换成任意 $\delta > d/2$; Siegel 将其改进为 $\delta > 2\sqrt{d} - 1$; Dyson 以及 Gelfond 和 Linnik 于 1947—1948 年独立证明了可选取 $\delta > \sqrt{2d} - 1$; 最后, K. F. Roth 在 1955 年证明了所有 $\delta > 1$ 都是可行的, 并夺得了 Fields 奖章 (1955). 显然该结果是最优的, 其证明相当复杂. 而且, 正如所有其他 Liouville 定理的改进, 它是非实效的: 给定 ϑ 及 $\delta > 1$, 不能具体计算常数 $c := \inf_{q \geqslant 1} q^\delta \|q\vartheta\|$ 的值.

§7.2 最优逼近, 连分数

令 $\vartheta \in \mathbb{R}$, 将构造一列分数, 以最经济的形式逼近 ϑ. 在第一步中令

$$z(\vartheta) := \begin{cases} 0, & 若\ \langle\vartheta\rangle \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1, & 若\ \frac{1}{2} < \langle\vartheta\rangle < 1, \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} p_0/q_0 := \lfloor\vartheta\rfloor/1, & 若\ z(\vartheta) = 0, \\ p_0/q_0 := \lfloor\vartheta\rfloor/1,\ p_1/q_1 := (1 + \lfloor\vartheta\rfloor)/1, & 若\ z(\vartheta) = 1. \end{cases}$$

最后, 引入 ϑ 的最优分母之集

$$\mathcal{D}^+(\vartheta) := \{q \geqslant 2 : \|q\vartheta\| < \min_{1 \leqslant m < q} \|m\vartheta\|\}.$$

性质 7.5 $\mathcal{D}^+(\vartheta)$ 有限当且仅当 $\vartheta \in \mathbb{Q}$.

证明　若 $\vartheta \in \mathbb{Q}$, 设 $\vartheta = a/b$. 这样 $\|m\vartheta\| \in \{j/b : 0 \leqslant j \leqslant b/2\}$. 从而 $|\mathcal{D}^+(\vartheta)| \leqslant 1 + \lfloor b/2 \rfloor$.

若 $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 由 Dirichlet 定理知, 对任意 $q \in \mathcal{D}^+(\vartheta)$ 存在至少一个整数 $q' \leqslant Q := 1 + \lfloor 1/\|q\vartheta\| \rfloor$, 使得

$$\|q'\vartheta\| \leqslant 1/Q < \|q\vartheta\|.$$

满足 $\|q'\vartheta\| < \|q\vartheta\|$ 的最小的 q' 是 $\mathcal{D}^+(\vartheta)$ 中某大于 q 的元素. □

定义 7.6　对于 $\vartheta \in \mathbb{R}$, 用 $\{q_j\}_{j>z(\vartheta)}$ 表示 $\mathcal{D}^+(\vartheta)$ 中的元素组成的 (有限或无限) 的渐升列; 用 $\mathcal{D}(\vartheta)$ 表示在 $\{q_j\}_{j>z(\vartheta)}$ 中添加一个或两个元素 $\{q_j\}_{0 \leqslant j \leqslant z(\vartheta)}$ 而得的序列.

性质 7.7　对任意 $\vartheta \in \mathbb{R}$, 序列 $\{q_j\}_{j>z(\vartheta)}$ 单调上升. 若 $k > z(\vartheta)$ 且 $\|q_k\vartheta\| \neq 0$, 那么 q_k 在 $\mathcal{D}^+(\vartheta)$ 中有后继元, 并且

$$\|q_k\vartheta\| \leqslant 1/q_{k+1}.$$

证明　若 $q_k \in \mathcal{D}^+(\vartheta)$ 且 $q_k\vartheta \notin \mathbb{Z}$, 那么 Dirichlet 定理说明了存在整数 q, 使得 $\|q\vartheta\| < \|q_k\vartheta\|$. 另外, 由 q_{k+1} 的定义, 有

$$\|q_k\vartheta\| \leqslant \min_{q<q_{k+1}} \|q\vartheta\|.$$

由定理 7.1, 右边 $\leqslant 1/q_{k+1}$. □

定义 7.8　设 $\vartheta \in \mathbb{R}$, 对于 $q_k \in \mathcal{D}^+(\vartheta)$, 用 p_k 表示离 $q_k\vartheta$ 最近的整数. 序列 $\{p_k/q_k\}_{k=0}^{\infty}$ 称为 ϑ 的约化数列.

记号　记

$$\vartheta_k := q_k\vartheta - p_k. \tag{7.4}$$

先仅对 $k \geqslant 0$ 使用该记号, 以后将拓展到 $k \geqslant -2$ 的情形.

性质 7.9　若 $\vartheta \in \mathbb{Q}$, 那么对 $k := |\mathcal{D}(\vartheta)| - 1$ 有 $\vartheta = p_k/q_k$. 但若 $\vartheta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 则

$$\lim_{k\to\infty} p_k/q_k = \vartheta.$$

证明　这是性质 7.7 的直接推论. □

注　注意到当 ϑ 是有理数, $\vartheta = p/q$ 时, $\mathcal{D}(\vartheta)$ 是有限集 $\{q_0, \ldots, q_k\}$, 此时 $k = |\mathcal{D}(\vartheta)| - 1$, $q_k = q$.

引理 7.10　设 $\vartheta \in \mathbb{R}$. 若 ϑ_k 和 ϑ_{k+1} 非零, 那么它们异号.

证明 当 $k=0$ 时, 显然 $z(\vartheta)=1$, 故 $\vartheta_0 \geqslant 0 > \vartheta_1$.

令 $q := q_{k+1}-q_k$, $p := p_{k+1}-p_k$, 使得

$$q\vartheta - p = \vartheta_{k+1} - \vartheta_k.$$

有 $q < q_{k+1}$. 故对 $k > z(\vartheta)$ 有 $|q\vartheta - p| \geqslant \|q\vartheta\| \geqslant |\vartheta_k|$. 这说明了在此情形下 $\vartheta_k\vartheta_{k+1} < 0$.

只须验证 $k = z(\vartheta) = 0$ 及 $k = z(\vartheta) = 1$ 的情形. 在第一种情形下, 有 $\langle\vartheta\rangle \leqslant \frac{1}{2}$, 从而 $m := \lfloor 1/\langle\vartheta\rangle \rfloor \geqslant 2$. 另外

$$\langle\vartheta\rangle \leqslant j\langle\vartheta\rangle \leqslant 1-\langle\vartheta\rangle \quad (1 \leqslant j < m), \qquad 1-\langle\vartheta\rangle < m\langle\vartheta\rangle \leqslant 1,$$

从而 $q_1 = m$ 且 $\vartheta_1 = m\vartheta - p_1 = m\langle\vartheta\rangle - 1 \leqslant 0$. 另一种情形的处理类似. □

定理 7.11 设 $\vartheta \in \mathbb{R}$. 若 $1 \leqslant k < |\mathcal{D}(\vartheta)|$, 那么有

$$q_k p_{k-1} - q_{k-1} p_k = (-1)^k. \tag{7.5}$$

证明 对于 $k=1$, $z(\vartheta)=1$ 的情形有 $q_0 = q_1 = 1$, $p_0 = \lfloor\vartheta\rfloor$, $p_1 = p_0 + 1$, 故

$$q_1 p_0 - q_0 p_1 = p_0 - p_1 = -1.$$

对于 $k=1$, $z(\vartheta)=0$ 的情形, 有 $q_0 = 1$, $p_0 = \lfloor\vartheta\rfloor$. 由引理 7.10 证明中的计算知 $q_1 = \lfloor 1/\langle\vartheta\rangle \rfloor$ 及 $p_1 = q_1 p_0 + 1$.① 这样, 对于 $k=1$ 便证明了 (7.5).

下证 $k \geqslant 2$ 的情形. 此时 $k > z(\vartheta)$. 首先注意到 $q_k p_{k-1} - q_{k-1} p_k \neq 0$. 否则 $p_{k-1}/q_{k-1} = p_k/q_k$, 从而

$$|\vartheta_{k-1}| = (q_{k-1}/q_k)|\vartheta_k| < |\vartheta_k|.$$

这与 q_k 的定义矛盾. 接下来有

$$q_k p_{k-1} - q_{k-1} p_k = q_{k-1}(q_k\vartheta - p_k) - q_k(q_{k-1}\vartheta - p_{k-1}) = q_{k-1}\vartheta_k - q_k\vartheta_{k-1},$$

从而由性质 7.7, 有

$$|q_k p_{k-1} - q_{k-1} p_k| \leqslant q_{k-1}\|q_k\vartheta\| + q_k\|q_{k-1}\vartheta\| \leqslant q_{k-1}/q_{k+1} + 1 < 2.$$

这样必有

$$q_k p_{k-1} - q_{k-1} p_k = \pm 1.$$

由于已验证了 (7.5) 对 $k=1$ 成立, 只须验证符号交错. 而对 $k < |\mathcal{D}(\vartheta)| - 1$ 有

$$(q_k p_{k-1} - q_{k-1} p_k)(q_{k+1} p_k - q_k p_{k+1}) = (q_{k-1}\vartheta_k - q_k\vartheta_{k-1})(q_k\vartheta_{k+1} - q_{k+1}\vartheta_k).$$

从引理 7.10 知此乘积展开后可写成四个负项之和. □

---

① 有 $1-\langle\vartheta\rangle < q_1\langle\vartheta\rangle \leqslant 1$, 即 $1-\langle\vartheta\rangle < q_1(\vartheta - p_0) \leqslant 1$, 从而 $q_1 p_0 + 1 - \langle\vartheta\rangle < q_1\vartheta \leqslant q_1 p_0 + 1$.

推论 7.12 约化数是既约的: 对任意 $k \geqslant 0$, 有 $(p_k, q_k) = 1$.

证明 这是 Bachet 定理的直接推论 (见习题 11). □

定理 7.13 令 $\vartheta \in \mathbb{R}$. 记 $(p_{-2}, q_{-2}) := (0,1)$, $(p_{-1}, q_{-1}) := (1,0)$ 及

$$a_k := \lfloor -\vartheta_{k-2}/\vartheta_{k-1} \rfloor \qquad (k \geqslant 0), \tag{7.6}$$

其中 ϑ 由 (7.4) 定义. 那么在 $\vartheta_{k-1} \neq 0$, $k \geqslant 0$ 的假设下, 有

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \end{cases} \tag{7.7}$$

证明 对任意 $k \geqslant 0$, 行列式

$$\begin{vmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{vmatrix}$$

等于 $(-1)^k$, 于是存在整数 a_k 和 b_k, 使得

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + b_k p_{k-2}, \\ q_k = a_k q_{k-1} + b_k q_{k-2}. \end{cases}$$

由定理 7.11, 消元后立得

$$b_k = \frac{q_{k-1}p_k - q_k p_{k-1}}{q_{k-1}p_{k-2} - q_{k-2}p_{k-1}} = 1.$$

另外, 由 (p_0, q_0) 的定义, (7.7) 对于 $k = 0$ 成立. 对 $k \geqslant 1$, 由引理 7.10 及 ϑ_k 的定义知

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_k}{\vartheta_{k-1}} &= \frac{q_k\vartheta - p_k}{\vartheta_{k-1}} = \frac{(a_k q_{k-1} + q_{k-2})\vartheta - (a_k p_{k-1} + p_{k-2})}{\vartheta_{k-1}} \\ &= a_k + \frac{\vartheta_{k-2}}{\vartheta_{k-1}} \in]-1, 0], \end{aligned} \tag{7.8}$$

这说明了当 $k \geqslant 1$ 且 a_k 依 (7.6) 定义时, 条件 (7.7) 成立. □

定义 7.14 设 $\vartheta \in \mathbb{R}$. (7.6) 中定义的 a_k 称为 ϑ 的连分数展开中的不完全分数, 而 $\alpha_k := -\vartheta_{k-2}/\vartheta_{k-1}$ 则称为 ϑ 连分数展开中的完全分数.

α_k 之所以称为完全分数, 是因为成立等式

$$\vartheta = \frac{\alpha_{k+1}p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1}q_k + q_{k+1}} \qquad (k \geqslant 0).$$

定理 7.15 令 $\vartheta \in \mathbb{R}$, 那么有 $\alpha_0 = \vartheta$, $\alpha_{k+1} = 1/\langle \alpha_k \rangle$ $(k \geqslant 0)$. 对于 $k < |\mathcal{D}(\vartheta)|$, 有

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}}. \tag{7.9}$$

证明 等式 (7.8) 又可写为

$$1/\alpha_{k+1} = \alpha_k - a_k = \langle \alpha_k \rangle.$$

这证明了命题的第一部分. 而第二部分则是下一性质的直接推论, 在其中将用记号

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k]$$

来表示 (7.9) 式右边的部分并且将该记号定义的范围扩展到所有使得对任意 $j \geqslant 1$, $a_j > 0$ 的有限序列 $\{a_j\}_{j=0}^{k}$. □

性质 7.16 对 $k \in \mathbb{N}$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_1 > 0, \ldots, a_{k-1} > 0$ 及任意实数 $x > 0$, 有

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, x] = \frac{xp_{k-1} + p_{k-2}}{xq_{k-1} + q_{k-2}},$$

其中 p_j, q_j 的定义为: $(p_{-2}, q_{-2}) := (0,1)$, $(p_{-1}, q_{-1}) := (1,0)$, 其余可由 (7.7) 递归地定义.

证明 对 k 归纳. 显然 (7.9) 对 $k = 0$ 或 1 成立. 倘若命题对 k 成立, 那么

$$\begin{aligned}[a_0, \ldots, a_k, x] &= [a_0, \ldots, a_k + 1/x] \\ &= \frac{(a_k + 1/x)p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + 1/x)q_{k-1} + q_{k-2}} \\ &= \frac{(a_k p_{k-1} + p_{k-2})x + p_{k-1}}{(a_k q_{k-1} + q_{k-2})x + q_{k-1}} = \frac{p_k x + p_{k-1}}{q_k x + q_{k-1}}.\end{aligned}$$ □

不完全分数的数值计算非常简单: 只须迭代运算 $x \mapsto 1/\langle x \rangle$. 比如考虑 π 的情形. 依次有

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = \pi \approx 3.141\,592\,653\,589\,73, && a_0 = 3, && \frac{p_0}{q_0} = \frac{3}{1}, \\
&\alpha_1 = \frac{1}{\pi - 3} \approx 7.062\,513\,305\,931\,045, && a_1 = 7, && \frac{p_1}{q_1} = \frac{7 \times 3 + 1}{7 \times 1 + 0} = \frac{22}{7}, \\
&\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - 7} \approx 15.996\,594\,406\,685\,719, && a_2 = 15, && \frac{p_2}{q_2} = \frac{15 \times 22 + 3}{15 \times 7 + 1} = \frac{333}{106}, \\
&\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - 15} \approx 1.003\,417\,231\,013\,372, && a_3 = 1, && \frac{p_3}{q_3} = \frac{1 \times 333 + 22}{1 \times 106 + 7} = \frac{355}{113},
\end{aligned}$$

而

$$355/113 \approx 3.141\,592\,920\,353\,982.$$

从而在四步以内已得到精确到小数点后第六位的分数.

下列定理将有理数连分数展开的中间项表示成 Euclid 辗转相除法的商及余数的函数. 给定分数 r/s, $s \geqslant 1$. 用如下的 Euclid 辗转相除法计算其最大公约数:

$$\begin{aligned} r &= a_0 s + r_1, \qquad 0 \leqslant r_1 < s, \\ s &= a_1 r_1 + r_2, \qquad 0 \leqslant r_2 < r_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{N-2} &= a_{N-1} r_{N-1} + r_N, \ 0 \leqslant r_N < r_{N-1}, \\ r_{N-1} &= a_N r_N. \end{aligned}$$

其中 $r_N = (r, s)$.

定理 7.17 设 $r/s \in \mathbb{Q}^*$, 其中 $s \geqslant 1$, $(r, s) = 1$. 用前述记号, 有

$$\frac{r}{s} = [a_0, \ldots, a_N].$$

证明 记 $r_0 = s$, $r_{-1} = r$. 对 $j \in [0, N]$ 用反向归纳法, 证明

$$\frac{r_{j-1}}{r_j} = [a_j, \ldots, a_N].$$

当 $j = N$ 时结论显然. 倘若命题对 $j+1$ 成立, 那么

$$\begin{aligned} [a_j, \ldots, a_N] &= [a_j, a_{j+1}, \ldots, a_N] \\ &= [a_j, [a_{j+1}, \ldots, a_N]] = [a_j, r_j/r_{j+1}] \\ &= a_j + r_{j+1}/r_j = (a_j r_j + r_{j+1})/r_j = r_{j-1}/r_j. \end{aligned}$$

□

§7.3 连分数展开的性质

先介绍关于有限连分数的一个注记.

性质 7.18 设 $\vartheta \in \mathbb{R}$, 对于 $k < |\mathcal{D}(\vartheta)|$ 有

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k] = a_0 + \sum_{0 \leqslant j < k} \frac{(-1)^j}{q_j q_{j+1}}. \tag{7.10}$$

证明 这是如下形式的 (7.5) 的直接推论:

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + \frac{(-1)^k}{q_{k-1} q_k}.$$

当 $a_k \geqslant 2$ 时有

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k] = [a_0, a_1, \ldots, a_k - 1, 1],$$

从而可以自由选择有理数连分数展开长度的奇偶性. □

定理 7.19 若约定当 $\vartheta \in \mathbb{Q}$ 且 $k = |\mathcal{D}(\vartheta)| - 1$ 时 $a_k \geqslant 2$, 那么其连分数展开是唯一的. 换句话讲, 对任意实数 ϑ, 整数 a_j $(0 \leqslant j \leqslant k)$ 被等式 (7.9) 唯一确定.

另外, 对任意的整数无限列 $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$, 使得对任意 $j \geqslant 1$ 有 $a_j \geqslant 1$, 那么通项为

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k]$$

的序列收敛.

证明 有 $a_0 = \lfloor p_k/q_k \rfloor$, $a_1 = \lfloor 1/\langle p_k/q_k \rangle \rfloor$, 等等. 这证明了命题的第一部分. 第二部分由 (7.10) 可得. □

以下结论说明了约化数分母增长的速度至少是指数式的. 令 $\varphi{:=}\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ 为黄金分割数. 回顾 Fibonacci 数列的定义: $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ 及 $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ $(k \geqslant 1)$.

定理 7.20 令 $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为 Fibonacci 数列. 对任意 $\vartheta \in \mathbb{R}$, 有

$$q_k \geqslant F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\{\varphi^k - (-1)^k/\varphi^k\} \qquad (k \geqslant 1),$$

当 $\vartheta = \varphi$ 时等号成立.

证明 有 $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \geqslant q_{k-1} + q_{k-2}$. 这推出 $q_k \geqslant F_k$. 当 a_k 全部等于 1 时等号成立. 此时有 $\vartheta = 1 + 1/\vartheta$ 及 $\vartheta > 0$, 从而 $\vartheta = \varphi$. □

定理 7.21 令 $\vartheta \in \mathbb{R}$. 当 $\|q_k\vartheta\| \neq 0$ 时, 有

$$\vartheta - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k(\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1})} \qquad (k \geqslant 0). \tag{7.11}$$

特别地,

$$\frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)} < \left|\vartheta - \frac{p_k}{q_k}\right| \leqslant \frac{1}{q_k q_{k+1}}. \tag{7.12}$$

证明 由 $\alpha_{k+1} = -\vartheta_{k-1}/\vartheta_k$ 知,

$$\vartheta = \frac{\alpha_{k+1}p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1}}.$$

从而

$$\vartheta - \frac{p_k}{q_k} = \frac{q_k(\alpha_{k+1}p_k + p_{k-1})}{q_k(\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1})} - \frac{p_k(\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1})}{q_k(\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1})} = \frac{q_k p_{k-1} - q_{k-1}p_k}{q_k(\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1})}.$$

由 (7.5), 这推出了 (7.11). 由下式便得区间估计 (7.12):

$$q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1} \leqslant \alpha_{k+1}q_k + q_{k-1} < (a_{k+1}+1)q_k + q_{k-1} = q_{k+1} + q_k. \qquad \square$$

推论 7.22 令 $\vartheta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 有

$$1\Big/\Big(2 + \limsup_{k\to\infty} a_k\Big) \leqslant \liminf_{q\to\infty} q\|q\vartheta\| \leqslant 1\Big/\limsup_{k\to\infty} a_k.$$

证明 显然有 $\liminf\limits_{q\to\infty} q\|q\vartheta\| \leqslant \liminf\limits_{k\to\infty} q_k\|q_k\vartheta\|$. 而对于 $q_k \leqslant q < q_{k+1}$, 由 q_k 的定义有 $q\|q\vartheta\| \geqslant q_k\|q_k\vartheta\|$. 于是

$$\liminf_{q\to\infty} q\|q\vartheta\| = \liminf_{k\to\infty} q_k\|q_k\vartheta\|.$$

由于 $0 < q_{k-1}/q_k \leqslant 1$, 要证的命题是 (7.12) 的直接推论. $\square$

定理 7.23 (Lagrange 判别法) *设 $\vartheta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. p/q 是 ϑ 的约化数的一个充要条件是: 存在整数 $p' < p$, $q' < q$, 以及实数 $\alpha > 1$, 使得 $qp' - pq' = \pm 1$, 且*

$$\vartheta = \frac{\alpha p + p'}{\alpha q + q'}. \tag{7.13}$$

证明 必要性显然. 假定 $(p,q) = (p_k, q_k)$, 只要选 $(p',q') = (p_{k-1}, q_{k-1})$ 及 $\alpha = \alpha_{k+1}$ 即可.

下证充分性. 假设 (7.13) 对 (p,q) 及 (p',q') 成立. 将 p/q 展成连分数 $[a_0^*, \ldots, a_k^*]$. 通过选择展开长度 k 的奇偶性, 可设

$$q_k^* p_{k-1}^* - q_{k-1}^* p_k^* = qp' - pq'.$$

由于 p' (相应地, q') 模 p (相应地, 模 q) 的剩余类确定, 且 $p' < p$ (相应地, $q' < q$), 这说明 $(p',q') = (p_{k-1}^*, q_{k-1}^*)$. 代入 (7.13) 便得 $\vartheta = [a_0^*, \ldots, a_k^*, \alpha]$. 由连分数展开的唯一性知 $\alpha = \alpha_{k+1} = -\vartheta_k/\vartheta_{k-1}$. 从而 p_k/q_k 的确是 ϑ 的以 k 为指标的约化数. $\square$

推论 7.24 *设 $\vartheta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. 若 $|\vartheta - p/q| < 1/(2q^2)$, 那么 p/q 是 ϑ 的约化数.*

证明 设 $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ 为 p/q 的连分数展开, 使得 $p/q - p_{k-1}/q_{k-1}$ 与 $p/q - \vartheta$ 同号. 令 α 使得

$$\vartheta = \frac{\alpha p_k + p_{k-1}}{\alpha q_k + q_{k-1}},$$

有

$$\vartheta - \frac{p}{q} = \frac{\alpha p_k + p_{k-1}}{\alpha q_k + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{\operatorname{sgn}(\vartheta - p/q)}{q_k(\alpha q_k + q_{k-1})},$$

从而

$$|\vartheta - p/q| = \frac{1}{q_k(\alpha q_k + q_{k-1})} < \frac{1}{2q_k^2},$$

这样 $\alpha > 2 - q_{k-1}/q_k > 1$. 由 Lagrange 判别法便得要证的命题. □

用一个算术上的应用来结束本节: Hermite (1848) 的 Girard-Fermat 定理 (定理 4.29) 的证明.

定理 7.25 (Girard-Fermat) 设 p 是模 4 余 1 的素数, 那么存在整数 r 和 s, 使得 $p = r^2 + s^2$.

证明 由 Legendre 符号的计算, 知道 -1 是模 p 的平方剩余类. 令 a 是 $[1, p-1]$ 中的整数, 使得 $a^2 \equiv -1 \pmod p$. 将 a/p 连分数展开, 并用 $p_0/q_0, \ldots, p_N/q_N$ 表示其约化数. 存在唯一的指标 k, 使得 $q_k < \sqrt{p} < q_{k-1}$. 由性质 7.7 知,

$$\left|\frac{a}{p} - \frac{p_k}{q_k}\right| \leqslant \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

所以 $|aq_k - pp_k| \leqslant p/q_{k+1} < \sqrt{p}$.

令 $r = q_k$, $s = aq_k - pp_k$, 有

$$r^2 + s^2 \equiv q_k^2 + a^2 q_k^2 \equiv (1 + a^2) q_k^2 \equiv 0 \pmod p,$$

另外,

$$0 < r^2 + s^2 = q_k^2 + s^2 < 2p.$$

所以 $r^2 + s^2 = p$. □

注 上述证明提供了找到 r 和 s 的一个行之有效的方法.

§7.4 二次无理数的连分数展开

定义 7.26 如果两个无理数 ϑ 和 ϑ' 的连分数展开在某一位后相同, 即对适当的 m 和 n, 有

$$\vartheta = [a_0, \ldots, a_m, c_0, c_1, \ldots], \quad \vartheta' = [b_0, \ldots, b_n, c_0, c_1, \ldots],$$

则称它们是连分数等价的.

定理 7.27 两个无理数 ϑ 和 ϑ' 连分数等价的一个充要条件是存在四个整数 a, b, c, d, 使得 $ad - bc = \pm 1$, 且

$$\vartheta' = \frac{a\vartheta + b}{c\vartheta + d}. \tag{7.14}$$

证明 设 ϑ 和 ϑ' 连分数等价, 记 $\sigma = [c_0, c_1, \ldots]$, 有

$$\vartheta = \frac{p_m\sigma + p_{m-1}}{q_m\sigma + q_{m-1}}.$$

类似地,

$$\vartheta' = \frac{p'_n\sigma + p'_{n-1}}{q'_n\sigma + q'_{n-1}}.$$

其中 p_k/q_k (相应地, p'_k/q'_k) 是 $[a_0, \ldots, a_m]$ (相应地, $[b_0, \ldots, b_n]$) 的约化数. 由分式线性变换构成一个群知欲证的公式成立.

反过来, 假设 (7.14) 成立, 通过改变 a, b, c, d 的符号, 可设 $c\vartheta + d > 0$. 将 ϑ 连分数展开到 k 阶, 得

$$\vartheta = \frac{\alpha_{k+1}p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1}}.$$

令 $p := ap_k + bq_k$, $p' := ap_{k-1} + bq_{k-1}$, $q := cp_k + dq_k$, $q' := cp_{k-1} + dq_{k-1}$, 有

$$\vartheta' = \frac{a\vartheta + b}{c\vartheta + d} = \frac{p\alpha_{k+1} + p'}{q\alpha_{k+1} + q'}.$$

通过计算知 $pq' - qp' = \pm 1$. 另外,

$$q = c(p_k - \vartheta q_k) + q_k(c\vartheta + d) = q_k(c\vartheta + d) - c\vartheta_k \sim q_k(c\vartheta + d) \quad (k \to \infty),$$

所以当 k 足够大时 $q > 0$. 同样, 当 k 足够大时 $p > 0$. 由于 $\alpha_{k+1} > 1$ (它是 ϑ 的一个完全分数), 由 Lagrange 判别法知, p'/q' 和 p/q 是 ϑ' 相邻的约化数. 不妨设为 p'_{n-1}/q'_{n-1} 和 p'_n/q'_n. 从而存在整数 n, 使得在显然的记号下, 有

$$\vartheta' = \frac{p'_n\alpha'_{n+1} + p'_{n-1}}{q'_n\alpha'_{n+1} + q'_{n-1}}.$$

这样 $\alpha_{k+1} = \alpha'_{n+1} = [c_0, c_1, \ldots]$, 且

$$\vartheta = [a_0, \ldots, a_k, c_0, c_1, \ldots], \quad \vartheta' = [b_0, \ldots, b_k, c_0, c_1, \ldots]. \qquad \square$$

如果连分数 $\vartheta = [a_0, a_1, \ldots]$ 满足条件: 存在 m 和 h, 使得 $a_{k+h} = a_k$ 对 $k \geqslant m$ 成立, 那么称之为周期的 (或从某项起周期的). 并记之为

$$\vartheta = [a_0, \ldots, a_{m-1}, \overline{a_m, \ldots, a_{m+h-1}}]. \tag{7.15}$$

定理 7.28 设 $\vartheta \in \mathbb{R}$. ϑ 是二次无理数当且仅当其连分数展开从某项起是周期的.

证明 先设 ϑ 的连分数展开是周期的, 即对 $k \geqslant m$ 有 $\alpha_{k+h} = \alpha_k$. 这样

$$\begin{aligned}\vartheta = [a_0, \ldots, a_{m-1}, \alpha_m] &= \frac{p_{m-1}\alpha_m + p_{m-2}}{q_{m-1}\alpha_m + q_{m-2}} \\ = [a_0, \ldots, a_{m+h-1}, \alpha_m] &= \frac{p_{m+h-1}\alpha_m + p_{m+h-2}}{q_{m+h-1}\alpha_m + q_{m+h-2}}.\end{aligned}$$

从而 α_m 是一个二次方程的解, 该方程二次项系数为

$$q_{m+h-1}p_{m-1} - p_{m+h-1}q_{m-1} \neq 0.$$

这是因为指标不同的两个约化数相异.② 这样, α_m 是二次无理数, 由定理 7.27 知 ϑ 亦然.

只余下证明条件是必要的. 设 ϑ 为二次无理数, 是某方程 $a\vartheta^2 + b\vartheta + c = 0$ 的解, 其中 $a \neq 0$. 由于当 $k \geqslant 0$ 时,

$$\vartheta = \frac{p_k\alpha_{k+1} + p_{k-1}}{q_k\alpha_{k+1} + q_{k-1}},$$

所以 α_{k+1} 是二次方程

$$A_k\alpha_{k+1}^2 + B_k\alpha_{k+1} + C_k = 0$$

的解, 其中

$$\begin{cases} A_k := ap_k^2 + bp_kq_k + cq_k^2, \\ B_k := 2ap_kp_{k-1} + b(q_kp_{k-1} + p_kq_{k-1}) + 2cq_kq_{k-1}, \\ C_k := ap_{k-1}^2 + bp_{k-1}q_{k-1} + cq_{k-1}^2. \end{cases}$$

下面将证明 (A_k, B_k, C_k) 只能取有限多个可能的值. 这说明对适当的 h, k, $h > 1$, α_{k+1} 和 α_{k+h} 是同一方程的解. 由于至少一个这样的二次方程重复了无穷多次, 可设 α_{k+1} 与 α_{k+h} 相等. 从而连分数是周期的.

直接的计算说明

$$B_k^2 - 4A_kC_k = (b^2 - 4ac)(q_kp_{k-1} + p_kq_{k-1})^2 = b^2 - 4ac,$$

从而 $B_k^2 = b^2 - 4ac + 4A_kC_k$. 由于 $C_k = A_{k-1}$, 只须证明 A_k 只能取有限多个值. 而

$$\begin{aligned}A_k &= a(q_k\vartheta - \vartheta_k)^2 + b(q_k\vartheta - \vartheta_k)q_k + cq_k^2 \\ &= q_k^2(a\vartheta^2 + b\vartheta + c) - q_k\vartheta_k(2a\vartheta + b) + a\vartheta_k^2 = -q_k\vartheta_k(2a\vartheta + b) + a\vartheta_k^2.\end{aligned}$$

Dirichlet 引理说明了 $|q_k\vartheta_k| \leqslant 1$, 从而

$$|A_k| \leqslant |2a\vartheta + b| + |a|,$$

这推出了要证的结论.③ □

② 否则 $|\vartheta_m| = (q_m/q_{m+h-1})|\vartheta_{m+h-1}| < |\vartheta_{m+h-1}|$, 这与 q_{m+h-1} 的定义矛盾.
③ 否则有 $|\vartheta_m| = (q_m/q_{m+h-1})|\vartheta_{m+h-1}| < |\vartheta_{m+h-1}|$, 这与 q_{m+h-1} 的定义矛盾.

注记

§7.1 1872 年, Cantor 在因特拉肯 (瑞士) 遇见了 Dedekind. 他们之间的讨论促使了现代集合论的诞生. 1873 年底, Cantor 断言 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{N}$ 是等势的[④]. Dedekind 证明了 $\overline{\mathbb{Q}}$ 亦然, 从中 Cantor 意识到 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{N}$ 不是等势的, 这就得到了 Liouville 定理 (定理 7.3), 即超越数的存在性的另一个证明. 在两封给 Dedekind 的信 (1873 年 12 月 7 日和 9 日) 中, Cantor 的确证明了该事实, 说明了存在不同程度的无限. 这正是拓扑学、抽象集合论以及序理论的开端.

Cantor 的思想是数学基础的重大革新, 它创造了新型的数学证明. Cantor-Bernstein 定理说明了, 若两个集合 E 和 F 使得存在从其中任一集合到另一集合的单射, 那么 E 和 F 等势.

Charles Hermite 于 1873 年证明了自然对数的底 e 是超越数. 此前已知它既不是有理数也不是二次无理数. 这是因为 Euler 证明了其连分数展开是

$$\mathrm{e} = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots].$$

在 D.P Parent (1978) 中可找到该式的另一个证明.

Hermite 方法基于解析函数的有理函数逼近. 他认为同样的方法可证明 π 的超越性. Lindeman 于 1882 年实现了他的直观想法, 这对古希腊著名的化圆为方问题给出了否定回答.

习题

116. Cantor 对角线构造.

(a) 令 E 为 $[0,1]$ 之间所有三进制表示 $x = \sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n/3^n$ 中各位数 ε_n 等于 0 或 1 的那些实数组成的集合. 证明 E 中任一实数的三进制表示唯一.

(b) 利用 (a) 中的表达式, 用反证法证明 E 不可数, 进而说明 $[0,1]$ 不可数.

117. Cantor–Mendès France 对角线构造[⑤].

(a) 证明代数数集可数.

(b) 设 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $[0,1]$ 中代数数列, 使得每个 2 的幂分母分数[⑥] 恰出现两次. 将 x_n 二进制展开为

$$x_n = \sum_{k\geqslant 1} e_{nk}/2^k \qquad (n \geqslant 1).$$

④ 如果两个集合之间存在一个双射, 则说它们是等势的.

⑤ 见 Brlek, Mendès France, Robson 和 Rubey (2004) 以及 Mendès France (2007).

⑥ 即形如 $a/2^b$ 的有理数, 其中 $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$.

约定当 x_n 为 2 的幂分母分数时, 其中一个展开只有有限项非零, 而另一个展开从某项起均为 1. 证明对于每个 x_n, 均存在至少一个 x_m, 使得 $e_{mk} \neq e_{nk}$ 对所有 $k \geqslant 1$ 成立.

(c) 证明对角线数 $x := \sum_{k\geqslant 1} e_{kk}/2^k$ 是超越数.

118. 实数 $\vartheta := \sum_{n\geqslant 0} 1/2^{3^n}$ 是否为超越数?

119. Hurwitz 第一定理.

设 $\vartheta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\{p_k/q_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是 ϑ 的约化数列. 证明

$$|\vartheta - p_k/q_k| + |\vartheta - p_{k+1}/q_{k+1}| = 1/q_k q_{k+1} \qquad (k \geqslant 0),$$

并推出不等式 $\|q_j\vartheta\| < 1/(2q_j)$ 对于 $j = k$ 或 $j = k+1$ 成立.

120. Hurwitz 第二定理.

设 $\vartheta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\{p_k/q_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是 ϑ 的约化数列. 令 $t_k := q_k/q_{k-1}$.

(a) 证明 $t_{k+1} \geqslant 1 + 1/t_k \quad (k \geqslant 0)$.

(b) 证明若不等式

$$|\vartheta - p_j/q_j| \leqslant 1\Big/(\sqrt{5}\,q_j^2) \tag{7.16}$$

对于 $j = k-1$ 及 $j = k$ 均不成立, 那么 $t_k^2 + 1 < \sqrt{5}\,t_k$.

(c) 令 $k \geqslant 1$. 证明 (7.16) 对于 $j = k-1$, $j = k$ 或者 $j = k+1$ 成立.

121. Markov 常数.

无理数 ϑ 的 Markov 常数是指有限或无限值

$$\gamma(\vartheta) = 1\Big/\liminf_{q\to\infty}(q\|q\vartheta\|).$$

(a) 证明 $\gamma(\vartheta) = 1\Big/\liminf_{k\to\infty} q_k\|q_k\vartheta\|$.

(b) 证明 $\gamma(\vartheta) = \infty$ 当且仅当 $\limsup_{k\to\infty} a_k = \infty$, 其中 a_k 表示 ϑ 的 k 阶不完全分数.

(c) 二次无理数的 Markov 常数有何性质?

(d) 令 $\varphi := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ 为黄金分割数. 计算 $\gamma(\varphi)$ 并推出 Hurwitz 第二定理是最优的.

122. 给定无理数 ϑ. 令 $\{p_k/q_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为其连分数展开的约化数, $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为其完全分数列, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为其不完全分数列.

(a) 令 $s_k := q_{k-1}/q_k$ $(k \geqslant 1)$. 证明 Markov 常数 $\gamma(\vartheta)$ 满足

$$\gamma(\vartheta) = \limsup_{k\to\infty}(\alpha_{k+1} + s_k).$$

(b) 证明倘若 $\alpha_k \geqslant 3$ 对无穷多个 k 成立, 那么 $\gamma(\vartheta) \geqslant 3$.

(c) 证明若从某项起 $a_k = 1$, 那么, 一方面对足够大的 k 有 $\alpha_k = \varphi := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$; 另一方面, 存在常数 $\lambda > 0$, 使得 $q_k \sim \lambda\varphi^k$ $(k \to \infty)$. 推出 $\gamma(\vartheta) = \sqrt{5}$.

(d) 证明若从某项起 $a_k = 2$, 那么对足够大的 k 有 $\alpha_k = 1+\sqrt{2}$, $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = \sqrt{2}-1$ 及 $\gamma(\vartheta) = \sqrt{8}$.

(e) 证明若当 k 足够大时 a_k 等于 1 或 2, 且每个值均出现了无穷多次, 那么对无穷多个 k, 有 $a_k = 1$ 及 $a_{k+1} = 2$. 利用 $\alpha_{k+2} < 3$ 蕴涵 $\alpha_{k+1} = a_{k+1} + 1/\alpha_{k+2} \geqslant 7/3$ 的事实来证明 $\gamma(\vartheta) \geqslant 17/6 > \sqrt{8}$.

(f) 证明如下定理: 对任意实数 ϑ 有 $\gamma(\vartheta) \geqslant \sqrt{5}$, 等号成立当且仅当对足够大的 k 有 $a_k = 1$. 若排除与黄金分割数 φ 连分数等价的实数, 那么 $\gamma(\vartheta) \geqslant \sqrt{8}$, 等号成立当且仅当对足够大的 k 有 $a_k = 2$, 即 ϑ 与 $\sqrt{2}$ 等价.

123. 证明若 ϑ 与 ϑ' 具有共同的直到 k 阶的不完全分数, 那么 $|\vartheta - \vartheta'| \leqslant 10/\varphi^{2k-1}$, 其中 $\varphi := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

124. 设 ϑ 是无理数, 其不完全分数不超过整数 a. 证明 $q_n \leqslant b^n$, 其中 $b := \frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4})$.

125. 确定无理数 ϑ, 使得在 (7.15) 的记号下, 其连分数展开是 $[8, \overline{1,1,5,5,1,1,16}]$.

126. 给定无理数 ϑ, 考虑幂级数

$$F_\vartheta(z) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\|n\vartheta\|}.$$

令 $R(\vartheta)$ 为 F_ϑ 的收敛半径. 令 $\{p_k/q_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为 ϑ 连分数展开的约化数列.

(a) 证明 $R(\vartheta) \leqslant 1$.

(b) 证明对任意整数 $k \geqslant 0$ 及任意满足 $q_k \leqslant n < q_{k+1}$ 的整数 n 有 $\|q_k\vartheta\|^{1/q_k} \leqslant \|n\vartheta\|^{1/n}$. 推出

$$R(\vartheta) = \liminf_{k\to\infty} \|q_k\vartheta\|^{1/q_k}.$$

(c) 证明对任意整数 $k \geqslant 0$ 有

$$\frac{1}{2q_{k+1}} < \|q_k\vartheta\| < \frac{1}{q_{k+1}}.$$

(d) 设 $\varphi := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ 为黄金分割数. 证明 $R(\varphi) = 1$.

(e) 对任意无理代数数 ϑ 计算 $R(\vartheta)$.

(f) 证明对任意 $k \geqslant 0$ 有 $q_k a_{k+1} \leqslant q_{k+1} \leqslant 2q_k a_{k+1}$. 利用 (c), 推出对任意无理数 ϑ 有

$$R(\vartheta) := \liminf_{k\to\infty} a_{k+1}^{-1/q_k}.$$

(g) 证明把 ϑ 映为 $R(\vartheta)$ 的映射 $R := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to [0,1]$ 是满射.

127. 良逼近. 给定实数 ϑ, 若有理数 p/q, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ 使得

$$|\vartheta - p/q| = \min_{\substack{(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \\ 1\leqslant v\leqslant q}} |\vartheta - u/v|,$$

则称之为 ϑ 的良逼近.

(a) 设 $\vartheta \in \mathbb{R}$. 证明所有 ϑ 的约化数都是 ϑ 的良逼近.

(b) 考虑 $\vartheta = \frac{1}{3}$ 及 $p/q = \frac{1}{2}$. 证明良逼近未必都是约化数.

128. 次约化数. 设 $\vartheta \in \mathbb{R}$, $\{p_k/q_k\}_{k\geqslant 0}$ 为 ϑ 的约化数列 (有限或无限), $\{a_k\}_{k\geqslant 0}$ 为其不完全分数列. 对 $k \geqslant 1$, $h \geqslant 0$, 令 $p_{k,h} := p_{k-1} + hp_k$, $q_{k,h} := q_{k-1} + hq_k$. 给定有理数 p/q, 如果存在整数 k 和 h, 使得 $k \geqslant 1$, $1 \leqslant h < a_{k+1}$ 及 $p/q = p_{k,h}/q_{k,h}$, 则称 p/q 为 ϑ 的次约化数.

(a) 用第二部分的内容, 证明 $\frac{17}{7}$ 是 $\vartheta = 1 + \sqrt{2}$ 的次约化数.

(b) 证明 $\frac{17}{7}$ 不是 $1 + \sqrt{2}$ 的良逼近. 可考虑 ϑ 的约化数 p_2/q_2 并应用不等式

$$\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{99}{70} < \frac{10}{5}.$$

129. 良逼近和次约化数.

(a) 证明如果分母为正的分数 a/b, r/s 及 c/d 满足 $a/b < r/s < c/d$ 及 $bc - ad = 1$, 那么 $s > \max(b, d)$. 可先证 $r/s - a/b \geqslant 1/bs$.

(b) 设 ϑ 是无理数, $\{p_k/q_k\}_{k\geqslant 0}$ 为其约化数列, $\{a_k\}_{k\geqslant 0}$ 为其不完全分数列. 对任意整参数 $k \geqslant 1$ 及 $h \geqslant 0$ 计算 $p_{k,h+1}q_{k,h} - q_{k,h+1}p_{k,h}$. 推出对任意整数 $k \geqslant 1$, 若 k 为奇数, 序列 $\{p_{k,h}/q_{k,h}\}_{h=0}^{a_{k+1}}$ 严格单调上升; 否则它严格单调下降.

(c) 设 p/q 是 ϑ 的良逼近, 使得 $q \geqslant q_1$. 证明 p/q 是 ϑ 的约化数或次约化数. 比如可假设 $\vartheta < p/q$, 先证明存在 $k \geqslant 1$, 使得

$$\vartheta < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} < \frac{p}{q} \leqslant \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}},$$

然后应用 (b) 和 (a) 中已证的结论.

130. 证明若 ϑ, ϑ' 和 ϑ'' 是三个无理数, 使得 $\vartheta < \vartheta' < \vartheta''$, 而且 ϑ 和 ϑ'' 的直到 k 阶约化数相同, 那么 ϑ' 的直到 k 阶约化数亦与另两者相同.

131. 设 ϑ 是无理数, p/q 是有理数, 使得 $|q\vartheta - p| < 1/q$.

(a) 证明存在 $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1 \in \mathbb{N}^*, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$\frac{p}{q} = [a_0, \ldots, a_n] \quad 及 \quad (-1)^n\Big(\vartheta - \frac{p}{q}\Big) > 0.$$

(b) 记 $\{p_j/q_j\}_{j=0}^{n}$ 为 p/q 的约化数列. 定义 α 为满足条件

$$\vartheta = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}}$$

的实数, 其中约定 $(p_{-1}, q_{-1}) = (1, 0)$. 证明 $|q\vartheta - p| = 1/(\alpha q_n + q_{n-1})$ 并推出 $\alpha > 0$.

(c) 证明若 $\alpha > 1$, 那么 p/q 是 ϑ 的约化数.

(d) 证明若 $\alpha \leqslant 1$, 那么 $n \geqslant 1$ 且 $\vartheta = [a_0, a_1, \ldots, a_n + 1/\alpha]$, 推出 p/q 不是 ϑ 的约化数.

(e) 证明 p/q 是 ϑ 的约化数当且仅当

$$|q\vartheta - p| < \frac{1}{q_n + q_{n+1}}.$$

132. 设 ϑ 是无理数, p/q 是有理数, 使得

$$|\vartheta^2 q^2 - p^2| < \vartheta.$$

证明 p/q 是 ϑ 的约化数. 为此可用习题 131 (e) 中的判别法, 并分 $n = 0$, $n = 1$ 及 $n \geqslant 2$ 的情形讨论.

133. 二次无理数的标准型.

(a) 证明所有二次无理数 ϑ 可写成 $\vartheta = (u + \sqrt{d})/v$ 的形式, 其中 d 是非平方正整数, u 和 v 是整数, 使得 $v \neq 0$, $v \mid (d - u^2)$, 称之为 ϑ 的标准型.

(b) 设 $\vartheta = (u + \sqrt{d})/v$ 是写成标准型的二次无理数. 令 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为其完全分数列, 并令 $[a_0, a_1, \ldots]$ 为其连分数展开. 定义两个序列 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$, 使得

$$\begin{aligned} u_0 &= u, \quad v_0 = v, \\ u_{n+1} &= a_n v_n - u_n \quad (n \geqslant 0), \\ v_{n+1} &= (d - u_{n+1}^2)/v_n \quad (n \geqslant 0). \end{aligned} \tag{7.17}$$

证明对任意整数 $n \geqslant 0$, 有

$$u_n \in \mathbb{Z},\ v_n \in \mathbb{Z}^*,\ v_n \mid (d - u_n^2),\ \alpha_n = (u_n + \sqrt{d})/v_n.$$

134. 判定纯周期连分数.

令 $\vartheta = (u + \sqrt{d})/v$ 为标准型下的二次无理数, 并令 $\vartheta' = (u - \sqrt{d})/v$. 用 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 表示 ϑ 的完全分数列. 对任意 $n \geqslant 0$, 令 α'_n 为 α_n 的共轭. 本习题的目的是证明命题

$$\vartheta > 1, \quad \vartheta' \in]-1, 0[\tag{7.18}$$

是 ϑ 的连分数展开为纯周期 (即形如 $[\overline{a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}}]$) 的充要条件.

(a) 证明若 ϑ 满足 (7.18), 那么 $1/\alpha'_{n+1} = \alpha'_n - a_n$ 且 $\alpha'_n \in]-1, 0[$ 对任意 $n \geqslant 0$ 成立. 推出 $a_n = \lfloor -1/\alpha'_{n+1} \rfloor$ $(n \geqslant 0)$. 故若 $\alpha_j = \alpha_{j+h}$

对某两个整数 $j \geqslant 0$, $h \geqslant 1$ 成立, 那么必有 $\alpha_0 = \alpha_h$ 且 $\vartheta = [\overline{a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}}]$.

(b) 反过来, 证明若 ϑ 是二次无理数, 其连分数展开是纯周期的, 周期为 $h \geqslant 1$, 那么 $\vartheta > 1$ 且 ϑ 是多项式 $f(x) := q_{h-1}x^2 + (q_{h-2} - p_{h-1})x - p_{h-2}$ 的根. 证明 $f(-1) > 0$, $f(0) < 0$, 并推出 $\vartheta' \in]-1, 0[$.

135. *平方根的展开.*

设 d 是非平方正整数. 令 $m_d := \lfloor \sqrt{d} \rfloor$.

(a) 证明 $\vartheta := m_d + \sqrt{d}$ 满足条件 (7.18), 故其连分数展开是纯周期的.

(b) 设 h 是 ϑ 连分数展开的周期且 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是其完全分数列. 证明 $\alpha_n = \alpha_0$ 当且仅当 $n \equiv 0 \pmod{h}$. 用习题 133 的记号, 推出 $v_n = 1$ 当且仅当 $n \equiv 0 \pmod{h}$.

(c) 证明 $\vartheta = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_h}]$, 其中 $a_0 = 2m_d$. 推出 $\sqrt{d}$ 的连分数展开具有

$$\sqrt{d} = [m_d, \overline{a_1, \ldots, a_{h-1}, 2m_d}]$$

的形式.

136. Pell *方程的解.*

令 d 为非平方正整数. 所谓 Pell 方程, 是指 Diophantus 方程

$$x^2 - dy^2 = 1. \tag{7.19}$$

用 u_n 和 v_n 表示由 $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ 以及递归关系 (7.17) 所定义的序列. 令 $a_n := \lfloor (u_n + \sqrt{d})/v_n \rfloor$. 用 $\{p_n/q_n\}_{n=0}^{\infty}$ 表示 $\sqrt{d}$ 的约化数列, h 表示其连分数展开的周期.

(a) 记

$$\sqrt{d} = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}.$$

用习题 133 中的公式, 证明

$$p_n^2 - dq_n^2 = (-1)^{n+1}v_{n+1} \quad (n \geqslant 0).$$

(b) 证明对任意整数 $j \geqslant 0$, 数列 (p_{2jh-1}, q_{2jh-1}) 是 (7.19) 的一组解.

(c) 证明若 (x, y) 是 (7.19) 的解, $x > 0$, $y > 0$, 那么 x/y 是 $\sqrt{d}$ 的约化数.

137. (a) 证明对任意含有 N 个整数的 $\mathbb{R}$ 中的区间 I, 有

$$\Big|\sum_{n \in I} \mathrm{e}(n\vartheta)\Big| \leqslant \min\Big(N, \frac{1}{2\|\vartheta\|}\Big),$$

其中约定当 $\vartheta \in \mathbb{Z}$ 时不等式右边等于 N. 以下还将使用此约定.

(b) 证明对任意 $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 有

$$S_N(\vartheta) := \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \mathrm{e}(n^2\vartheta) = o(N).$$

(c) 确定所有使得 $\{n^2\vartheta\}_{n=1}^{\infty}$ 模 1 均匀分布的实数 ϑ 构成的集合 E.

(d) 用 Weyl-van der Corput 引理 (引理 6.8), 选取适当的参数, 证明对任意整数 $N \geqslant 1$ 及任意实数 ϑ, 有

$$|S_N(\vartheta)|^2 \leqslant 2 \sum_{0 \leqslant m \leqslant 2N} \min\Big(2N, \frac{1}{\|m\vartheta\|}\Big).$$

(e) 证明对任意整数 $N \geqslant 1$ 及任意实数 ϑ, 存在整数 $a_N \in \mathbb{Z}$, $q_N \in \mathbb{N}^*$, 使得 $(a_N, q_N) = 1$, $q_N \leqslant 4N$, 且

$$\Big|\vartheta - \frac{a_N}{q_N}\Big| \leqslant \frac{1}{4Nq_N}.$$

推出 $\|m\vartheta\| \geqslant \frac{1}{2}\|a_N m/q_N\|$ $(1 \leqslant m \leqslant 2N)$. 可对每个 m 引进唯一的整数 $b_m \in [0, q_{N/2}]$, 使得 $a_N m \equiv \pm b_m \pmod{q_N}$. 分别讨论 $b_m = 0$ 和 $b_m \geqslant 1$ 的情形.

(f) 保留上题中的记号, 证明对所有整数 $N \geqslant 1$ 以及实数 ϑ, 有

$$|S_N(\vartheta)|^2 \leqslant 4\Big(1 + \frac{2N}{q_N}\Big)\Big\{N + q_N \sum_{1 \leqslant j \leqslant q_N/2} \frac{1}{j}\Big\},$$

推出存在绝对常数 C, 使得

$$|S_N(\vartheta)| \leqslant C\Big\{\frac{N}{\sqrt{q_N}} + \sqrt{N \ln(2q_N)}\Big\}.$$

第二部分
解析方法

第零章　Euler Γ-函数

§0.1　定义

Euler Γ-函数最初的定义见于 1729 年 Euler 给 Goldbach 的一封信:

$$\Gamma(s) := \frac{1}{s}\prod_{n\geqslant 1}\frac{(1+1/n)^s}{1+s/n} \qquad (s \neq 0, -1, -2, \ldots). \tag{0.1}$$

易证乘积在 $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}^*)$ 的任意紧子集上一致收敛, 故决定了 $\mathbb{C}$ 上的一个亚纯函数.

Euler 从中立即得到了积分形式

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad (\sigma > 0). \tag{0.2}$$

这里及以后总约定复数 s 的实部和虚部由下式给出:

$$s = \sigma + \mathrm{i}\tau.$$

定理 0.1 (Euler)　令

$$\Gamma_n(s) := \int_0^n \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n t^{s-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\sigma > 0),$$

那么

$$\Gamma_n(s) = \frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} \tag{0.3}$$

且

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\Gamma_n(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

证明 通过换元 $u = t/n$, 得

$$\Gamma_n(s) = n^s \int_0^1 (1-u)^n u^{s-1}\,\mathrm{d}u \qquad (\sigma > 0).$$

连续使用分部积分, 可计算上式的积分

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-u)^n u^{s-1}\,\mathrm{d}u &= \left[\frac{u^s(1-u)^n}{s}\right]_0^1 + \frac{n}{s}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^s\,\mathrm{d}u \\ &= \cdots = \frac{n!}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}\int_0^1 u^{s+n-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}.\end{aligned}$$

一方面,

$$\begin{aligned}\Gamma_n(s) = \frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} &= \frac{1}{s}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-s}\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{(1+1/j)^s}{1+s/j} \\ &= \Gamma(s) + o(1) \qquad (n\to\infty);\end{aligned}$$

另一方面, 由初等方法①可得 (细节略去)

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

从而命题得证.

下述结论说明了当选择 (0.2) 为函数 Γ 的定义时, 容易证明其亚纯延拓的存在性.

定理 0.2 (函数方程) 有

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \qquad \sigma > 0.$$

证明 用分部积分立得. □

推论 0.3 对于 $n\in\mathbb{N}$, 有 $\Gamma(n+1) = n!$.

以下性质导出 Γ 的另一定义.

定理 0.4 函数 Γ 在 $\mathbb{R}^{+*}$ 上是对数凸的.

证明 只须应用 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\Gamma'(x)^2 = \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}(\ln u)u^{x-1}\,\mathrm{d}u\right)^2 \leqslant \Gamma(x)\Gamma''(x). \qquad \square$$

---

① 从历史角度讲, 这里不允许使用 Lebesgue 积分, 但可利用事实 $(1-t/n)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$, 其中 $0\leqslant t\leqslant n$.

Emil Artin (1898—1962) 证明了函数方程及对数凸性足以确定 Γ 函数. 后文中将有该结论的一个精彩应用.

定理 0.5 (Artin) 设 $\Phi :]0,\infty[\to]0,\infty[$ 是可微函数, 使得 $\ln\Phi$ 是凸函数且使 $x\Phi(x)=\Phi(x+1)$ 对任意 $x>0$ 成立, 那么 $\Phi(x)=\Phi(1)\Gamma(x)$ 对 $x>0$ 成立.

证明 $H:=\Phi/\Gamma$ 是 1-周期的, 且 $H(1)=\Phi(1)$. 由于 Φ'/Φ 和 Γ'/Γ 都是单调上升的, 对 $x\geqslant 0$, $n\geqslant 1$, 有

$$\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)}-\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}\leqslant\frac{H'(n+x)}{H(n+x)}=\frac{\Phi'(n+x)}{\Phi(n+x)}-\frac{\Gamma'(n+x)}{\Gamma(n+x)}\leqslant\frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)}-\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}.$$

而 Φ 和 Γ 又都满足函数方程

$$\frac{f'(x+1)}{f(x+1)}=\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{1}{x},$$

从而

$$\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)}-\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}=\frac{H'(n)}{H(n)}-\frac{1}{n},\quad \frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)}-\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}=\frac{H'(n)}{H(n)}+\frac{1}{n}.$$

由之, 得

$$\frac{H'(1)}{H(1)}-\frac{1}{n}=\frac{H'(n)}{H(n)}-\frac{1}{n}\leqslant\frac{H'(x)}{H(x)}\leqslant\frac{H'(n)}{H(n)}+\frac{1}{n}=\frac{H'(1)}{H(1)}+\frac{1}{n}.$$

令 n 趋于无穷, 可知存在常数 k, 使得对任意 $x>0$, 有 $H'(x)/H(x)=k$. 这样 $H(x)=H(1)\,\mathrm{e}^{kx}$. 由于 H 是周期的, 故 $k=0$. □

用习题 138 中提及的 Bohr-Mollerup 定理, 可略去 Artin 定理中的可微性条件. 习题 139 中有另一判别法.

§0.2 Weierstrass 乘积公式

定理 0.6 (Weierstrass) 对 $\sigma>0$ 有

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=s\,\mathrm{e}^{\gamma s}\prod_{j\geqslant 1}\Big(1+\frac{s}{j}\Big)\mathrm{e}^{-s/j}, \tag{0.4}$$

其中 γ 是 Euler 常数. 此外, (0.4) 将 $1/\Gamma(s)$ 解析延拓成整函数.

证明 令 $H_n:=\sum_{1\leqslant j\leqslant n}1/j$ $(n\geqslant 1)$. 这样

$$H_n=\ln n+\gamma+o(1)\qquad(n\to\infty).$$

由 (0.3), 得

$$\Gamma_n(s) = \frac{n^s}{s} \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{e^{s/j} e^{-s/j}}{1+s/j} = \frac{e^{s(\ln n - H_n)}}{s} \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{e^{s/j}}{1+s/j}.$$

乘积的通项在 $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ 的任意紧子集上一致地为 $1 + O(1/j^2)$, 故令 n 趋于无穷便得要证的结论. □

推论 0.7 $\gamma = -\Gamma'(1)$.

证明 对 (0.4) 求对数导数, 得

$$\frac{-\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \gamma + \frac{1}{s} + \sum_{j \geqslant 1} \Big(\frac{1}{s+j} - \frac{1}{j} \Big). \tag{0.5}$$

当 $s = 1$ 时级数层叠相消, 其值为 -1. □

§0.3 β-函数

β-函数, 抑或第二类 Euler 积分, 定义为

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0, y > 0).$$

定理 0.8 有

$$B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y) \qquad (x > 0, y > 0). \tag{0.6}$$

证明一: 换元.

有

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \int_0^\infty u^{y-1} e^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

作换元 $u = tv$ 并用 Fubini 定理, 得

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \int_0^\infty t^y v^{y-1} e^{-vt}\,\mathrm{d}v \\
&= \int_0^\infty v^{y-1}\,\mathrm{d}v \int_0^\infty t^{x+y-1} e^{-(v+1)t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}} \Gamma(x+y)\,\mathrm{d}v \\
&= \Gamma(x+y) \int_0^\infty \Big(\frac{v}{1+v}\Big)^{y-1} \Big(\frac{1}{1+v}\Big)^{x-1} \frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2} \\
&= \Gamma(x+y) \int_0^1 w^{y-1}(1-w)^{x-1}\,\mathrm{d}w = \Gamma(x+y) B(x,y).
\end{aligned}$$

□

证明二: 用 Artin 定理.

固定 $y>0$. 令 $f(x):=\Gamma(x+y)B(x,y)/\Gamma(y)$, 将证 $f(x)=\Gamma(x)$. 首先有 $f(1)=yB(1,y)=1$ 及

$$f(x+1)=\frac{(x+y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}B(x+1,y).$$

由于

$$\begin{aligned}B(x+1,y)&=\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^x(1-t)^{x+y-1}\,\mathrm{d}t\\&=\left[\frac{(1-t)^{x+y}}{-(x+y)}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x\right]_0^1+\frac{x}{x+y}\int_0^1(1-t)^{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^2}\\&=\frac{x}{x+y}B(x,y),\end{aligned}$$

从中得到

$$f(x+1)=xf(x).$$

由 Hölder 不等式, 当 $1/p+1/q=1$ 时,

$$\begin{aligned}B(x/p+z/q,y)&=\int_0^1 t^{(x-1)/p+(z-1)/q}(1-t)^{(y-1)/p+(y-1)/q}\,\mathrm{d}t\\&\leqslant B(x,y)^{1/p}B(z,y)^{1/q}.\end{aligned}$$

这说明函数 $x\mapsto B(x,y)$ 是对数凸的, 进而函数 $x\mapsto f(x)$ 亦然. 从而由 Artin 定理知 $f(x)=\Gamma(x)$. □

推论 0.9 对 $x>0, y>0$, 有

$$\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)=2\int_0^{\pi/2}(\sin\vartheta)^{2x-1}(\cos\vartheta)^{2y-1}\,\mathrm{d}\vartheta.$$

特别地, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

证明 只须在 (0.6) 中作换元 $t=(\sin\vartheta)^2$ 即可.

同样地, 有 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty t^{-1/2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$, 所以

$$\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}. \tag{0.7}$$

□

推论 0.10 (实 Stirling 公式) 有

$$\Gamma(x+1)\sim x^x\mathrm{e}^{-x}\sqrt{2\pi x}\qquad(x\to\infty). \tag{0.8}$$

证明 这里用渐近计算的一个经典方法, 它通过适当的换元来明确含单参数的积分取较大值的区域.

函数 $t^x e^{-t}$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上的积分等于 $\Gamma(x+1)$, 它在点 $t=x$ 取到最大值. 用换元 $t=x(1+u)$, 得

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_{-1}^{\infty} \{x(1+u)\}^x e^{-x(1+u)} x\,du \\ &= x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{\infty}\{(1+u)e^{-u}\}^x\,du \\ &= x^x e^{-x}\sqrt{2x}\int_{-\sqrt{x/2}}^{\infty} e^{-v^2 h\left(v\sqrt{2/x}\right)}\,dv,\end{aligned} \tag{0.9}$$

其中 $u=v\sqrt{2/x}$, 且

$$h(w) := \frac{2}{w^2}\{w-\ln(1+w)\},$$

$h(0)=1$. 令

$$g_x(v) := \mathbf{1}_{\left[-\sqrt{x/2},\infty\right[}(v)e^{-v^2h\left(v\sqrt{2/x}\right)}.$$

对任意固定的实数 v 有

$$\lim_{x\to\infty} g_x(v) = e^{-v^2}.$$

另外, 注意到

$$h(w) = \frac{2}{w^2}\int_0^w \frac{t\,dt}{1+t} = 2\int_0^1 \frac{z\,dz}{1+zw}.$$

当 $w \leqslant 0$ 时 $h(w) \geqslant 1$, 且在 $w \geqslant 0$ 时 $h(w)$ 单调下降, 故而

$$h(v\sqrt{2/x}) \geqslant h(v\sqrt{2}) \geqslant \frac{v\sqrt{2}-\ln(1+v\sqrt{2})}{v^2} \qquad (x\geqslant 1,\ v\geqslant 0).$$

从而

$$g_x(v) \leqslant e^{-v^2}\mathbf{1}_{]-\infty,0[}(v) + (1+v\sqrt{2})e^{-v\sqrt{2}}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(v).$$

这样便可使用 Lebesgue 控制收敛定理, 由 (0.7) 得到

$$\lim_{x\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_x(v)\,dv = \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2}\,dv = \sqrt{\pi},$$

代入 (0.9) 便得要证的公式. □

推论 0.11 (Legendre 复制定理) 对 $x>0$, 有

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,2^{1-x}\Gamma(x). \tag{0.10}$$

证明 考虑函数 $f(x)=2^{x-1}\pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$. 由 (0.7) 知 $f(1)=1$ 且

$$f(x+1)=2^x\pi^{-1/2}\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{x}{2}+1\Big)$$
$$=2^x\pi^{-1/2}\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\frac{x}{2}\Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big)=xf(x).$$

最后, 由

$$\ln f(x)=x\ln 2-\frac{1}{2}\ln\pi+\ln\Big\{\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{x}{2}+1\Big)\Big\}$$

知, f 是对数凸的. 由 Artin 定理, $f(x)=\Gamma(x)$. □

习题 147 将该结论推广到乘积 $\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma\left(\dfrac{x+j}{n}\right)$ $(n\geqslant 2)$ 之上.

§0.4 复 Stirling 公式

回顾第一部分 §0.2 中 Bernoulli 数和 Bernoulli 函数的定义.

定理 0.12 (复 Stirling 公式) 对 $s\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ 有

$$\log\Gamma(s)=\Big(s-\frac{1}{2}\Big)\log s-s+\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\int_0^\infty B_1(t)\frac{\mathrm{d}t}{s+t},\tag{0.11}$$

其中右边的复对数函数取幅角主值.

注 (i) Weierstrass 乘积公式说明了 $\Gamma(s)$ 非零且在非正整数点上有一阶极点.

(ii) 在任意扇形 $s\neq 0$, $|\arg(s)|\leqslant\pi-\delta$ 上积分一致地为 $O(1/s)$, 其中 $\delta\in]0,\pi[$ 是任意常数. 事实上, 对任意整数 $R\geqslant 1$,

$$\int_0^\infty B_1(t)\frac{\mathrm{d}t}{s+t}=\sum_{1\leqslant r\leqslant R}\frac{(-1)^rB_{r+1}}{r(r+1)s^r}+\frac{(-1)^{R+1}}{R+1}\int_0^\infty\frac{B_{R+1}(t)}{(t+s)^{R+1}}\,\mathrm{d}t.$$

证明 对 $f(t):=\log(t+s)$ $(s\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-)$ 应用参数为 $a=0,b=N$ 的 0 阶 Euler-Maclaurin 公式, 得

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\log(n+s)=\int_0^N\log(t+s)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\{\log(N+s)-\log s\}+\int_0^N\frac{B_1(t)\,\mathrm{d}t}{t+s}$$
$$=(s+N)\log(s+N)-(s+N)-s\log s+s+\frac{1}{2}\log(s+N)$$
$$-\frac{1}{2}\log s+\int_0^N\frac{B_1(t)\,\mathrm{d}t}{t+s}$$
$$=\Big(s+N+\frac{1}{2}\Big)\log(s+N)-N-\Big(s+\frac{1}{2}\Big)\log s+\int_0^N\frac{B_1(t)\,\mathrm{d}t}{t+s}.$$

减去经典的 Stirling 公式

$$\ln N! = \left(N + \frac{1}{2}\right) \ln N - N + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + o(1) \qquad (N \to \infty)$$

得

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \log\left(1 + \frac{s}{n}\right) \\
&\quad = \left(N + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{s}{N}\right) + s\log(s+N) - \left(s + \frac{1}{2}\right)\log s \\
&\qquad - \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \int_0^N \frac{B_1(t)\,\mathrm{d}t}{t+s} + o(1) \\
&\quad = s(1 + \ln N) - \left(s + \frac{1}{2}\right)\log s - \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \int_0^\infty \frac{B_1(t)\,\mathrm{d}t}{t+s} + o(1).
\end{aligned}$$

令 $H_N := \sum_{1\leqslant n\leqslant N} 1/n$. 首先对 $s \in \mathbb{R}^{+*}$ 有

$$\begin{aligned}
&\ln\left\{s\,\mathrm{e}^{\gamma s} \prod_{1\leqslant n\leqslant N} \left(1 + \frac{s}{n}\right)\mathrm{e}^{-s/n}\right\} \\
&= \ln s + s(\gamma - H_N + 1 + \ln N) - \left(s + \frac{1}{2}\right)\ln s - \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \int_0^\infty \frac{B_1(t)}{t+s}\,\mathrm{d}t + o(1) \\
&= -\left(s - \frac{1}{2}\right)\ln s + s - \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \int_0^\infty \frac{B_1(t)\,\mathrm{d}t}{t+s} + o(1).
\end{aligned}$$

令 $N \to \infty$ 知命题对 $s \in \mathbb{R}^{+*}$ 成立, 进而由解析延拓知其对所有 s 成立. □

推论 0.13 (在竖带域中的性态) 令 σ_1, σ_2 为实数, $\sigma_1 < \sigma_2$, 当 $|\tau| \to \infty$ 时对 $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ 一致地有

$$\Gamma(s) = \left\{1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right\}\sqrt{2\pi}|\tau|^{\sigma-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\pi|\tau|/2}\mathrm{e}^{ih_\sigma(\tau)}, \tag{0.12}$$

其中 $h_\sigma(\tau) := \tau\ln|\tau| - \tau + \frac{1}{2}\pi\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\mathrm{sgn}(\tau)$.

证明 有 $\arg(s) = \mathrm{sgn}(\tau)\frac{1}{2}\pi - \sigma/\tau + O(1/\tau^2) \in]-\pi, \pi[$, 且 $\log s = \ln|s| + \mathrm{i}\arg(s)$, 其中

$$\ln|s| = \frac{1}{2}\ln(\sigma^2 + \tau^2) = \ln|\tau| + O(1/\tau^2).$$

由分部积分可得

$$\int_0^\infty \frac{B_1(t)}{t+s}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

从而

$$\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s=\left(\sigma-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau\right)\left(\ln|\tau|+\mathrm{i}\left\{\frac{1}{2}\pi\operatorname{sgn}(\tau)-\frac{\sigma}{\tau}\right\}\right)+O\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$$
$$=\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\ln|\tau|-\frac{1}{2}\pi|\tau|+\sigma+\mathrm{i}h_\sigma(\tau)+O(1/\tau). \qquad \square$$

推论 0.14 (Mellin 变换反转公式) 对 $x>0$ 有

$$\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\Gamma(s)x^{-s}\,\mathrm{d}s \qquad (\sigma>0). \tag{0.13}$$

证明 对 $\sigma>0$ 有

$$\Gamma(\sigma-\mathrm{i}\tau)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{\sigma-\mathrm{i}\tau}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^u+\sigma u}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau u}\,\mathrm{d}u=\widehat{f_\sigma}(\tau),$$

其中 $f_\sigma(u):=\exp\{-\mathrm{e}^u+\sigma u\}$. 推论 0.13 说明 $\widehat{f_\sigma}\in L^1(\mathbb{R})$,[②] 从而可用 Fourier 变换的反转公式, 得

$$f_\sigma(u)\mathrm{e}^{-\sigma u}=\frac{\mathrm{e}^{-\sigma u}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f_\sigma}(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau u}\,\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\Gamma(\sigma-\mathrm{i}\tau)\mathrm{e}^{-(\sigma-\mathrm{i}\tau)u}\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\Gamma(\sigma+\mathrm{i}\tau)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}\tau)u}\,\mathrm{d}\tau.$$

取 $x=\mathrm{e}^u$ 即得题设结论. $\square$

推论 0.15 (互补公式) 对 $s\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ 有

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin(\pi s)}. \tag{0.14}$$

证明 考虑亚纯函数

$$f(s):=\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)\sin\pi s}=\frac{s(1-s)\mathrm{e}^\gamma}{\sin\pi s}\prod_{j\geqslant1}\left(1+\frac{1}{j}+\frac{s(1-s)}{j^2}\right)\mathrm{e}^{-1/j},$$

其中乘积展开由 Weierstrass 公式可得. 所有 $\sin\pi s$ 的零点与无穷乘积的零点相消[③], 故 f 是整函数. 另外

$$f(s+1)=\frac{-1}{\Gamma(s+1)\Gamma(-s)\sin\pi s}=\frac{1}{\Gamma(s)(-s)\Gamma(-s)\sin\pi s}$$
$$=\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)\sin\pi s}=f(s).$$

所以 f 是 1-周期的. 对 $\sigma\in[0,1]$ 及 $|\tau|\to\infty$, 由 (0.12) 得

$$\frac{1}{|f(s)|}\sim|\tau|^{\sigma-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\pi|\tau|/2}\sqrt{2\pi}|\tau|^{\frac{1}{2}-\sigma}\mathrm{e}^{-\pi|\tau|/2}\sqrt{2\pi}|\sin\pi s|\sim 2\pi\mathrm{e}^{-\pi|\tau|}|\sin\pi s|,$$

---

② $\sigma>0$ 保证了 $\Gamma(\sigma+\mathrm{i}\tau)$ 对所有 $\tau\in\mathbb{R}$ 良定义.

③ 注意到 $1+1/j+s(1-s)/j^2=(s+j)(j+1-s)/j^2$.

而 $\sin \pi s = (\sin \pi\sigma)(\mathrm{ch}\pi\tau) + \mathrm{i}(\mathrm{sh}\pi\tau)(\cos \pi\sigma)$, 从而

$$|\sin \pi s|^2 = (\sin^2 \pi\sigma)(\mathrm{ch}^2\pi\tau) + (\mathrm{sh}^2\pi\tau)(\cos^2 \pi\sigma) \sim \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\pi|\tau|},$$

所以 $\lim\limits_{|\tau|\to\infty} |f(s)| = 1/\pi$. 故 f 在竖带域 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ 上有界, 由周期性, 它在 $\mathbb{C}$ 上有界. 故由 Liouville 定理, 它是常数, 又由

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)\sin \pi s} = \frac{s}{\Gamma(1+s)\Gamma(1-s)\sin \pi s} \longrightarrow \frac{1}{\pi} \qquad (s \to 0)$$

知

$$f(s) = 1/\pi \qquad (s \in \mathbb{C}).$$ □

习题 150 和习题 151 中将给出互补公式的另两个证明.

注 若将 (0.13) 右边积分的路径直线向左移, 那么平移后的积分

$$\ll \int_{\mathbb{R}} |s|^{\sigma-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\pi|\tau|/2}x^{-\sigma}\,\mathrm{d}\tau.$$

当 $|\sigma|$ 足够大时, $|s|/x > 1$. 故由 Lebesgue 控制收敛定理, 当 $\sigma \to -\infty$ 时该积分趋于 0. 而由 (0.14), 当 $s \to 0$ 时

$$\Gamma(s-n) = \frac{\pi}{\Gamma(n+1-s)\sin\{\pi(s-n)\}} \sim \frac{(-1)^n}{n!s}.$$

所以 $\Gamma(s)$ 在 $s = -n$ 处的留数等于 $(-1)^n/n!$. 由留数定理可重得级数展开式

$$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!}x^n.$$

推论 0.16 (Euler) 对任意 $z \in \mathbb{C}$ 有

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n\geqslant 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \tag{0.15}$$

证明 这是互补公式及 Weierstrass 定理的直接推论:

$$\begin{aligned}\frac{\sin \pi z}{\pi z} &= \frac{1}{z\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{-1}{z^2\Gamma(z)\Gamma(-z)}\\ &= \mathrm{e}^{\gamma z}\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-z/n}\mathrm{e}^{-\gamma z}\prod_{n\geqslant 1}\left(1-z/n\right)\mathrm{e}^{z/n} = \prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).\end{aligned}$$

取对数导数, 由 Euler 公式得

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{2z}{z^2-n^2} \qquad (z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}). \tag{0.16}$$

令 z 趋于 0 即得

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2. \tag{0.17}$$ □

§0.5 Hankel 公式

从上面看到, Weierstrass 乘积公式说明了 $1/\Gamma$ 是整函数. 而 Hankel 公式则将它表示成积分形式. 对每个正参数 r, 称除去点 $s=-r$ 的圆环加上辐角分别为 π 和 $-\pi$ 的双重射线 $]-\infty,-r]$ 构成的路径为 Hankel 围道 (如图 II-1).

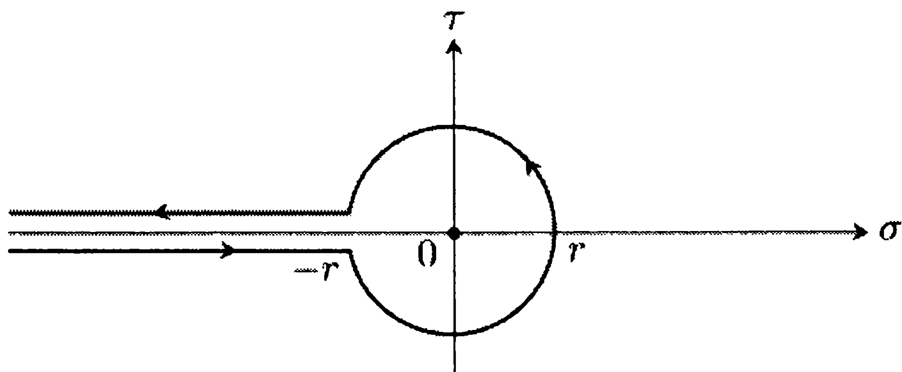


图 II–1 Hankel 围道

定理 0.17 (Hankel 公式) *设 $\mathcal{H}$ 为 Hankel 围道. 对任意复数 z 有*

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{H}}s^{-z}\mathrm{e}^{s}\,\mathrm{d}s. \tag{0.17}$$

证明 积分对每个 z 绝对收敛, 且在紧集上一致收敛. 从而它是 z 的整函数. 由于被积函数只在 $s=0$ 处有极点, 由留数定理, 积分与 r 无关. 当 $\Re e\, z<1$ 时, 在圆环 $|s|=r$ 上的积分当 r 趋于 0 时收敛于 0, 同时在双重射线上的积分趋于

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^\infty(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi z})\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^z\mathrm{e}^\sigma}=\frac{\sin\pi z}{\pi}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^z\mathrm{e}^\sigma}=\frac{\sin\pi z}{\pi}\Gamma(1-z)=\frac{1}{\Gamma(z)}.$$

这对 $\Re e\, z<1$ 证明了 (0.17), 由解析延拓知其对任意 z 成立. □

Hankel 公式的取有限长度围道的实效形式常常有用.

推论 0.18 *对每个 $X>1$, 令 $\mathcal{H}(X)$ 为 Hankel 围道在半平面 $\sigma>-X$ 的部分, 那么对 $z\in\mathbb{C}$ 一致地有*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{H}(X)}s^{-z}\mathrm{e}^{s}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{\Gamma(z)}+O(47^{|z|}\Gamma(1+|z|)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}X}) \tag{0.18}$$

证明 对于 $s=\sigma\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi}$, $\sigma>1$, 有 $|s^{-z}\mathrm{e}^{s}|\leqslant(\mathrm{e}^{\pi}\sigma)^{|z|}\mathrm{e}^{-\sigma}$. (0.18) 左边与积分 (0.17) 之差于是

$$\ll\mathrm{e}^{\pi|z|}\int_X^\infty\sigma^{|z|}\mathrm{e}^{-\sigma}\leqslant\mathrm{e}^{\pi|z|-\frac{1}{2}X}\int_0^\infty\sigma^{|z|}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma}\,\mathrm{d}\sigma.$$

由于 $2\mathrm{e}^{\pi}<47$, 换元 $\sigma=2t$ 后便得要求的上界估计. □

习题

138. Bohr-Mollerup 定理.

令 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为凸函数, 使得 $\varphi(1)=0$, $\varphi(x+1)=\varphi(x)+\ln x$ $(x>0)$.

(a) 证明对任意 $n\geqslant 1$, 函数

$$\psi_n(x):=\{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)\}/x$$

在 $[-1,0[\cup]0,1]$ 上单调上升.

(b) 推出

$$0\leqslant\varphi(x)-\ln\left(n!n^x\Big/\prod_{j=0}^{n}(j+x)\right)\leqslant\frac{1}{n}\qquad(0<x\leqslant 1,\ n\geqslant 1).$$

(c) 证明 φ 唯一确定, 且满足 Gauss 公式

$$\mathrm{e}^{\varphi(x)}=\lim_{n\to\infty}n!\,n^x\prod_{j=0}^{n}(j+x)^{-1}\qquad(x>0).$$

139. Γ 的另一描述.

(a) 证明 $\Gamma'(x)/\Gamma(x)<\ln x$ $(x>0)$. 推出 $x\mapsto\mathrm{e}^x x^{-x}\Gamma(x)$ 对 $x>0$ 单调下降.

(b) 证明 Γ 由 (a) 中证明的单调下降性及条件 $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ 唯一确定.

140. Gauss 对 Euler 公式的证明.

(a) 证明对任意整数 $n\geqslant 0$ 及任意使 $\sigma>0$ 的复数 s, 有

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}=-\sum_{0\leqslant j\leqslant n}\frac{1}{s+j}+\frac{\Gamma'(s+n)}{\Gamma(s+n)}.$$

(b) 证明对 $s\in\mathbb{R}$, $s>1$ 有 $\Gamma'(s)/\Gamma(s)=\ln s+O(1/s)$.

(c) 推出 Euler 公式 $\Gamma(s)=\lim\limits_{n\to\infty}n^s n!\prod\limits_{0\leqslant j\leqslant n}\dfrac{1}{s+j}$.

141. 设 $\{a_j\}_{j=1}^k$ 和 $\{b_j\}_{j=1}^k$ 是两个有限复数列, 使得

$$b_j\notin\mathbb{Z}\ (1\leqslant j\leqslant k),\qquad\sum_{1\leqslant j\leqslant k}a_j=\sum_{1\leqslant j\leqslant k}b_j.$$

证明

$$\prod_{n\geqslant 1}\prod_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{n-a_j}{n-b_j}=\prod_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{\Gamma(1-b_j)}{\Gamma(1-a_j)}.$$

142. 令 $k\geqslant 2$, $\varepsilon_k=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/k}$. 用习题 139 的结论, 证明

$$\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{x}{n^k}\right)=\prod_{j=0}^{k-1}\Gamma(1-\varepsilon_k^j x^{1/k})^{-1}\qquad(x>0).$$

143. 证明 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+t)^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t=2^{x+y-1}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ $(x>0, y>0)$.

144. Dirichlet 积分.

证明对 $f\in\mathcal{C}([0,1])$, $\alpha_j>0$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, $\beta=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$ 有

$$\int_{t_1+\cdots+t_n\leqslant 1} f(t_1+\cdots+t_n)\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{\mathrm{d}t_j}{t_j^{1-\alpha_j}}=\frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\alpha_j)}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 f(u)u^{\beta-1}\,\mathrm{d}u.$$

145. 计算二重积分 $\int_\Delta x^\alpha y^\beta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 α 和 β 是正参数, Δ 是由 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x^\mu+y^\nu\leqslant 1$ $(\mu>0,\nu>0)$ 定义的区域.

146. 对 $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ 计算 $\int_z^{z+1}\log\Gamma(w)\,\mathrm{d}w$.

147. Legendre-Gauss 公式.

(a) 用 Legendre 公式, 证明 $\int_0^1\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

(b) 证明对任意整数 $n\geqslant 2$ 有

$$\prod_{0\leqslant j<n}\Gamma\Big(\frac{x+j}{n}\Big)=(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}n^{\frac{1}{2}-x}\Gamma(x)\qquad (x>0).$$

148. (a) 直接应用积分形式的 $\Gamma(s)$ 的定义, 证明

$$-\Gamma'(1)=\ln x-\frac{1}{x}\int_0^\infty(\ln t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t\qquad (x>1).$$

(b) 利用逼近 $\ln t=\sum_{n\leqslant t}1/n-\gamma+O(1/t)$ $(t>1)$ 重证 $\Gamma'(1)=-\gamma$.

149. Gauss 公式和 Dirichlet 公式.

(a) 证明 $\displaystyle\gamma=\int_0^1\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t-\int_1^\infty\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$, 然后证明

$$\gamma=\int_0^\infty\Big(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}}-\frac{1}{t}\Big)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) 证明对 $\Re e\, z>0$ 有 $\displaystyle\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma-\frac{1}{z}-\sum_{n\geqslant 1}\frac{z}{n(z+n)}$. 利用 (a) 及公式

$$1/(z+n)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(z+n)}\,\mathrm{d}t\qquad (\Re e\, z>0)$$

证明 Gauss 公式

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\int_0^\infty\Big(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}-\frac{\mathrm{e}^{-zt}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\Big)\,\mathrm{d}t\qquad (\Re e\, z>0).$$

(c) 证明 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty\Big(\frac{1}{(1+x)^2\ln(1+x)}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\Big)\,\mathrm{d}x=0$. 用 (b) 推出 Dirichlet 公式

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\int_0^\infty\big(\mathrm{e}^{-x}-(1+x)^{-z}\big)\frac{\mathrm{d}x}{x}\qquad (\Re e\, z>0).$$

150. 互补公式的另一证明.

(a) 对 $\alpha\in]0,1[$ 证明积分 $I(\alpha):=\int_0^\infty t^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ 良定义并计算其值. 可用留数定理, 或先利用换元 $t=u^q$ 处理 $\alpha=p/q\in\mathbb{Q}$ 的情形, 再对一般情形用连续性.

(b) 由 (a) 推出互补公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin(\pi z)$ 对 $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ 成立.

151. (a) 令 T_N 为使得

$$T_N(\sin x)=\sin\{(2N+1)x\}$$

的多项式. 证明

$$T_N(\xi)=(2N+1)\xi\prod_{1\leqslant k\leqslant N}\left(1-\xi^2\Big/\sin^2\frac{\pi k}{2N+1}\right).$$

(b) 选取 $\xi=\sin\{\pi x/(2N+1)\}$ 并令 N 趋于无穷, 仔细讨论取极限的过程, 得出 Euler 公式

$$\sin(\pi x)=\pi x\prod_{k\geqslant 1}(1-x^2/k^2).$$

(c) 用 Weierstrass 乘积公式推出 $\Gamma(x)$ 的互补公式.

152. (a) 证明下式成立

$$\int_0^\infty t^{z-1}\cos t\,\mathrm{d}t=\Gamma(z)\cos\left(\frac{1}{2}\pi z\right)\qquad(0<\Re e\, z<1),$$

$$\int_0^\infty t^{z-1}\sin t\,\mathrm{d}t=\Gamma(z)\sin\left(\frac{1}{2}\pi z\right)\qquad(-1<\Re e\, z<1).$$

(b) 计算 Fresnel 积分的值:

$$I=\int_0^\infty\cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\qquad J=\int_0^\infty\sin(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

153. $\mathbb{R}^n$ 中单位球体积及球对称函数.

若 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 使得存在 $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 满足 $f(\boldsymbol{x})=g(\|\boldsymbol{x}\|)$, 则称之为球对称函数, 其中 $\|\boldsymbol{x}\|$ 表示 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 的 Euclid 范数. 用 μ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 测度在映射 $\boldsymbol{x}\mapsto\|\boldsymbol{x}\|$ 下的像, 即对任意 $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, 等式 $\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}\mu(t)=\int_{\mathbb{R}^n}g(\|\boldsymbol{x}\|)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 在右边积分良定义的前提下成立.

(a) 证明对 $y\in\mathbb{R}^+$ 有 $\mu([0,y])=y^nV_n$, 其中 $V_n=\mu([0,1])$; 推出 $\mathrm{d}\mu(y)=nV_ny^{n-1}\,\mathrm{d}y$ 在 $[0,\infty[$ 上成立.

(b) 选取适当的球对称函数, 证明

$$V_n=\pi^{n/2}\Big/\Gamma\Big(1+\frac{n}{2}\Big).$$

(c) 证明 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}(1+\|\boldsymbol{x}\|^2)^{-\frac{1}{2}(n+1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\pi^{\frac{1}{2}(n+1)}\Big/\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big).$

154. (a) 证明对任意 $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, 存在常数 $M_0(\sigma)$, 使得

$$|\Gamma(x+\mathrm{i}y)| \leqslant M_0(\sigma)\mathrm{e}^{-|y|} \qquad \left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \sigma,\ y \in \mathbb{R}\right).$$

(b) 证明对 $z = \frac{1}{2} + \mathrm{i}y$, $s = \sigma + \mathrm{i}\tau$, $\sigma \geqslant 1$, 有

$$\Gamma(z-k)\Gamma(s-z+k) = (-1)^k \Gamma(z)\Gamma(s-z) \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} \left(1 + \frac{s-1}{j-z}\right).$$

利用估计 $|1+w| \leqslant \exp\{\Re e\, w + O(|w|^2)\}$ $(w \in \mathbb{C})$, 推出对任意满足 $\sigma = \Re e\, s \geqslant 1$ 的 s, 存在常数 $M(s) > 0$, 使得

$$|\Gamma(z-k)\Gamma(s-z+k)| \leqslant M(s)k^{\sigma-1}\mathrm{e}^{-|y|} \qquad \left(k \geqslant 1,\ z = \frac{1}{2} + \mathrm{i}y,\ y \in \mathbb{R}\right).$$

(c) 对 $s \in \mathbb{C}$, $\Re e\, s \geqslant 1$, $u \in]0,1[$, $k \geqslant 0$, 令

$$I_k(s,u) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\frac{1}{2}-k-\mathrm{i}\infty}^{\frac{1}{2}-k+\mathrm{i}\infty} \Gamma(z)\Gamma(s-z)u^{-z}\,\mathrm{d}z.$$

证明该积分绝对收敛, 且当 k 趋于无穷时它趋于 0.

(d) 证明对 $v \in \mathbb{C}$, $|v| < 1$ 有

$$\Gamma(s)(1+v)^{-s} = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \frac{\Gamma(s+k)}{k!} v^k.$$

(e) 证明对 $\Re e\, s \geqslant 1$, $u \in]0,1[$ 有 $I_0(s,u) = (1+u)^{-s}\Gamma(s)$.

(f) 证明对 $a, b \in [1,\infty[$, $\Re e\, s \geqslant 1$, 有

$$\frac{\Gamma(s)}{(a+b)^s} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\frac{1}{2}-\mathrm{i}\infty}^{\frac{1}{2}+\mathrm{i}\infty} \frac{\Gamma(z)\Gamma(s-z)}{a^z b^{s-z}}\,\mathrm{d}z$$

(分 $a < b$, $a = b$ 及 $a > b$ 三种情况讨论).

(g) 证明存在常数 σ_0 使得对 $\sigma > \sigma_0$ 有

$$\Gamma(s) \sum_{m \geqslant 1} \sum_{n \geqslant 1} (m^3+n^2)^{-s} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\frac{1}{2}-\mathrm{i}\infty}^{\frac{1}{2}+\mathrm{i}\infty} \zeta(3z)\zeta(2s-2z)\Gamma(z)\Gamma(s-z)\,\mathrm{d}z,$$

其中 ζ 是 Riemann ζ-函数. 确定 σ_0 的值 (不要求最优).

第一章　生成函数: Dirichlet 级数

§1.1　收敛的 Dirichlet 级数

设 f 是数论函数. 若幂级数

$$S(z) := \sum_{n\geqslant 1} f(n)z^n$$

在 0 的某邻域内收敛, 那么许多经典的定理就将和式的解析性质与其系数联系在了一起, 比如关系 $S^{(n)}(0) = n!f(n)$ 以及 Cauchy 公式.

类似地, 收敛的 Dirichlet 级数

$$F(s) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s} \tag{1.1}$$

的解析性质与序列 $f(n)$ 的渐近性质紧密关联. 本部分的一个中心目的便是探寻明确这种联系的方法.

字母 s 代表复数. 实数 σ 和 τ 由关系式

$$s = \sigma + \mathrm{i}\tau$$

隐含地定义.

定义 1.1　*设 f 是数论函数, (1.1) 定义的其收敛域上的复变函数 $F(s)$ 称为 f 的 Dirichlet 级数.*

第一部分第二章中讨论的形式 Dirichlet 级数的性质暗示了收敛的 Dirichlet 级数的算术意义. 让我们从关于 Dirichlet 卷积的一个简单而基础的结果开始讨论.

定理 1.2 设 f, g, h 为数论函数, 其 Dirichlet 级数分别是 F, G, H. 假设

$$h = f * g, \tag{1.2}$$

那么级数 $H(s)$ 在 F 和 G 的公共绝对收敛域上收敛, 且此时有

$$H(s) = F(s)G(s). \tag{1.3}$$

证明 设 F 和 G 在点 s 处绝对收敛, 那么对任意 $x \geqslant 1$, 有

$$\sum_{n \leqslant x} \left| \frac{h(n)}{n^s} \right| = \sum_{md \leqslant x} \left| \frac{f(m)g(d)}{m^s d^s} \right| \leqslant \sum_{m \leqslant x} \left| \frac{h(m)}{m^s} \right| \sum_{d \leqslant x} \left| \frac{g(d)}{d^s} \right|.$$

这推出了 $H(s)$ 的绝对收敛性. (1.3) 由相应的形式等式可得, 见第一部分 §2.4. □

注 若将定理 1.2 中的绝对收敛域改成收敛域, 那么命题未必成立. 容易构造函数 f, g, h 满足 (1.2), 并使得 $F(s), G(s)$ 收敛, 但 $H(s)$ 发散, 见习题 155 与注记.

§1.2 乘性函数的 Dirichlet 级数

由第一部分定理 2.5 可知, 乘性函数的形式 Dirichlet 级数具有可展成 Euler 乘积的关键特性. 下述定理给出该代数等式具有解析意义的一个充分条件.

定理 1.3 设 f 是乘性函数, s 是复数. 在条件

$$\sum_p \sum_{\nu \geqslant 1} \left| \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}} \right| < \infty \tag{1.4}$$

下, Dirichlet 级数 (1.1) 绝对收敛, 且

$$F(s) = \prod_p \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}. \tag{1.5}$$

注 (i) 若级数 (1.1) 绝对收敛, 那么 (1.4) 亦然. 从而 (1.1) 和 (1.4) 的绝对收敛性等价.

(ii) 当 f 完全乘性 (相应地, 强乘性) 时, (1.5) 右边可更简单地写成

$$\prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}, \qquad \left(\text{相应地, } \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s - 1}\right)\right).$$

证明 首先注意到条件 (1.4) 推出无穷乘积 $M := \prod_p \left(1 + \sum_{\nu \geqslant 1} |f(p^\nu)/p^{\nu s}|\right)$ 收敛. 其次, 对 $x \geqslant 1$, 有

$$\sum_{n \leqslant x} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leqslant \sum_{P^+(n) \leqslant x} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| = \prod_{p \leqslant x} \left(1 + \sum_{\nu \geqslant 1} \left| \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}} \right|\right) \leqslant M.$$

这说明了 $F(s)$ 绝对收敛. 从上界估计

$$\left|\sum_{n\geqslant 1}\frac{f(n)}{n^s}-\prod_{p\leqslant x}\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right|=\left|\sum_{P^+(n)>x}\frac{f(n)}{n^s}\right|\leqslant\sum_{n>x}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right|$$

出发令 x 趋于无穷便得到 (1.5). □

推论 1.4 (Euler 公式) 对 $\sigma>1$ 有

$$\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{1.6}$$

这个简单的公式揭示了 Riemann 级数与素数之间的具体联系. 这是解析数论的一个关键工具.

§1.3 Dirichlet 级数的基本解析性质

设 $n\mapsto a_n$ 为数论函数. 令

$$A(t):=\sum_{n\leqslant \mathrm{e}^t}a_n,$$

那么 (a_n) 的 Dirichlet 级数可写成如下形式:

$$F(s):=\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}=\int_{0-}^{\infty}\mathrm{e}^{-ts}\,\mathrm{d}A(t).$$

该积分称为函数 $A(t)$ 的 Laplace-Stieltjes 变换. 绝大部分关于 Dirichlet 级数的基本定理都可在此框架下推广, 其中 Stieltje 积分的技巧是一种很适用的技术工具.

设 $\mathcal{V}$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上且在有限区间上有界变差的函数组成的集合. 虽然我们的主要研究对象是 Dirichlet 级数, 在条件允许的时候 (更多是出于清晰性而非一般性的考虑) 就讨论 $\mathcal{V}$ 中函数的 Laplace-Stieltjes 变换.

定理 1.5 设 A 是 $\mathcal{V}$ 中函数, 且

$$F(s):=\int_{0-}^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}A(t) \tag{1.7}$$

是其 Laplace-Stieltjes 变换.

(i) 若积分 (1.7) 在 $s=s_0=\sigma_0+\mathrm{i}\tau_0$ 处收敛, 那么它对使得 $\sigma>\sigma_0$ 的 s 收敛, 而且在任意扇形

$$S(\vartheta):=\{s\in\mathbb{C}:|\arg(s-s_0)|\leqslant\vartheta\}\quad(0\leqslant\vartheta<\pi/2)$$

上一致收敛.

(ii) 若积分 (1.7) 在 $s=s_0$ 处绝对收敛, 那么它在半平面 $\sigma \geqslant \sigma_0$ 上绝对一致收敛.

(iii) 函数 $F(s)$ 在 (1.7) 的任意开收敛域上全纯, 且有

$$F^{(k)}(s)=\int_{0-}^{\infty}(-t)^k \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}A(t) \qquad (k=0,1,2,\ldots). \tag{1.8}$$

证明 (i) 设 $\vartheta \in [0,\pi/2[$. 扇形 $S(\vartheta)$ 等同于使

$$|s-s_0| \leqslant \frac{\sigma-\sigma_0}{\cos\vartheta}$$

的复数 s 之集. 对 $\varepsilon>0$, 将证存在实数 $x_0=x_0(\varepsilon,\vartheta)$, 使得对 $y \geqslant x \geqslant x_0$ 有

$$\left|\int_x^y \mathrm{e}^{-ts}\,\mathrm{d}A(t)\right| \leqslant \varepsilon \qquad (s\in S(\vartheta)).$$

令

$$g(u):=\int_{0-}^{u}\mathrm{e}^{-ts_0}\,\mathrm{d}A(t) \qquad (u\geqslant 0).$$

由假设, 存在 $x_0=x_0(\varepsilon,\vartheta)$, 使得对 $v\geqslant u\geqslant x_0$ 有

$$|g(v)-g(u)| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\vartheta.$$

从而对 $y\geqslant x\geqslant x_0$ 及 $s\in S(\vartheta)\setminus\{s_0\}$ 有

$$\begin{aligned}\left|\int_x^y \mathrm{e}^{-ts}\,\mathrm{d}A(t)\right| &= \left|\int_x^y \mathrm{e}^{-u(s-s_0)}\,\mathrm{d}\{g(u)-g(x)\}\right| \\ &= \left|\mathrm{e}^{-y(s-s_0)}\{g(y)-g(x)\}+(s-s_0)\int_x^y \mathrm{e}^{-u(s-s_0)}\{g(u)-g(x)\}\,\mathrm{d}u\right| \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\vartheta+|s-s_0|\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\vartheta\int_x^y \mathrm{e}^{-u(\sigma-\sigma_0)}\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\vartheta\Big(1+\tfrac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\Big) \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon(\cos\vartheta+1)\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

这证明了题设结论.

命题 (ii) 不过是对 $y\geqslant x$ 及 $\sigma\geqslant\sigma_0$ 成立的显然上界估计

$$\int_x^y |\mathrm{e}^{-ts}|\,|\mathrm{d}A(t)| \leqslant \int_x^y |\mathrm{e}^{-ts_0}|\,|\mathrm{d}A(t)|$$

的一个变体.

下证 (iii). 幂级数的一致收敛性说明了对 $x\geqslant 0$ 有

$$\int_{0-}^{x}\mathrm{e}^{-ts}\,\mathrm{d}A(t)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{s^n}{n!}\int_{0-}^{x}(-t)^n\,\mathrm{d}A(t).$$

于是等式左边是 s 的整函数, 其 k 阶导数等于

$$\sum_{n\geqslant k}\frac{s^{n-k}}{(n-k)!}\int_{0-}^{x}(-t)^n\,\mathrm{d}A(t)=\int_{0-}^{x}(-t)^k\mathrm{e}^{-ts}\,\mathrm{d}A(t).$$

由 Weierstrass 定理, 在任意紧集上一致收敛的解析函数列的极限仍是解析函数, 见 Cartan (1961) 第五章定理 1. 故由上式可得 (iii). □

考虑形如 (1.7) 的积分 $F(s)$. 由前述定理的 (i) 和 (ii) 两点知使该积分收敛 (相应地, 绝对收敛) 的点 s 的横坐标 σ 构成以 σ_c (相应地, σ_a) 为端点的半直线. 将 σ_c 和 σ_a 分别称作积分的收敛坐标和绝对收敛坐标. 约定这两个数可取 $\pm\infty$ 值.

容易构造在收敛轴 $\sigma=\sigma_c$ 上处处收敛或处处发散的 Dirichlet 级数的例子. 下列结论说明了有时可用解析延拓来计算级数和在收敛轴上的值.

定理 1.6 假设 (1.7) 中对 $\sigma>\sigma_c$ 定义的积分在轴 $\sigma=\sigma_c$ 的某些点 s 上有解析延拓 $\widetilde{F}(s)$, 那么等式

$$\widetilde{F}(s)=\int_{0-}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ts}\,\mathrm{d}A(t)$$

在积分的每个收敛点上成立.

证明 将用定理 1.5 (i) 中证明的一致收敛性

$$F(s)=\lim_{\delta\to0+}F(s+\delta)\qquad(\sigma=\sigma_c).$$

由于 $\widetilde{F}$ 解析, 这说明了

$$\widetilde{F}(s)=\lim_{\delta\to0+}\widetilde{F}(s+\delta)=\lim_{\delta\to0+}F(s+\delta)=F(s),$$

即题设命题. □

为应用定理 1.6, 可考虑 Riemann ζ-函数. 对 $\sigma>1$, 有

$$\zeta(s)=\int_{1-}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\lfloor t\rfloor}{t^s}=s\int_1^{\infty}\lfloor t\rfloor\frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}}=\frac{s}{s-1}-s\int_1^{\infty}\frac{\langle t\rangle}{t^{s+1}}\,\mathrm{d}t.\tag{1.9}$$

由于最后一个积分对 $\sigma>0$ 一致收敛, $\zeta(s)$ 可亚纯延拓到 $\sigma>0$ 上. $s=1$ 是其唯一的单极点. 由定理 1.6 知, 在级数收敛的假设下必有

$$\sum_{n\geqslant1}\frac{\mu(n)}{n}=\zeta^{-1}(1)=0.\tag{1.10}$$

从而由第一部分定理 3.8, 素数定理便等价于级数 (1.10) 的收敛性.

下列定理说明了当 $F(s)$ 是 Dirichlet 级数时, σ_c 和 σ_a 不能独立地选择.

定理 1.7 设 $F(s)$ 是 (1.1) 定义的 Dirichlet 级数, 那么

$$\sigma_c \leqslant \sigma_a \leqslant \sigma_c + 1. \tag{1.11}$$

证明 令 $\varepsilon > 0$. 级数 $\sum_{n\geqslant 1} f(n)/n^{\sigma_c+\varepsilon}$ 的收敛性推出上界估计

$$f(n) \ll_\varepsilon n^{\sigma_c+\varepsilon},$$

从而推出了级数 (1.1) 在 $s = \sigma_c + 1 + 2\varepsilon$ 上绝对收敛. 故 $\sigma_a \leqslant \sigma_c + 1 + 2\varepsilon$. 取极限后就得要证的结论. □

容易证明区间估计 (1.11) 是最优的. 对于级数

$$G(s) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^s} = (2^{1-s} - 1)\zeta(s) \tag{1.12}$$

有 $\sigma_c = 0$ (由交错级数收敛定理). 注意到 $\sigma_a = 1$.

定理 1.7 的一个著名的推论是 Dirichlet 级数展开的唯一性.

定理 1.8 设 $F(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n/n^s$ 是 Dirichlet 级数, 当 σ 足够大时为零, 那么 $a_n = 0$ 对 $n \geqslant 1$ 成立.

证明 用反证法. 假设序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 并非恒零. 设 m 是使 $a_m \neq 0$ 的最小整数. 对足够大的 σ 有

$$0 = F(s) = \frac{a_m}{m^s}\{1 + G(s)\}, \tag{1.13}$$

其中

$$G(s) := \sum_{k\geqslant 1} \frac{a_{m+k}}{a_m}\left(\frac{m}{m+k}\right)^s.$$

由定理 1.7, 该级数对 $\sigma > \sigma_c + 1$ 绝对收敛. 于是对 $\sigma > \sigma_1 > \sigma_c + 1$ 有

$$|G(s)| \leqslant |a_m|^{-1}(1+1/m)^{\sigma_1-\sigma} m^{\sigma_1} \sum_{k\geqslant 1} \frac{|a_{m+k}|}{(m+k)^{\sigma_1}} \ll_{\sigma_1} (1+1/m)^{-\sigma},$$

所以当 $\sigma \to +\infty$ 时 $G(s)$ 趋于 0, 这与 (1.13) 矛盾. □

与幂级数类比, 也许会以为所有 Dirichlet 级数在其收敛轴上总有奇点. 事实并非如此. 级数 (1.12) 在这方面是极好的反例. 将在第三章中看到, Riemann ζ-函数可亚纯延拓到 $\mathbb{C}$ 上, 且只在 $s = 1$ 有一个单极点. 这说明 $G(s)$ 可延拓为一个整函数. 亦可直接证明 $G(s)$ 可延拓为 $\sigma > -1$ 上的全纯函数, 见习题 156.

下列定理通常称为 Landau 定理 (见注记), 它刻画了使得收敛轴上总有奇点的一种情形.

定理 1.9 (Phragmén-Landau) 设 A 是 $\mathcal{V}$ 中的函数, $F(s)$ 是其如 (1.7) 定义的 Laplace-Stieltjes 变换. 若 A 单调上升, 那么 $s=\sigma_c$ 是 $F(s)$ 的奇点.

推论 1.10 非负系数 Dirichlet 级数在其收敛坐标上总有一个极点.

定理 1.9 的证明 用反证法. 假设 F 可全纯延拓到 $s=\sigma_c$ 的某个邻域. 于是存在两个数 $\sigma>\sigma_c$ 和 $r>\sigma-\sigma_c$, 使得 F 在点 σ 的 Taylor 级数

$$F(s)=\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k!}F^{(k)}(\sigma)(s-\sigma)^k$$

在圆盘 $|s-\sigma|<r$ 上收敛. 由 (1.8), 在该条件下有

$$\begin{aligned}F(s)&=\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}(s-\sigma)^k\int_{0-}^{\infty}(-t)^k\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}A(t)\\&=\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}\int_{0-}^{\infty}t^k(\sigma-s)^k\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}A(t).\end{aligned}$$

当 s 是实数, $\sigma-r<s<\sigma$ 时, 由于被积函数及测度 $\mathrm{d}A(t)$ 均为正, 故可交换和号, 得

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_{0-}^{\infty}\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}t^k(\sigma-s)^k\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}A(t)\\&=\int_{0-}^{\infty}\mathrm{e}^{t(\sigma-s)}\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}A(t)=\int_{0-}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}A(t).\end{aligned}$$

从而 Laplace-Stieltjes 积分在点 s 处收敛. 这与 $s<\sigma_c$ 的选择矛盾. 命题于是得证. □

实际应用中, Phragmén-Landau 定理具有特别的重要性. 它是绝大部分振荡定理的基础. 这里仅限于叙述以下两个结果, 它们以该定理的应用为其特色.

定理 1.11 设 $A:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ 是局部有界的可测函数. 若积分

$$H(s):=\int_1^{\infty}\frac{A(t)}{t^{s+1}}\,\mathrm{d}t \tag{1.14}$$

具有有限的收敛坐标 σ_c 且可解析延拓到 $s=\sigma_c$, 那么对任意 $\varepsilon>0$ 有

$$A(x)=\Omega_{\pm}(x^{\sigma_c-\varepsilon}). \tag{1.15}$$

证明 不妨设存在 $K=K(\varepsilon)$ 使得

$$A(t)\leqslant Kt^{\sigma_c-\varepsilon}$$

对足够大的 t 成立. 通过改变 K 的值, 可设该不等式对 $t \geqslant 1$ 成立. 这样有

$$H(s) - \frac{K}{s - \sigma_c + \varepsilon} = \int_1^{\infty} \frac{A(t) - Kt^{\sigma_c - \varepsilon}}{t^{s+1}} \,\mathrm{d}t = -\int_0^{\infty} B(u)\mathrm{e}^{-su} \,\mathrm{d}u,$$

其中

$$B(u) := K\mathrm{e}^{(\sigma_c - \varepsilon)u} - A(\mathrm{e}^u) \geqslant 0.$$

最后一个积分的收敛坐标还是 σ_c. 这是因为

$$\int_1^{\infty} t^{\sigma_c - \varepsilon - s - 1} \,\mathrm{d}t$$

对 $\sigma > \sigma_c - \varepsilon$ 绝对收敛. 由 Phragmén-Landau 定理, $s = \sigma_c$ 必是 $H(s) - K/(s - \sigma_c + \varepsilon)$ 的奇点, 故 $H(s)$ 在点 σ_c 不能全纯. □

定理 1.12 设 $F(s) = \sum_{n \geqslant 1} a_n/n^s$ 是实系数 Dirichlet 级数, 其收敛坐标有限. 假设存在实数 $\sigma_0 > 0$, 使得 $F(s)$ 可解析延拓到射线 $[\sigma_0, +\infty[$ 上, 并在轴 $\sigma = \sigma_0$ 上有一个极点, 那么

$$\sum_{n \leqslant x} a_n = \Omega_{\pm}(x^{\sigma_0}).$$

证明 令 $A(t) := \sum_{n \leqslant t} a_n$, 并用 σ_c 表示 (1.14) 中定义的积分 $H(s)$ 的收敛坐标. 由 Abel 求和法, 对足够大的 σ 有

$$F(s) = sH(s),$$

其中 $H(s)$ 可解析延拓到射线 $[\sigma_0, +\infty[$ 上. 可假设存在常数 K, 使得 $A(t) + Kt^{\sigma_0}$ 对足够大的 t 不变号. 不妨设在无穷远点附近 $A(t) \geqslant -Kt^{\sigma_0}$, 这样存在常数 C, 使得

$$B(t) := A(t) + Kt^{\sigma_0} + C \geqslant 0 \quad (t \geqslant 1).$$

积分

$$L(s) := \int_1^{\infty} \frac{B(t)}{t^{s+1}} \,\mathrm{d}t = H(s) + \frac{K}{s - \sigma_0} + \frac{C}{s}$$

在 $]\sigma_0, +\infty[$ 上全纯, 且由 Phragmén-Landau 定理, 它在 $\sigma > \sigma_0$ 上收敛. 若 $s_0 = \sigma_0 + \mathrm{i}\tau_0$ 是 $F(s)$ 的极点, 且函数在该点的主项为 $\lambda(s - s_0)^{-m}$, 那么一方面有

$$|L(s_0 + \delta)| \leqslant L(\sigma_0 + \delta) \qquad (\delta > 0),$$

另一方面

$$L(\sigma_0 + \delta) \sim \frac{K}{\delta}, \qquad L(s_0 + \delta) \sim \frac{\lambda}{s_0 \delta^m} \quad (\delta \to 0+).$$

这说明 $|K| \geqslant |\lambda/s_0|$. 特别地, 当 $|K| < |\lambda/s_0|$ 时 $A(t) + Kt^{\sigma_0}$ 不能在无穷远点附近不变号. □

在习题 160 中还将给出经典振荡定理的三个例子.

§1.4 收敛坐标与均值

设 A 是 $\mathcal{V}$ 中的函数,

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} \mathrm{e}^{-ts}\,\mathrm{d}A(t) \tag{1.16}$$

是其 Laplace-Stieltjes 变换. 本节的目的是在知道 A 的渐近性质的前提下给出 (1.16) 的收敛坐标的一个具体形式. 显然 A 在任一点的有界邻域中的值对 σ_c 并无影响. 不失一般性, 可附加一个假设

$$A(0\pm) = 0. \tag{1.17}$$

收敛坐标 σ_c 的具体计算与幂级数收敛半径计算中的 Cauchy 公式类似, 这是本书定理 1.14 的目的, 其证明归结于如下结论.

定理 1.13 设 σ_c 是积分 (1.16) 的收敛坐标.
(i) 若 $A(x) \ll \mathrm{e}^{\delta x}$ 对某实数 δ 成立, 那么 $\sigma_c \leqslant \delta$.
(ii) 若积分 (1.16) 对 $s = s_0$ 收敛, $\sigma_0 > 0$, 那么

$$A(x) = o(\mathrm{e}^{\sigma_0 x}) \qquad (x \to \infty).$$

(iii) 若积分 (1.16) 对 $s = s_0$ 收敛, $\sigma_0 < 0$, 那么存在实数 α, 使得

$$A(x) = \alpha + o(\mathrm{e}^{\sigma_0 x}) \qquad (x \to \infty).$$

证明 (i) 对任意 $x > 0$, 有

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}A(t) = A(x)\mathrm{e}^{-sx} + s\int_0^x \mathrm{e}^{-st}A(t)\,\mathrm{d}t.$$

对 $A(t)$ 增长阶的假设蕴涵了积分 (1.16) 在使得 $\sigma > \delta$ 的那些 s 处的收敛性, 故有 $\sigma_c \leqslant \delta$.

(ii) 由题设, 有

$$B(x) := \int_0^x \mathrm{e}^{-s_0 t}\,\mathrm{d}A(t) = F(s_0) + o(1) \qquad (x \to \infty). \tag{1.18}$$

故有

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^x \mathrm{e}^{s_0 t}\,\mathrm{d}B(t) = \mathrm{e}^{s_0 x}B(x) - s_0\int_0^x \mathrm{e}^{s_0 t}B(t)\,\mathrm{d}t \\ &= s_0\int_0^x \{B(x) - B(t)\}\mathrm{e}^{s_0 t}\,\mathrm{d}t + B(x). \end{aligned}$$

命题由 (1.18) 可得.

(iii) 由定理 1.5 (i) 知 $F(s)$ 在 $s=0$ 处收敛. 令 $\alpha := F(0)$. 在 (1.18) 的记号下有

$$\alpha - A(x) = \int_x^\infty \mathrm{e}^{s_0 t}\,\mathrm{d}B(t) = -\mathrm{e}^{s_0 x}B(x) - s_0\int_x^\infty \mathrm{e}^{s_0 t}B(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= s_0\int_x^\infty \{B(x)-B(t)\}\mathrm{e}^{s_0 t}\,\mathrm{d}t = s_0\int_x^\infty o(\mathrm{e}^{\sigma_0 t})\,\mathrm{d}t = o(\mathrm{e}^{\sigma_0 x}). \qquad \square$$

注 当 $\sigma_0 = 0$ 时, 定理 1.13 的命题 (ii) 和 (iii) 不成立. 前者的一个反例是函数

$$A(x) = \begin{cases} 0, & 若\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & 若\ x > 1. \end{cases}$$

积分 (1.16) 在 $s_0 = 0$ 处收敛, 但 $A(x) = o(1)$ 在无穷远点附近不成立. 关于后者可考虑

$$A(x) = \begin{cases} 0, & 若\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2\sqrt{x}, & 若\ x > 1. \end{cases}$$

显然

$$F(i) = 2\mathrm{e}^{-i} + \int_1^\infty t^{-1/2}\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{d}t.$$

积分的收敛性是经典结果, 然而 $A(x)$ 在 $x\to\infty$ 时并无有限极限.

定理 1.14 令 $\kappa := \limsup\limits_{x\to\infty} x^{-1}\ln|A(x)|$.

(i) 若 $\kappa \neq 0$, 那么 $\sigma_c = \kappa$.

(ii) 若 $\kappa = 0$, 要么 $A(x)$ 当 $x\to\infty$ 时无有限极限且 $\sigma_c = 0$, 要么存在实数 α, 使得当 $x\to\infty$ 时 $A(x)\to\alpha$, 且

$$\sigma_c = \limsup_{x\to\infty} x^{-1}\ln|A(x)-\alpha| \leqslant 0.$$

证明 对每个固定的 $\varepsilon > 0$ 有 $A(x) \ll_\varepsilon \mathrm{e}^{(\kappa+\varepsilon)x}$. 定理 1.13 (i) 说明了无论在何种情形下均有

$$\sigma_c \leqslant \kappa. \tag{1.19}$$

先设 $\kappa > 0$. 那么只要 $0 < \sigma < \kappa$ 积分 $F(s)$ 便发散, 否则由定理 1.13 (ii) 知 $A(x) = o(\mathrm{e}^{\sigma x})$, 这与 κ 的定义矛盾. 故 $\sigma_c \geqslant \kappa$, 等式于是成立.

若 $\kappa < 0$. 当 $x\to\infty$ 时 $A(x)\to 0$. 定理 1.13 (iii) 于是推出

$$A(x) = o(\mathrm{e}^{\sigma x}) \qquad (x\to\infty) \tag{1.20}$$

对 $\sigma > \sigma_0$ 成立. 然而由 κ 的定义, 任一 $\sigma < \kappa$ 不满足 (1.20). 所以 $\sigma_c \geqslant \kappa$, 进而 $\sigma_c = \kappa$.

现在考虑 $\kappa = 0$ 的情形. 若 $A(x)$ 在无穷远处无极限, $F(s)$ 在点 $s = 0$ 发散, 故 $\sigma_c \geqslant 0$. 用 (1.19) 仍可推出要证的结论. 倘若 $A(x) = \alpha + o(1)$, 需证 $\sigma_c = \xi$, 其中 ξ 是使

$$A(x) = \alpha + o(\mathrm{e}^{\sigma_1 x}) \tag{1.21}$$

的 σ_1 之集的下确界. 由定理 1.13 (iii), $\sigma_c \geqslant \xi$. 由 (1.21), 用分部积分得 $F(s)$ 对 $\sigma > \xi$ 收敛, 故 $\sigma_c \leqslant \xi$. □

§1.5 一个算术应用: 整数的核

具有 Euler 乘积形式的 Dirichlet 级数的收敛坐标通常相当容易计算. 用定理 1.13 和定理 1.14, 有时可得到相应的和函数非平凡的信息.

例如考虑整数 n 的核 (即整除 n 的最大的无平方因子数), 记作

$$k(n) := \prod_{p|n} p. \tag{1.22}$$

定理 1.13 即可给出关于分布函数

$$N(x, y) := \left|\{n \leqslant x : k(n) \leqslant y\}\right|$$

的一个信息.

定理 1.15 对每个 $\varepsilon > 0$, 对 $1 \leqslant y \leqslant x$ 一致地有

$$N(x, y) \ll_\varepsilon yx^\varepsilon. \tag{1.23}$$

证明 函数 $k(n)$ 是乘性的. 已知正项级数

$$\sum_p \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{1}{k(p^\nu)p^{\nu\varepsilon}} = \sum_p \frac{1}{p(p^\varepsilon - 1)} \qquad (\varepsilon > 0)$$

收敛. 从定理 1.3 知

$$F(s) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{k(n)n^s}$$

的收敛坐标是 $\sigma_c = 0$. 由定理 1.13, 对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{k(n)} \ll_\varepsilon x^\varepsilon. \tag{1.24}$$

由于

$$N(x, y) \leqslant \sum_{n \leqslant x} \frac{y}{k(n)},$$

(1.23) 中的估计从上述估计立得. □

在习题 165 中将证明下界估计

$$N(x,y) \gg_m y\{\ln(2x/y)\}^m$$

对于任意 $m>0$ 及 $x \geqslant y \geqslant y_0(m)$ 成立 (关于 $N(x,y)$ 最好的结果见注记).

将数论函数的和函数与 Euler 乘积比较的思想是 Rankin 方法 (见第三部分 §5.1) 的基础. 下面说明如何应用这个简单的技巧来改进 (1.23).

定理 1.16　对 $x \geqslant y \geqslant 2$ 一致地有

$$N(x,y) \ll y(\ln y)\mathrm{e}^{\sqrt{8\ln(x/y)}}.$$

证明　若 n 在 $N(x,y)$ 所计数的集合中, 对每个满足 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ 的 ε 有

$$1 \leqslant \left(\frac{x}{n}\right)^{\varepsilon}\left(\frac{y}{k(n)}\right)^{1-\varepsilon}.$$

令 $v := \ln(x/y)$. 不妨设 $v \geqslant 2$, 否则命题显然. 这样

$$\begin{aligned} N(x,y) &\leqslant y\mathrm{e}^{\varepsilon v} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p|n \Rightarrow p \leqslant y}} \frac{1}{n^{\varepsilon}k(n)^{1-\varepsilon}} \leqslant y\mathrm{e}^{\varepsilon v}\prod_{p\leqslant y}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p(p^{\varepsilon}-1)}\right) \\ &\leqslant y\exp\left(\varepsilon v + \frac{K}{\varepsilon} + \sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}\right), \end{aligned}$$

其中 $K := \sum_p 1/(p\ln p) \leqslant 2$. 选择 $\varepsilon = \sqrt{2/v}$ 并用第一部分定理 1.10 估计最后一个对 p 的和式便得题设结论. □

§1.6　竖带域中阶的估计

显然任一 Dirichlet 级数在绝对收敛域中任何闭半平面上有界. 然而当 $\sigma \to \sigma_a$ 且 $|\tau| \to \infty$ 时 $|F(s)|$ 却能取很大的值. 下述定理是一个重要的例子.

定理 1.17　对任意实数 $T>0$, 存在实数 $\tau > T$, 使得

$$\sup_{\sigma>1}|\zeta(\sigma+\mathrm{i}\tau)| \geqslant \frac{1}{10}\ln_2(3+\tau). \tag{1.25}$$

为证该结论, 将运用第一部分 Dirichlet 逼近定理 7.1 的关于同时模 1 逼近 N 个实数的一个变体. 它见于如下引理. 同前, 对 $x \in \mathbb{R}$, 令

$$\|x\| := \min_{n\in\mathbb{Z}}|x-n|.$$

引理 1.18 (Dirichlet)　令 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ 为实数, $D \geqslant 1$ 且为整数. 对任意整数 $Q \geqslant 2$, 存在整数 q, $D \leqslant q \leqslant D\cdot Q^N$, 使得

$$\max_{1\leqslant j\leqslant N}\|q\alpha_j\| \leqslant 1/Q. \tag{1.26}$$

证明 考虑 $[0,1[^N$ 的分解

$$\bigcup_{0\leqslant j_1,\dots,j_N<Q}\prod_{h=1}^{N}\Big[\frac{j_h}{Q},\frac{j_{h+1}}{Q}\Big[$$

它将单位方体 $[0,1[^N$ 分成 Q^N 个小方体. 由抽屉原则, Q^N+1 个点

$$(mD\alpha_1, mD\alpha_2, \dots, mD\alpha_N) \qquad (0\leqslant m\leqslant Q^N)$$

中至少两个模 1 后位于同一个小方体中. 倘若 m 和 m' 是它们的指标, 那么 (1.26) 对于 $q=|m'-m|D\in[D,D\cdot Q^N]$ 成立. □

定理 1.17 的证明 对任意 $\sigma>1$ 及任意整数 $N\geqslant 1$, 有

$$\Re e\,\zeta(s)\geqslant\sum_{n\leqslant N}\frac{\cos(\tau\ln n)}{n^\sigma}-\sum_{n>N}\frac{1}{n^\sigma}. \tag{1.27}$$

对 $Q:=6$, $D:=Q^N$ 及 $\alpha_n:=\dfrac{1}{2\pi}\ln n$ $(1\leqslant n\leqslant N)$ 用引理知存在实数 τ, $6^N\leqslant\tau\leqslant 6^{2N}$, 使得

$$\min_{1\leqslant n\leqslant N}\cos(\tau\ln n)\geqslant\cos(\pi/3)=\frac{1}{2}.$$

于是由 (1.27), 得

$$\Re e\,\zeta(s)\geqslant\frac12\sum_{n\leqslant N}\frac{1}{n^\sigma}-\sum_{n>N}\frac{1}{n^\sigma}=\frac12\zeta(\sigma)-\frac32\sum_{n>N}\frac{1}{n^\sigma}\geqslant\frac{1-3N^{1-\sigma}}{2(\sigma-1)},$$

其中最后一个不等式由积分与级数的比较可得. 对于 $\sigma=1+4/\ln N$, 从该估计知

$$\Re e\,\zeta(s)>\frac19\ln N\geqslant\frac{1}{10}\ln_2(3+\tau)$$

对于 $N\geqslant N_0$ 成立. 当 $N>\ln T/\ln 6$ 时, 额外条件 $\tau>T$ 亦满足, 故命题得证. □

下述定理说明 Dirichlet 级数在其收敛域内必满足一定的上界估计.

定理 1.19 设 $F(s)=\sum_{n\geqslant 1}a_n/n^s$ 是 Dirichlet 级数, 其收敛坐标是 σ_c. 令 $\sigma_0>\sigma_c$, $\varepsilon>0$. 对 $\sigma_0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_c+1$ 一致地有

$$F(s)\ll|\tau|^{1-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon} \qquad (|\tau|\geqslant 1). \tag{1.28}$$

证明 不妨设 $0<\varepsilon<\sigma_0-\sigma_c$. 令

$$A(t):=\sum_{n\leqslant e^t}\frac{a_n}{n^{\sigma_c+\varepsilon}}.$$

当 $t \to \infty$ 时, $A(t) = F(\sigma_c + \varepsilon) + o(1)$. 另外

$$|F(s)| = \left| \sum_{n \leqslant N} \frac{a_n}{n^s} + \int_{\ln N}^{\infty} \mathrm{e}^{-t(s-\sigma_c-\varepsilon)} \, \mathrm{d}A(t) \right|$$

$$\leqslant \sum_{n \leqslant N} \frac{|a_n|}{n^\sigma} + \frac{|A(\ln N)|}{N^{\sigma-\sigma_c-\varepsilon}} + |s - \sigma_c - \varepsilon| \int_{\ln N}^{\infty} |A(t)| \mathrm{e}^{-t(\sigma-\sigma_c-\varepsilon)} \, \mathrm{d}t.$$

由 $|a_n| \ll_\varepsilon n^{\sigma_c+\varepsilon}$ 知

$$|F(s)| \ll_\varepsilon N^{1-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon} + |s| N^{-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon}.$$

选取 $N = 1 + \lfloor |\tau| \rfloor$, 由上述估计便得题设结论. □

一般说来, 判断在某半平面上解析的函数是否可以表示成 Dirichlet 级数是个困难的问题. 定理 1.19 说明了对某 $A > 0$ 满足形如

$$F(s) \ll |\tau|^A \qquad (|\tau| \geqslant 1) \tag{1.29}$$

的估计的函数 F 具有特别的作用. 若 F 在区域 $\mathcal{D}$ 中满足 (1.29), 则称 F 在 $\mathcal{D}$ 上*有有限阶*. Dirichlet 级数在所有包含于其收敛域中的闭半平面上有有限阶. 当它能解析延拓时, 其延拓可在更大的区域上仍有有限阶. 比如考虑级数 $G(s) := \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n / n^s$. 由公式

$$\zeta(s) = G(s)/(2^{1-s} - 1)$$

可将 $\zeta(s)$ 解析延拓到 $\sigma > 0, s \neq 1$ 上. 由定理 1.19, 对 $0 < \sigma \leqslant 1, |s-1| \gg 1$ 有

$$\zeta(s) \ll G(s) \ll \tau^{1-\sigma+\varepsilon}.$$

从而 $\zeta(s)$ 的延拓在 $0 < \sigma \leqslant 1$ 上有有限阶.

若 F 在区域 $\mathcal{D}$ 上有有限阶. 用 $\mu(\sigma) = \mu_F(\sigma)$ 表示使

$$F(s) \ll_{\sigma,\xi} |\tau|^\xi \qquad (s \in \mathcal{D}, |\tau| \geqslant 1)$$

成立的所有实数 ξ 构成的集合的下确界.

定理 1.20 *设函数 $F(s)$ 在竖带域 $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ 上有有限阶, 那么函数 $\mu(\sigma)$ 在该区间上是凸函数. 特别地, 它在 $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ 上连续.*

证明 这是经典的 Phragmén-Lindelöf 定理①, 也就是说估计

$$(\forall \varepsilon > 0) \; F(s) \ll_\varepsilon \mathrm{e}^{\varepsilon|\tau|} \qquad (\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2)$$

① 可见 Titchmarsh (1939) §5.65 或 Valiron (1955) §242.

和

$$F(\sigma_1 + \mathrm{i}\tau) \ll |\tau|^{k_1}, \qquad F(\sigma_2 + \mathrm{i}\tau) \ll |\tau|^{k_2} \quad (|\tau| \geqslant 1)$$

蕴涵

$$F(\sigma + \mathrm{i}\tau) \ll |\tau|^{k(\sigma)} \quad (\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2,\ |\tau| \geqslant 1)$$

的直接推论, 其中 $k(\sigma)$ 是在 σ_1 和 σ_2 上分别取值 k_1 和 k_2 的函数. 此时有

$$\mu(\sigma) \leqslant \frac{(\sigma_2 - \sigma)\mu(\sigma_1) + (\sigma - \sigma_1)\mu(\sigma_2)}{\sigma_2 - \sigma_1} \qquad (\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2). \tag{1.30}$$

□

注　Phragmén-Lindelöf 定理实际上推出, 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$F(s) \ll_{\varepsilon,\sigma_1,\sigma_2} |\tau|^{k(\sigma)+\varepsilon}$$

在区域 $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $|\tau| \geqslant 1$ 上成立. 后面将会用到这种对 σ 的局部一致性.

定理 1.21　*对任意 Dirichlet 级数 $F(s)$, 有*

$$\mu(\sigma) = 0 \qquad (\sigma > \sigma_a). \tag{1.31}$$

另外, 在所有 F 有有限阶的区域内, $\mu(\sigma)$ 关于 σ 单调递减.

证明　若 $\sigma > \sigma_a$, $F(s)$ 有界, 故 $\mu(\sigma) \leqslant 0$. 另外, 若 a_m 是第一个非零的系数, 那么当 σ 足够大时

$$F(s) \geqslant \frac{|a_m|}{m^\sigma} - \sum_{n \geqslant m+1} \frac{|a_n|}{n^\sigma} > 0$$

成立. 由该下界估计与 τ 无关知 $\mu(\sigma) \geqslant 0$, 从而 $\mu(\sigma) = 0$. 对足够大的 σ 和 σ_2 (使得 $\mu(\sigma) = \mu(\sigma_2) = 0$) 应用 (1.30), 可得当 $\sigma_1 > \sigma_a$ 时有 $\mu(\sigma_1) \geqslant 0$, 这推出了 (1.31). 同样, 选取 $\sigma_2 > \sigma_a$ 可从 (1.30) 推出第二个结论: 由于 $\mu(\sigma_2) = 0$, 有

$$\mu(\sigma) \leqslant \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_2 - \sigma_1}\mu(\sigma_1) \leqslant \mu(\sigma_1) \quad (\sigma_1 \leqslant \sigma).$$

当 $\mu(\sigma_1) \neq 0$ 时有严格的不等式 $\mu(\sigma) < \mu(\sigma_1)$. □

推论 1.22　*设 $F(s)$ 是 Dirichlet 级数, 在 $\sigma > \sigma_0$ 上有有限阶, $\sigma_0 < \sigma_a$. 则 $\mu(\sigma_a) = 0$.*

证明　由 (1.31) 及定理 1.20 后一个结论立得. □

注记

§1.1　容易如下推广定理 1.2: *若级数 $F(s)$ 收敛而级数 $G(s)$ 绝对收敛, 那么 $H(s)$ 收敛, 且 $H(s) = F(s)G(s)$.*

事实上, 对固定的 s, 令 $A(x) := \sum_{m\leqslant x} f(m)m^{-s}$. 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $y = y(\varepsilon)$, 使得

$$|A(z) - F(s)| < \varepsilon \qquad (z > y).$$

从而对足够大的 x, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{h(n)}{n^s} &= \sum_{md\leqslant x}\frac{f(m)g(d)}{(md)^s} = \sum_{d\leqslant x}\frac{g(d)}{d^s}A\Big(\frac{x}{d}\Big)\\ &= \sum_{d\leqslant x/y}\frac{g(d)}{d^s}\{F(s)+O(\varepsilon)\} + O\bigg(\sum_{x/y<d\leqslant x}\Big|\frac{g(d)}{d^s}\Big|\bigg).\end{aligned}$$

先令 x 趋于无穷再让 ε 趋于 0 即得前述结论.

利用 Dirichlet 级数在 Cesàro 意义下的和也可证明等式 $H(s) = F(s)G(s)$ *在三个级数 F, G, H 的共同收敛域上成立*, 见 Landau (1909) 第 762, 904 页或 Hardy 和 Riesz (1915) 第 64 页.

一般说来, 由 $F(s)$ 和 $G(s)$ 的收敛性不能推出 $H(s) = \sum_{n\geqslant 1}(f*g)(n)/n^s$ 的收敛性. 习题 155 给出了一个这样的例子. 由定理 1.7, 若 $F(s_0)$ 和 $G(s_0)$ 收敛, 那么对任意 $\varepsilon > 0$, $F(s_0+1+\varepsilon)$ 及 $G(s_0+1+\varepsilon)$ 绝对收敛. 从而 $H(s)$ 对于 $\sigma > \sigma_0 + 1$ 绝对收敛. 这个结论可有相当大的改进, 见 Landau (1909) 第 759 页起, 或 Hardy 和 Riesz (1915) 第 67 页.

定理 1.23 (Stieltjes, 1887) *若 $F(s)$ 和 $G(s)$ 在 $s = s_0$ 处收敛, 那么 $H(s) = F(s)G(s)$ 在 $s = s_0 + \frac{1}{2}$ 处收敛.*

证明 不失一般性, 可设 $s_0 = 0$. 另外, 由 Abel 求和法立知题设条件推出

$$(1.32)\qquad \sum_{n>y} f(n)n^{-1/2} = o(y^{-1/2}), \qquad \sum_{n>y} g(n)n^{-1/2} = o(y^{-1/2}) \quad (y\to\infty).$$

于是有

$$(1.33)\qquad \sum_{n\leqslant x} h(n)n^{-1/2} = \sum_{m\leqslant\sqrt{x}} f(m)m^{-1/2}\sum_{d\leqslant\sqrt{x}} g(d)d^{-1/2} + R_1 + R_2,$$

其中

$$R_1 := \sum_{d\leqslant\sqrt{x}} g(d)d^{-1/2}\sum_{\sqrt{x}<m\leqslant x/d} f(m)m^{-1/2},$$

R_2 类似定义, 只是交换 f 和 g 的位置. 从 (1.32) 得到

$$R_1 = \sum_{d\leqslant\sqrt{x}} g(d)d^{-1/2}\cdot o(x^{-1/4}) \ll \sum_{d\leqslant\sqrt{x}} d^{-1/2}\cdot o(x^{-1/4}) = o(1).$$

类似地, $R_2 = o(1)$. 由假设, 当 $x\to\infty$ 时 (1.33) 右边第一项收敛到 $F\left(\frac{1}{2}\right)G\left(\frac{1}{2}\right)$. 命题于是得证. □

Landau (1909, §216, 定理 24) 细化了 Stieltjes 定理. Delange 和 Tenenbaum (1992) 精确化并推广了该结果.

定理 1.24 (Delange 和 Tenenbaum, 1992) 设 $k \geqslant 2$. 令

$$F_j(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_j(n)/n^s \qquad (1 \leqslant j \leqslant k)$$

为一族 Dirichlet 级数. 假设对每个 j, 级数 $F_j(s)$ 在 $s = \sigma_j + i\tau_j$ 处收敛, 且

$$\max_j \sigma_j - \min_j \sigma_j < \frac{1}{k-1},$$

那么乘积级数 $F(s) := \sum_{n\geqslant 1} a(n)/n^s$, $a = a_1 * \cdots * a_k$ 在直线

$$\sigma = (\sigma_1 + \cdots + \sigma_k)/k + 1 - 1/k$$

上收敛, 且收敛性在该直线中的任意有界线段上一致.

用后文提到的 Bohr 的一个反例, 容易证明结论中的常数 $1 - \frac{1}{k}$ 最优.

Kahane 和 Queffélec (1997) 著作中有对 Dirichlet 级数乘积的收敛性与其各项收敛性关系的详尽论述.

这类定理往往有非平凡的应用. 例如考虑 $F(s) = G(s) = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n/n^s$ 的情形. 将每个整数 n 分解成 $n = 2^\nu m$, $2 \nmid m$ 的形式, 可知

$$h(n) = \begin{cases} \tau(m), & \text{若 } \nu = 0, \\ (\nu - 3)\tau(m), & \text{若 } \nu \geqslant 1. \end{cases}$$

由定理 1.23 立即推出, 当 $\varepsilon > 0$ 时,

$$\sum_{n\leqslant x} h(n) \ll_\varepsilon x^{1/2+\varepsilon}. \tag{1.34}$$

事实上, $h(n)$ 对应的级数在 $\sigma > \frac{1}{2}$ 上收敛. 上述估计由定理 1.13 即得.

通过更深刻的研究可更清楚地理解这个例子. 由等式

$$\sum_{m\leqslant x, 2\nmid m} \tau(m) = T(x) - 2T\Big(\frac{x}{2}\Big) + T\Big(\frac{x}{4}\Big)$$

通过简单的计算可知

$$\sum_{n\leqslant x} h(n) = \Delta(x) - 4\Delta\Big(\frac{x}{2}\Big) + 4\Delta\Big(\frac{x}{4}\Big), \qquad x > 0,$$

其中

$$T(x) := \sum_{n\leqslant x} \tau(n), \quad \Delta(x) := T(x) - x(\ln x + 2\gamma - 1).$$

由 Voronoï 定理 (第一部分定理 6.11), 可在 (1.34) 中将指数 1/2 换成 1/3. 自然地, 可猜想级数 $H(s) = F(s)^2$ 的收敛坐标是 $\sigma_c = 1/4$.

在习题 155 中给出一个 Dirichlet 级数 $F(s)$ 的简单例子, 它在其收敛轴 $\sigma = \sigma_c$ 上处处收敛而 $F(s)^2$ 在同一轴上处处发散. 若用 $\sigma_c(F)$ 和 $\sigma_c(F^2)$ 分别表示 $F(s)$ 和 $F(s)^2$ 的收敛坐标, 那么定理 1.23 说明了

$$\sigma_c(F^2) \leqslant \sigma_c(F) + \tfrac{1}{2}. \tag{1.35}$$

Landau (1909, 第 773 页) 证明了

$$\sigma_c(F^2) > \sigma_c(F) \tag{1.36}$$

可能发生, 这解决了 Cahen (1894) 的一个猜想. 他的证明思想是利用估计式

$$\zeta(s) = \Omega(|\tau|^{\frac{1}{2}-\sigma}) \qquad (0 < \sigma < \tfrac{1}{2}), \tag{1.37}$$

在 §3.4 中将看到, 这由 $\zeta(s)$ 的函数方程立得. 虽然 $\sigma_c(G) = 0$, 但由已见到的等式

$$G(s) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^s} = (2^{1-s} - 1)\zeta(s) \qquad (\sigma > 1)$$

知 (1.37) 对 $G(s)$ 仍成立. 这说明了

$$G(s)^4 = \Omega(|\tau|^{2-4\sigma}) \qquad (0 < \sigma < \tfrac{1}{2}),$$

故由定理 1.19, $\sigma_c(G^4) \geqslant \frac{1}{4}$. 从而 (1.36) 要么对 $F = G$ 成立, 要么对 $F = G^2$ 成立.

实际上, (1.35) 中的等号可以成立. Bohr (1910) 给出了一个 Dirichlet 级数的例子, 使得 $\sigma_c = 0$, $\sigma_a = 1$, 且

$$F(s) = \Omega_\varepsilon(|\tau|^{1-\sigma-\varepsilon}) \qquad (\varepsilon > 0,\ 0 < \sigma < 1). \tag{1.38}$$

由定理 1.19 即得 $\sigma_c(F^2) \geqslant \frac{1}{2}$. 从而由 (1.35), 等号成立.

Bohr 的构造相当精巧但并不复杂. 考虑较快趋于无穷的一个实数列 $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($\tau_k := \exp(2^k)$ 即可), 构造数列 $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使得 $\delta_k \to 0$ 且 $\tau_k^{\delta_k} \to +\infty$. 定义序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$A_n := \sum_{m\leqslant n} a_m = \begin{cases} 0, & \text{若 } \tau_k^{1/2} < n \leqslant \tau_k^{1+\delta_k}, \\ n^{i\tau_k}, & \text{若 } \tau_k^{1+\delta_k} < n \leqslant \tau_k^2, \\ 1, & \text{若 } \tau_k^2 < n \leqslant \tau_{k+1}. \end{cases}$$

这样 $F(s) := \sum_{m\geqslant 1} a_m m^{-s}$ 满足 (1.38). 首先 A_n 在无穷远处无极限 (故 $\sigma_c \geqslant 0$), 其次 Abel 判别法说明了 $F(\sigma)$ 对任意 $\sigma > 0$ 收敛 (故 $\sigma_c \leqslant 0$), 所以 $\sigma_c = 0$.

由定理 1.7, 有 $\sigma_a \leqslant 1$; 且由定理 1.19, $\mu(\sigma) \leqslant 1-\sigma$ 对任意 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ 成立. 下面将看到, 对任意 σ, $0<\sigma<1$, 有

$$F(\sigma+\mathrm{i}\tau_k) \sim (\mathrm{i}/\sigma)\tau_k^{1-\sigma(1+\delta_k)} \qquad (k\to\infty),$$

这推出 (1.38) 并说明了

$$\mu(\sigma)=1-\sigma \qquad (0\leqslant\sigma\leqslant 1). \tag{1.39}$$

令 $s_k=\sigma+\mathrm{i}\tau_k$, 由于当 $\sqrt{\tau_k}<n\leqslant\tau_k^{1+\delta_k}$ 时 $A_n=0$, 有

$$F(s_k)=\sum_{n\geqslant 1}A_n\{n^{-s_k}-(n+1)^{-s_k}\}=\sum_{n\leqslant\sqrt{\tau_k}}+\sum_{n>\tau_k^{1+\delta_k}}(\cdots).$$

前一个和式显然

$$\ll\sum_{n\leqslant\sqrt{\tau_k}}n^{-\sigma}\ll_\sigma\tau_k^{(1-\sigma)/2},$$

后一个等于

$$\begin{aligned}&\sum_{n>\tau_k^{1+\delta_k}}\{s_kA_nn^{-1-s_k}+O(s_k^2n^{-2-s_k})\}\\&=s_k\sum_{\tau_k^{1+\delta_k}<n\leqslant\tau_k^2}n^{-1-\sigma}+O\Bigg(\sum_{n>\tau_k^2}\tau_kn^{-1-\sigma}+\sum_{n>\tau_k^{1+\delta_k}}\tau_k^2n^{-2-\sigma}\Bigg)\\&=s_k\{\sigma^{-1}\tau_k^{-\sigma(1+\delta_k)}+O_\sigma(\tau_k^{-2\sigma})\}+O_\sigma(\tau_k^{1-\delta_k-\sigma(1+\delta_k)})\sim\frac{i}{\sigma}\tau_k^{1-\sigma(1+\delta_k)}.\end{aligned}$$

§1.3 为从历史的角度看清 Phragmén 在所谓 “Landau 定理” 中决定性的贡献, 可参阅 Dress (1983—1984) 详尽的论文, 其中还有关于振荡定理的详介以及文献中进展状况的展望, 还可参考 Kaczorowski 和 Pintz (1986—1987).

可以这样叙述 Phragmén-Landau 定理：*设 f 是非负数论函数. 若在 $\sigma>\sigma_0$ 上良定义的函数 $F(s)=\sum_{n\geqslant 1}f(n)/n^s$ 可解析延拓到包含 $\sigma=\sigma_0$ 的区域, 那么级数在 $\sigma=\sigma_0$ 上收敛.*

Ingham (1935) 证明了, 当 $\sigma_0=1$ 时, 可以将命题中的条件 $f\geqslant 0$ 换成 $|f|\leqslant M$. 从而由 $\sigma=1$ 时 $\zeta(s)\neq 0$ 的事实即可推出素数定理 (见 §3.7). 事实上, $\sum_{n\geqslant 1}\mu(n)/n$ 收敛, 从而由第一部分定理 3.8 便得要求的结论.

Ingham 的证明用到了 Fourier 分析的方法. D.J. Newman (1980) 从他的定理中得到一个大大简化的证明. 它用到一个精巧的复积分方法. Zagier (1997) 又用优雅的方式简化了预备知识部分, 给出 Newman 证明一个极短的变体：见定理 7.31.

本书中定理 1.12 的证明还给出 $\Omega_\pm$ 项中隐含常数的下界估计. 更多的相关内容见 Dress (1983—1984) 或 Grosswald (1972).

§1.5　目前关于 $N(x,y)$ 最好的结果属于 Squalli (1985). 令

$$v := \ln(x/y) \qquad (1 \leqslant y \leqslant x),$$

他证明了, 对每个 $\varepsilon > 0$, 有

$$N(x,y) = yF(v)^{1+O(1/\ln(v+2))} \qquad (\exp\{(\ln x)^{(1/2)+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x)$$

及

$$N(x,y) = yF(v)\{1 + O(\sqrt{\ln_2 x/\ln x})\} \qquad (\exp\{(\ln x)^{(3/4)+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x),$$

其中 $F(v)$ 是如下定义在 $v \geqslant 0$ 上, 在 $\mathbb{R}^+$ 上连续, 且在 $\mathbb{R}^+ \setminus \{\ln m : m \in \mathbb{N}^*\}$ 上可微的函数

$$F(v) := \frac{6}{\pi^2} \sum_{m \geqslant 1} \frac{\min(1, \mathrm{e}^v/m)}{\prod_{p|m}(p+1)}.$$

由 Squalli 的结果可推出

$$N(x,y) \ll yF(v) \ln v \qquad (x \geqslant 2y \geqslant 2).$$

他还证明了存在一列多项式 Q_j $(j \geqslant 1)$, 使得 $\deg Q_j \leqslant j$, 且对每个 $N \geqslant 1$ 有

$$F(v) = \exp\left\{\sqrt{\frac{8v}{\ln v}}\left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_j(\ln_2 v)}{(\ln v)^j} + O_N\left(\left(\frac{\ln_2 v}{\ln v}\right)^{N+1}\right)\right)\right\} \qquad (v \geqslant 3).$$

特别地, $Q_1(t) = 1 + \frac{1}{2}t$.

定理 1.16 的一个应用见第 426 页习题 276.

§1.6　定理 1.19, 即

$$\mu(\sigma) \leqslant 1 - (\sigma - \sigma_c) \qquad (\sigma_c \leqslant \sigma \leqslant \sigma_c + 1)$$

是最优的. 这由前述 Bohr 的例子可得, 见 Hardy 和 Riesz (1915) 第 19 页.

在 §2.2 (定理 2.8) 中将看到定理 1.21 的一个逆命题: 若 $F(s)$ 全纯, 且使得 $\mu(\sigma) = 0$ 对 $\sigma > \sigma_0$ 成立, 那么 $\sigma_c \leqslant \sigma_0$.

这样, 若 $F(s) := 1 + \sum_{n \geqslant 2} f(n)/n^s$ 在 $\sigma > \sigma_0$ 上收敛, 且在该半平面上非零, 并对每个 $\varepsilon > 0$ 满足下界估计 $|F(s)| \gg_\varepsilon (1 + |\tau|)^{-\varepsilon}$, 那么级数 $G(s) = F(s)^{-1}$ 对 $\sigma > \sigma_0$ 收敛. Landau (1933) 的一个定理说明了增长性条件并不必要.

习题

155. 证明 Dirichlet 级数 $F(s)=\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n(\ln 2n)^{-2}n^{-s}$ 在其收敛轴 $\sigma=0$ 上逐点收敛. 令

$$F(s)^2=\sum_{n\geqslant 1}\frac{h(n)}{n^s}=:H(s).$$

证明 $h(n)$ 无界, 推出 $H(s)$ 在直线 $\sigma=0$ 上逐点发散.

156. 令 $A(t):=\sum_{n\leqslant t}(-1)^n n \quad (t\geqslant 0)$.

(a) 证明 $A(N)=(-1)^N\lfloor\frac{1}{2}(N+1)\rfloor$ 对任意整数 $N\geqslant 1$ 成立.

(b) 计算 $G(s):=\int_{1-}^{\infty}t^{-s-1}\,\mathrm{d}A(t)$ 的收敛坐标.

(c) 证明对 $\sigma>0$ 有

$$G(s)=(s+1)\int_1^{\infty}\frac{A(t)}{t^{s+2}}\,\mathrm{d}t. \tag{1.40}$$

(d) 证明级数 $\sum_{n\geqslant 1}A(n)\int_n^{n+1}\mathrm{d}t/t^{1+\varepsilon}$ 对任意 $\varepsilon>0$ 收敛.

(e) 推出 (1.40) 在半平面 $\sigma>-1$ 上定义了 $G(s)$ 的一个全纯延拓.

157. 设 $F(s)=\sum_{n\geqslant 1}a_n/n^s$ 是 Dirichlet 级数, 具有有限收敛坐标 σ_c.

(a) 证明级数 $\varphi(z)=\sum_{n\geqslant 1}a_n\mathrm{e}^{-nz}$ 在 $\Re e\, z\geqslant\varepsilon>0$ 上一致收敛.

(b) 设 $H:=\{s\,:\,\sigma>\max(0,\sigma_c)\}$. 证明对任意 $s\in H$, 存在常数 $C(\sigma)$, 使得 $\varphi(t)\leqslant C(\sigma)t^{-\sigma}\ (t>0)$. 推出积分 $I(s)=\int_0^{\infty}t^{s-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ 的绝对收敛域包含半平面 H.

(c) 证明对任意 $s\in H$ 有 $F(s)\Gamma(s)=I(s)$.

158. 设 $F(s)=\sum_{n\geqslant 1}a_n/n^s$ 为 Dirichlet 级数. 假设存在 $z\in\mathbb{C}$, $\Re e\, z>-1$, 使得

$$A(x):=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}a_n\sim x(\ln x)^z \qquad (x\to\infty).$$

证明当 s 在半平面 $\sigma>1$ 中趋于 1 时

$$F(s)=\Gamma(z+1)/(s-1)^{z+1}+o\big(1/(\sigma-1)^{\Re e\, z+1}\big).$$

159. 保留习题 1.6 的记号, 但假设 $A(x)\ll 1$. 证明 $F(s)$ 在半平面 $\sigma>0$ 全纯且 $F(s)$ 在直线 $\sigma=0$ 上有一个极点, 它必是单极点.

160. 振荡性的三个结论. 本习题中承认下述结论, 它是本书定理 3.3 和定理 3.19 的很弱的推论: 函数 $\zeta(s)$ 在闭半平面 $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$ 上至少有一个零点, 且在带域 $0<\sigma<1$ 中的零点相对于轴 $\sigma=\frac{1}{2}$ 对称分布.

(a) 用级数 $G(s):=\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n/n^s$ 的性质, 证明 $\zeta(s)$ 可亚纯延拓到 $\sigma>0$ 上, 其唯一的奇点是单极点 $s=1$, 且在 $s\in]0,+\infty[$ 上非零.

(b) 通过级数 $\zeta(s)+\zeta'(s)/\zeta(s)$ 证明 $\psi(x)=x+\Omega_{\pm}(x^{1/2})$.

(c) 通过级数 $1/\zeta(s)$ 证明

$$M(x):=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)=\Omega_{\pm}(x^{1/2}).$$

(d) 通过级数 $\zeta(s)/\zeta(2s)$ 证明

$$Q(x):=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)^2=\frac{6}{\pi^2}x+\Omega_{\pm}(x^{1/4}).$$

161. (a) 若 f 是由 $f(p^\nu)=\sqrt{p}$ $(p\in\mathbb{P},\nu\in\mathbb{N}^*)$ 定义的加性函数. 确定和函数 $F(x):=\sum_{n\leqslant x}f(n)$ 的阶.

(b) 同上题, 不改变 $f(p^\nu)$ 的值但假定 f 是乘性函数. 可将 $f(n)$ 与 $\sqrt{n}$ 比较, 或应用第一部分定理 3.10, 或用不等式 $\mu(n)^2\geqslant 1-\sum_{p^2|n}1$.

(c) 确定题 (a) 和 (b) 中 Dirichlet 级数的收敛坐标.

162. (a) 证明对 $s\in]1,\infty[$, $x>0$, $N:=\lfloor x\rfloor$ 有

$$\frac{1}{(s-1)(N+1)^{s-1}}<\sum_{j>x}\frac{1}{j^s}<\frac{1}{(s-1)N^{s-1}},$$

其中当 $N=0$ 时上界估计应理解为 $\zeta(s)<\infty$.

(b) 对任意 $s\in]1,\infty[$, 证明 $1/(s-1)<\zeta(s)<s/(s-1)$.

(c) 证明 $\zeta(s)=2$ 在射线 $]1,\infty[$ 上有唯一解 ϱ, 并证明 $\frac{3}{2}<\varrho<2$.

(d) 对 $k\in\mathbb{N}^*$, $n\in\mathbb{N}^*$, 令 $t_k(n)$ 为方程 $d_1d_2\cdots d_k=n$ 解的个数, 其中未知数 $d_1,\ldots,d_k$ 均为 $\geqslant 2$ 的整数. 令 $T_k(s)=\sum_{n\geqslant1}t_k(n)/n^s$ 为数论函数 t_k 对应的 Dirichlet 级数. 在复平面适当的区域将 $T_1(s)$ 用 $\zeta(s)$ 来表示.

(e) 证明对 $k\geqslant 2$ 有 $t_k=t_{k-1}*t_1$, 导出 $T_k(s)$ 的一个简单表达式, 确定该级数的收敛坐标.

(f) 证明对每个固定的整数 n, 当 k 足够大时 $t_k(n)=0$.

(g) 令 $f(n):=\sum_{k\geqslant1}t_k(n)$. 证明当 $\Re e\, s>\varrho$ 时有

$$F(s):=\sum_{n\geqslant1}\frac{f(n)}{n^s}=\frac{1}{2-\zeta(s)}-1.$$

推出 Dirichlet 级数 $F(s)$ 收敛坐标的值.

(h) 证明 $f*t_1=f-t_1$. 推出若用 $A(x)$ 表示 f 的和函数, 那么对任意 $x\geqslant 1$ 有

$$A(x)=\lfloor x\rfloor-1+\sum_{2\leqslant j\leqslant x}A(x/j).$$

(i) 令 $C := (\varrho-1)2^{\varrho-1}$, 其中 ϱ 是 (c) 中引进的常数. 证明对 $x \geqslant 1$, 有 $A(x) \leqslant Cx^{\varrho}$. 可对使 $2^h \leqslant x < 2^{h+1}$ 的唯一整数 h 用归纳法, 并用 (a) 中证明的下界估计.

163. 令 $P(m,n) = m^2 + n^3 + mn$.

(a) 证明对 $m \geqslant 1, n \geqslant 1$ 有 $m^2 + n^3 \leqslant P(m,n) \leqslant 2(m^2 + n^3)$.

(b) 证明

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+a)^\alpha} = \int_1^\infty \frac{1}{(t+a)^\alpha}\,\mathrm{d}t + O\Big(\frac{1}{a^\alpha}\Big) \asymp \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

对 $a \geqslant 1$ 及 $1 < \alpha \leqslant a$ 一致成立.②

(c) 何为 $\sum_{n\geqslant 1}\sum_{m\geqslant 1} P(n,m)^{-s}$ 的收敛坐标?

(d) 从中可导出

$$A(x) := \big|\{(n,m)\ :\ n,m \geqslant 1,\ P(n,m) \leqslant x\}\big|$$

怎样的估计?

(e) 直接得出 $A(x)$ 阶的估计 (不计常数), 重得 (c) 中的结论.

164. 若 n 的十进制表示中不含数字 6, 就令 $a_n = 1$; 否则令 $a_n = 0$. 证明存在实数 $\delta > 0$, 使得

$$\sum_{n\leqslant x} a_n \asymp x^{1-\delta} \qquad (x \geqslant 1),$$

并确定 δ 的值. 从中可得出关于相应的 Dirichlet 级数收敛坐标怎样的结论?

165. 小核整数个数的下界估计.

(a) 设 $m \in \mathbb{N}^*$. 证明满足不等式

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m} \nu_i \leqslant N$$

的整数组 $\nu_1 \geqslant 0, \nu_2 \geqslant 0, \ldots, \nu_m \geqslant 0$ 的个数等于 $\binom{N+m}{m}$. (可用 $(1-x)^{-m-1}$ 的 Taylor 展式.)

(b) 设 $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ 是相异素数. 证明任意形如

$$n = p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m} r, \qquad \mu(p_1\cdots p_m r)^2 = 1$$

的整数 n 满足 $k(n) \leqslant rp_1\cdots p_m$.

(c) 由 (a) 和 (b) 推出对任意整数 $m \geqslant 1$ 有

$$N(x,y) \gg_m (\ln(2x/y))^m \sum_{r\leqslant y/p_1\cdots p_m} \mu(p_1\cdots p_m r)^2.$$

② 回顾: $f \asymp g$ 表示 $f \ll g \ll f$.

(d) 证明等式 $\mu(n)^2 = \sum_{d^2|n} \mu(d)$ 并推出对 $M \geqslant 1$, $\mu(M)^2 = 1$, $y \geqslant 1$ 一致地有

$$\sum_{r \leqslant y} \mu(Mr)^2 = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p|M} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} y + O(2^{\omega(M)} \sqrt{y}).$$

(e) 证明对 $m \geqslant 1$ 及 $x \geqslant y \geqslant p_1 \cdots p_m$ 有

$$N(x, y) \gg_m y\{\ln(2x/y)\}^m.$$

166. 设 f 是乘性函数. 证明对任意整数 $k \geqslant 1$, $n \mapsto f(kn)$ 对应的 Dirichlet 级数可展成无穷 Euler 乘积. 应用: 对 $\sigma > 1$, 有

(a) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\tau(kn)}{n^s} = \zeta(s)^2 \prod_{p^\nu \| k} (\nu + 1 - \nu p^{-s})$.

(b) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\tau(kn) n^s} = \prod_{p \nmid k} \left\{p^s \log\left(\frac{1}{1 - p^{-s}}\right)\right\} \prod_{p^\nu \| k} \sum_{j \geqslant 0} \frac{1}{(j + \nu + 1) p^{js}}$.

167. 设 $\alpha \in]0, 1[$, $\vartheta \neq 0$ 是固定的实数.

(a) 证明 $A(x) := \sum_{n \leqslant x} \mathrm{e}(\vartheta n^\alpha) \ll x^{1-\alpha}$.

(b) 证明对 $x \geqslant 1$, $0 < \varepsilon < 1$ 一致地有

$$A(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - A(x) = \mathrm{e}(\vartheta x^\alpha) \varepsilon x^{1-\alpha} + O(1 + \varepsilon^2 x^{1-\alpha}).$$

(c) 证明 Dirichlet 级数

$$F(s) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{\mathrm{e}(\vartheta n^\alpha)}{n^s}$$

的收敛坐标是 $\sigma_c = 1 - \alpha$.

168. (a) 设 α, β 是 $]0, 1[$ 中的实数. 证明若存在整数 m, 使得 $0 < \alpha \leqslant |\vartheta - m| \leqslant \beta < 1$, 那么 $\|\vartheta\| \geqslant \min(\alpha, 1 - \beta)$.

(b) 证明若 ϑ 是实数, 且 n, p, q, Q, v 是整数, 使得 $0 < n < Q$, $0 < q < Q$, $(p, q) = 1$, $|\vartheta - p/q| \leqslant 1/(qQ)$, $1 < v \leqslant q/2$, $np \equiv \pm v \pmod q$, 那么 $\|n\vartheta\| \geqslant (v - 1)/q$.

(c) 设 ϑ 是固定的无理数, $\{p_k/q_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为其约化数列. 本题中将对 $x \geqslant 1$ 确定

$$A_\vartheta(x) := \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{\|n\vartheta\|}$$

的区间估计. 以下将视 x 为已知数, 并用关系 $q_t \leqslant x < q_{t+1}$ 来隐含地定义 t.

i) 证明 $1/(2q_t q_{t+1}) < |\vartheta - p_t/q_t| < 1/(q_t q_{t+1})$. 推出 $\|\vartheta q_t\|$ 的区间估计.

ii) 证明 $A_\vartheta(x) > q_{t+1}$.

iii) 证明 $\|n\vartheta\| > 1/(2q_{t+1})$ 对 $[1,x]$ 中的任意整数 n 成立.

iv) 用 (b) 中的不等式证明, 对任意使得 $np_t \equiv \pm v \pmod{q_t}$ 的整数 $v \in \left[2, \frac{1}{2}q_t\right]$ 和 $n \in [1,x]$, 有

$$\|n\vartheta\| \geqslant (v-1)/q_t.$$

v) 证明对所有实数 $\nu \geqslant 1$ 有 $1/\nu \leqslant \int_{\nu-1/2}^{\nu+1/2} \mathrm{d}w/w$, 并推出

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant z} \frac{1}{n} \leqslant \ln(2z+1) \qquad (z>0).$$

vi) 由 i), ii), iii) 推出, 对 $m \in \mathbb{N}$ 有

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ mq_t<n\leqslant(m+1)q_t}} \frac{1}{\|n\vartheta\|} < 6q_{t+1}+2\sum_{1<v\leqslant q_t/2} \frac{q_t}{v-1} \leqslant 6q_{t+1}+2q_t\ln q_t.$$

vii) 证明

$$A_\vartheta(x) < 4x\left\{3\frac{q_{t+1}}{q_t} + \ln q_t\right\} \qquad (x \geqslant 1).$$

(d) 令 $\delta \geqslant 1$. 如下定义整数列 $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. 令 $a_0 = 1$ 并用区间估计 $q_k^{\delta-1} - \frac{1}{2} < a_{k+1} \leqslant q_k^{\delta-1} + \frac{1}{2}$ 来定义 a_{k+1}, 其中 q_k 是连分式 $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ 的分母. 注意到对任意 k 有 $a_k \geqslant 1$.

i) 证明对任意 $k \geqslant 1$ 有 $\frac{1}{2}q_k^\delta \leqslant q_{k+1} \leqslant \frac{5}{2}q_k^\delta$.

ii) 设 $\vartheta := [a_0, a_1, \ldots]$. 由 (c-vii) 得出

$$A_\vartheta(x) < 30x^\delta + 4x\ln x \qquad (x \geqslant 1),$$

并用 (c-ii) 中的结论来证明 $A_\vartheta(x) > \frac{1}{2}x^\delta$ 对无穷多个整值 x 成立.

iii) 确定 Dirichlet 级数

$$F(s) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\|n\vartheta\| n^s}$$

的收敛坐标.

第二章　求和公式

---

§2.1　Perron 公式

上章绝大部分定理旨在假定知道 Dirichlet 级数各项系数或其和函数的渐近行为的前提下确定级数的解析性质. 本章将从相反的方向考虑问题. 在涉及的应用中, 其宗旨实际上是弄清数论函数的性质. Dirichlet 级数与其说是作为固有的研究对象, 不如说是作为一个特别的工具来看待的.

在此框架下, Perron 公式起到了反转原则的关键作用, 正如 Cauchy 公式在幂级数理论中的作用.

设

$$F(s) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n^s} \tag{2.1}$$

是收敛坐标为 σ_c、绝对收敛坐标为 σ_a 的 Dirichlet 级数. 通过令 $a_x = 0$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*)$ 来将函数 $n \mapsto a_n$ 的定义域延拓到 $\mathbb{R}$ 上, 并引进“正规化和函数”:

$$A^*(x) := \sum_{n < x} a_n + \tfrac{1}{2} a_x \qquad (x \geqslant 0). \tag{2.2}$$

定理 2.1 (Perron 公式) *设 $\kappa > \max(0, \sigma_c)$. 有*

$$A^*(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa - \mathrm{i}\infty}^{\kappa + \mathrm{i}\infty} F(s) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} \qquad (x > 0), \tag{2.3}$$

其中当 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ 时积分收敛; 当 $x \in \mathbb{N}$ 时积分按主值收敛.

定理的证明归结于下述引理. 它实效地计算了函数

$$h(x) := \begin{cases} 1, & 若\ x > 1, \\ \frac{1}{2}, & 若\ x = 1, \\ 0, & 若\ 0 < x < 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

的 Laplace 逆变换.

引理 2.2 对正数 κ, T, T', 有

(i) $\left| h(x) - \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\kappa - iT'}^{\kappa + iT} x^s \dfrac{ds}{s} \right| \leqslant \dfrac{x^\kappa}{2\pi |\ln x|} \left(\dfrac{1}{T} + \dfrac{1}{T'} \right), \qquad x \neq 1,$

(ii) $\left| h(1) - \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \dfrac{ds}{s} \right| \leqslant \dfrac{\kappa}{T + \kappa}.$

暂时承认该引理, 看如何得出 (2.3).

先设 $\kappa > \sigma_a$. 这样级数 $F(s)$ 对 $\sigma = \kappa$ 绝对一致收敛. 从而

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - iT'}^{\kappa + iT} F(s) \frac{x^s}{s} \, ds = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geqslant 1} a_n \int_{\kappa - iT'}^{\kappa + iT} \left(\frac{x}{n} \right)^s \frac{ds}{s}.$$

由引理的 (i) 知, 对 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, 有

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - iT'}^{\kappa + iT} F(s) \frac{x^s}{s} \, ds - A^*(x) \right| \leqslant \frac{x^\kappa}{2\pi} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \sum_{n \geqslant 1} \frac{|a_n|}{|n|^\kappa |\ln(x/n)|}. \tag{2.5}$$

由于因子 $|\ln(x/n)|$ 以一个不依赖于 n 的正数为其下界, 分别令 T 和 T' 趋于无穷就得到定理的第一个结论. 第二个结论的证明类似, 但须取 $T = T'$ 且将 (2.5) 右端相应于 $n = x$ 的项 (等于无穷) 换成 $\kappa |a_x| / T + \kappa$.

现在假设 $\sigma_c < \kappa \leqslant \sigma_a$. 由定理 1.7, 有 $\kappa + 1 > \sigma_a$. 考虑积分

$$I := \int_{\mathcal{R}} F(s) \frac{x^s}{s} \, ds,$$

其中 $\mathcal{R}$ 是由直线 $\sigma = \kappa, \tau = T, \sigma = \kappa + 1, \tau = -T'$ 交成的矩形. 由定理 1.19, 有

$$F(s) x^s s^{-1} \ll \tau^{-(\sigma - \sigma_c) + \varepsilon} x^\sigma \qquad (s \in \mathcal{R}, \ |\tau| \geqslant 1).$$

所以当 T 和 T' 趋于无穷时, I 中 $\mathcal{R}$ 的水平线段上积分的贡献趋于 0. 由于 $F(s)$ 在 $\sigma > \sigma_c$ 上解析, 留数定理说明了 $I = 0$. 从而当 $T, T' \to +\infty$ 时, 有

$$\int_{\kappa - iT'}^{\kappa + iT} F(s) x^s \frac{ds}{s} = \int_{\kappa + 1 - iT'}^{\kappa + 1 + iT} F(s) x^s \frac{ds}{s} + o(1).$$

定理 2.1 于是得证.

引理 2.2 的证明 先看 $x>1$ 的情形. 令 k 为足够大的整数, $\mathcal{R}_k$ 是顶点为 $\kappa-\mathrm{i}T'$, $\kappa+\mathrm{i}T$, $\kappa-k+\mathrm{i}T$, $\kappa-k-\mathrm{i}T$ 的矩形. 由留数定理,

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{R}_k} x^s\frac{\mathrm{d}s}{s}=1=h(x).$$

而如下上界估计成立:

$$\left|\int_{\kappa+\mathrm{i}T}^{\kappa-k+\mathrm{i}T} x^s\frac{\mathrm{d}s}{s}\right|\leqslant\frac{x^\kappa}{T|\ln x|},\qquad \left|\int_{\kappa-k-\mathrm{i}T'}^{\kappa-\mathrm{i}T'} x^s\frac{\mathrm{d}s}{s}\right|\leqslant\frac{x^\kappa}{T'|\ln x|},$$

$$\left|\int_{\kappa-k+\mathrm{i}T}^{\kappa-k-\mathrm{i}T'} x^s\frac{\mathrm{d}s}{s}\right|\leqslant\frac{x^{\kappa-k}}{k-\kappa}(T+T').$$

令 k 趋于无穷就得到要证的结论.

$0<x<1$ 的情形与前者对称. 将 k 换成 $-k$, 用相同的推理可得, 细节略去.

当 $x=1$ 时, 只须注意到有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\kappa-\mathrm{i}T}^{\kappa+\mathrm{i}T}\frac{\mathrm{d}s}{s}=\frac{1}{2\pi}\big(\arg(\kappa+\mathrm{i}T)-\arg(\kappa-\mathrm{i}T)\big)=\frac{1}{\pi}\arctan(T/\kappa).$$

要证的上界估计由下述对所有 $y>0$ 成立的区间估计可得:

$$0\leqslant\frac{\pi}{2}-\arctan(y)=\int_y^\infty\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\leqslant\frac{2}{1+y}.$$

引理于是得证. □

实际应用中常需要 Perron 公式的实效形式, 也就是说积分 (2.3) 中 $|\tau|\geqslant T$ 部分具体的上界估计.

定理 2.3 (第一实效 Perron 公式) 对 $\kappa>\max(0,\sigma_a)$, $T\geqslant1$ 及 $x\geqslant1$, 有

$$A(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\kappa-\mathrm{i}T}^{\kappa+\mathrm{i}T}F(s)x^s\frac{\mathrm{d}s}{s}+O\left(x^\kappa\sum_{n\geqslant1}\frac{|a_n|}{n^\kappa(1+T|\ln(x/n)|)}\right).\tag{2.6}$$

证明 只须验证, 对固定的 $\kappa>0$, 对于 $y>0$, $T>0$ 一致地有

$$\left|h(y)-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\kappa-\mathrm{i}T}^{\kappa+\mathrm{i}T}y^s\frac{\mathrm{d}s}{s}\right|\ll y^\kappa/(1+T|\ln y|).\tag{2.7}$$

事实上, 对 $y=x/n$ 用该估计, 乘上 a_n 后对 $n\geqslant1$ 求和便得要求的公式.

当 $T|\ln y|>1$ 时上界估计 (2.7) 由引理 2.2 (i) 可得. 在相反的情形, 有

$$\int_{\kappa-\mathrm{i}T}^{\kappa+\mathrm{i}T}y^s\frac{\mathrm{d}s}{s}=y^\kappa\int_{\kappa-\mathrm{i}T}^{\kappa+\mathrm{i}T}\frac{\mathrm{d}s}{s}+y^\kappa\int_{\kappa-\mathrm{i}T}^{\kappa+\mathrm{i}T}(y^{\mathrm{i}\tau}-1)\frac{\mathrm{d}s}{s},$$

第二个积分

$$\ll \int_0^T |(\tau \ln y)/s| \, \mathrm{d}\tau \leqslant T|\ln y| \leqslant 1.$$

从而由引理 2.2 (ii) 知 (2.7) 左边 $\ll y^\kappa$. 命题得证. □

推论 2.4 (第二实效 Perron 公式) 设 $F(s) := \sum_{n \geqslant 1} a_n/n^s$ 是 Dirichlet 级数, 具有限绝对收敛坐标 σ_a. 假设存在实数 $\alpha \geqslant 0$, 使得

(i) $\sum_{n \geqslant 1} |a_n| n^{-\sigma} \ll (\sigma - \sigma_a)^{-\alpha} \qquad (\sigma_a < \sigma \leqslant \sigma_a + 1)$;

令 B 为单调上升函数, 使得

(ii) $|a_n| \leqslant B(n) \qquad (n \geqslant 1)$.

那么对 $x \geqslant 2, T \geqslant 2, \sigma \leqslant \sigma_a, \kappa := \sigma_a - \sigma + 1/\ln x$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n^s} = &\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa - \mathrm{i}T}^{\kappa + \mathrm{i}T} F(s+w) x^w \frac{\mathrm{d}w}{w} \\ &+ O\left(x^{\sigma_a - \sigma} \frac{(\ln x)^\alpha}{T} + \frac{B(2x)}{x^\sigma}\left(1 + x\frac{\ln T}{T}\right)\right).\end{aligned} \tag{2.8}$$

证明 对级数 $\sum b_n/n^w$ 用 (2.6), 其中 $b_n := a_n/n^s$. 不在 $\left[\frac{1}{2}x, 2x\right]$ 中的那些整数对应的贡献

$$\ll x^\kappa T^{-1} \sum_{n \geqslant 1} |a_n| n^{-\kappa - \sigma} \ll x^{\sigma_a - \sigma} T^{-1} (\ln x)^\alpha.$$

当 $\frac{1}{2}x \leqslant n \leqslant 2x$ 时, 将 n 写成 $N + h$, 其中 N 是离 x 最近的整数. 这样 $|\ln(x/n)| \gg |h|/x$. 提供的额外贡献为

$$\begin{aligned} x^{-\sigma} \sum_{x/2 \leqslant n \leqslant 2x} \frac{|a_n|}{1 + T|\ln(x/n)|} &\ll \frac{B(2x)}{x^\sigma} \sum_{0 \leqslant h \leqslant x+1} \frac{1}{1 + Th/x} \\ \ll \frac{B(2x)}{x^\sigma}\left\{1 + \sum_{1 \leqslant h \leqslant x/T} 1 + \sum_{x/T < h \leqslant x+1} \frac{x}{Th}\right\} &\ll \frac{B(2x)}{x^\sigma}\left\{1 + x\frac{\ln T}{T}\right\}. \end{aligned}$$ □

在某些情形下要用到绝对收敛的 Perron 积分. 这时需要适当光滑化函数 $A(x)$. 以下定理中将给出两个例子.

定理 2.5 对 $\kappa > \max(0, \sigma_c)$ 及 $x \geqslant 1$ 有

$$\sum_{n \leqslant x} a_n \ln(x/n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa - \mathrm{i}\infty}^{\kappa + \mathrm{i}\infty} F(s) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s^2}, \tag{2.9}$$

$$\int_0^x A(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa - \mathrm{i}\infty}^{\kappa + \mathrm{i}\infty} F(s) x^{s+1} \frac{\mathrm{d}s}{s(s+1)}. \tag{2.10}$$

证明 对于 $w \geqslant 0$ 及 $x \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$, Perron 公式 (2.3) 推出当 $\kappa > \max(0, \sigma_c)$ 时

$$\sum_{n \leqslant x} a_n n^w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} F(s) x^{s+w} \frac{ds}{s+w},$$

从而

$$\sum_{n \leqslant x} a_n (x^w - n^w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} F(s) x^{s+w} \frac{w}{s(s+w)} ds. \tag{2.11}$$

显然当 x 是整数时上式仍成立. 由定理 1.19, 当 $\sigma = \kappa$ 时,

$$F(s) \ll 1 + |\tau|^{1-(\kappa - \sigma_c)+\varepsilon} \tag{2.12}$$

从而积分绝对一致收敛, 其对 w 的偏导数亦然. 从而满足积分号下求导定理的条件. (2.11) 两边取 $w = 0$ 点处的导数便得到 (2.9). 当 $w = 1$ 时 (2.11) 的左边即是

$$\int_0^x A(t)\, dt,$$

故此时该等式恰为 (2.10). □

有时通过改变被积函数有利于将 (2.7) 式换成更精确的式子, 比如下述结论.

引理 2.6 对 $\delta > 0$, 存在复常数 $a = a(\delta)$ 及 $b = b(\delta)$, 使得当

$$w_\delta(s) := \frac{1}{s} + \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2} \quad (s \in \mathbb{C}), \qquad g_\delta(y) := h(y)\{1 + a/y + b/y^2\} \quad (y > 0)$$

时, 对 $y > 0$, $\kappa > 0$ 一致地有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - i\delta}^{\kappa + i\delta} w_\delta(s) y^s\, ds = g_\delta(y) + O\Big(\frac{y^\kappa}{1 + (\ln y)^2} + \kappa y^\kappa\Big). \tag{2.13}$$

证明 注意到由 (2.7) 推出当 $|\ln y| \leqslant 1$ 时

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - i\delta}^{\kappa + i\delta} w_\delta(s) y^s\, ds = g(y) + O(y^\kappa).$$

接下来, 当 $|\ln y| > 1$ 时, 由分部积分得

$$\begin{aligned} \int_{\kappa - i\delta}^{\kappa + i\delta} w_\delta(s) y^s\, ds = &- \int_{\kappa - i\delta}^{\kappa + i\delta} w_\delta'(s) \frac{y^s}{\ln y}\, ds \\ &+ O\Big(\frac{y^\kappa}{|\ln y|} \{|w_\delta(\kappa + i\delta)| + |w_\delta(\kappa - i\delta)|\}\Big). \end{aligned} \tag{2.14}$$

选择 a 和 b, 使得 $w_\delta(\pm i\delta)=0$. 由微分中值定理知 (2.14) 的余项是 $O(\kappa y^\kappa/|\ln y|)$. 而由留数定理, 将积分线段根据 $y>\mathrm{e}$ 或 $y<\mathrm{e}$ 分别向左或向右推向无穷知对于 $|\ln y|>1$ 总有

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-i\delta}^{\kappa+i\delta} w_\delta'(s)\frac{y^s}{\ln y}\,\mathrm{d}s=g(y)+O\Big(\frac{y^\kappa}{(\ln y)^2}\Big).\qquad\square$$

由该引理可得出 Perron 公式的一个新变体.

定理 2.7 设 $F(s):=\sum_{n\geqslant 1}a_n/n^s$ 是在 $\sigma>1$ 上收敛的 Dirichlet 级数, 且其系数满足估计

$$\sum_{n\leqslant x}|a_n|\leqslant xb(x)\qquad(x\geqslant 2),\tag{2.15}$$

其中 b 是单调递减函数. 那么对 $\kappa=\kappa_x:=1/\ln x$ 有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_x-i\delta}^{\kappa_x+i\delta}F(s+1)w_\delta(s)x^s\,\mathrm{d}s+O(b^*(x))\qquad(x\geqslant 2),\tag{2.16}$$

其中

$$b^*(x):=\kappa_x\int_1^\infty\frac{b(t)}{t^{1+\kappa_x}}\,\mathrm{d}t.$$

证明 易知

$$b(x)\leqslant b(\sqrt{x})\leqslant 2\kappa_x\int_1^{\sqrt{x}}\frac{b(t)}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant 2\sqrt{\mathrm{e}}b^*(x).\tag{2.17}$$

由引理 2.6 知 (2.16) 的余项 $\ll\sum_{1\leqslant j\leqslant 4}|R_j|$, 其中

$$R_j:=x^{-j}\sum_{n\leqslant x}a_n n^{j-1}\qquad(j=1,2),$$

$$R_3:=\sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{n^{1+\kappa}\{1+(\ln x/n)^2\}},$$

$$R_4:=\frac{1}{\ln x}\sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{n^{1+\kappa}}.$$

显然 $R_2\ll R_1\ll b(x)$, 且由 Abel 求和法知 $R_4\ll b^*(x)$. 为估计 R_3, 可先由 (2.17) 得知, 对 $x\geqslant 2$ 及 $k\in\mathbb{Z}$, $1/x\leqslant 2^k\leqslant\sqrt{x}$ 一致地有

$$\sum_{x/2^{k+1}<n\leqslant x/2^k}\frac{|a_n|}{n\{1+(\ln x/n)^2\}}\ll\frac{b^*(x)}{1+k^2}.\tag{2.18}$$

然后分别讨论 R_3 中在区域 $n\notin[\sqrt{x},x^2]$ 及 $\sqrt{x}\leqslant n\leqslant x^2$ 上求和的贡献. 对前者用估计 $R_4\ll b^*(x)$ 并对后者用 (2.18) 便得 $R_3\ll b^*(x)$. $\square$

§2.2 应用: 两个收敛定理

Perron 公式可用来证明以下结论, 它是 Schnee-Landau 重要定理的一个特例, 见 Landau (1909, §238) 及注记.

定理 2.8 设 $F(s) := \sum_{n\geqslant 1} a_n/n^s$ 是收敛坐标有限的 Dirichlet 级数. 若 σ_0 是实数, 使得 $F(s)$ 在 $\sigma > \sigma_0$ 上可延拓成满足 $\mu(\sigma) = 0$ 的解析函数, 那么

$$\sigma_c \leqslant \sigma_0.$$

证明 不失一般性, 可任意确定 σ_0 的值. 假设 $\sigma_0 < 0$ 且 $F(s)$ 在 $s = 0$ 处收敛.

设 δ 是实数, 满足 $0 < \delta < -\sigma_0$. 对固定的 $\kappa > \sigma_a + 1$ 及 $x \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$ 用定理 2.3 知, 对每个整数 n 有 $|\ln(x/n)| \geqslant \ln((n + \frac{1}{2})/n) \gg 1/n$. 从而 (2.6) 的余项

$$\ll x^\kappa \sum_{n\geqslant 1} \frac{|a_n|}{n^\kappa(1 + T/n)} \ll \frac{x^\kappa}{T} \sum_{n\geqslant 1} |a_n| n^{1-\kappa} \leqslant \frac{x^\kappa}{T}.$$

然后将积分路径 $[\kappa - \mathrm{i}T, \kappa + \mathrm{i}T]$ 形变为经过点 $-\delta - \mathrm{i}T$, $-\delta + \mathrm{i}T$ 的折线, 这样积分值的变化就是其在极点 $s = 0$ 处的留数, 即 $F(0)$. 从而有

$$\sum_{n\leqslant x} a_n = F(0) + R_1 + R_2 + O(x^\kappa/T), \tag{2.19}$$

其中 R_1 和 R_2 分别表示积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int F(s) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s}$$

在新路径的水平部分和竖直部分的贡献. 由 $\sigma \geqslant -\delta$ 上 $\mu(\sigma) = 0$ 的假设即知对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$R_1 \ll_\varepsilon x^\kappa T^{\varepsilon - 1}, \qquad R_2 \ll_\varepsilon x^{-\delta} T^\varepsilon.$$

(注意到此处用到了上界估计 $F(s) \ll T^\varepsilon$ ($|\tau| \leqslant T$) 对 $-\delta \leqslant \sigma \leqslant \kappa$ 一致成立的事实, 见定理 1.20 证明的注): 代入 (2.19) 并选取 $T := x^{\kappa+\delta}$, $\varepsilon := \delta/2(\kappa + \delta)$ 可在 "显式" 意义下得到级数 $\sum a_n$ 的收敛性:

$$\sum_{n\leqslant x} a_n = F(0) + O(x^{-\delta/2}).$$

命题于是得证. □

类似地, 可用定理 2.7 来证明下述 Riesz (1909) 的定理.

定理 2.9 设 $F(s) := \sum_{n\geqslant 1} a_n/n^s$ 是 Dirichlet 级数, 在 $\sigma > 1$ 上收敛, 在 $s = 1$ 的某邻域上有解析延拓, 并使得

$$A(x) := \sum_{n\leqslant x} a_n = o(x), \tag{2.20}$$

那么 $F(s)$ 在 $s = 1$ 处收敛.

证明 先观察到若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 那么由 (2.16) 有

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa-\mathrm{i}\delta}^{\kappa+\mathrm{i}\delta} F(s+1) w_\delta(s) x^s \,\mathrm{d}s + o(1).$$

选取足够小的 δ, 使顶点为 $\pm\delta \pm \mathrm{i}\delta$ 的正方形包含在 $F(1+s)$ 的全纯区域内. 并在 x 足够大时将积分路径的坐标移到 $-\delta$ 上. 由留数定理便得要求的结论. 事实上, 水平部分的积分 $\ll 1/\ln x$, 而平移后竖直部分的积分 $\ll 1/x^\delta$.

为处理一般情形, 引进级数 $G(x) := \sum_{n\geqslant 1} A_n/n^{s+1}$, 其中 $A_n := A(n)$. 由 Abel 求和法, 对 $N \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{C}$ 有

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{a_n}{n^s} - s \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{A_n}{n^{s+1}} = \sum_{1\leqslant n\leqslant N} A_n \varphi_n(s) + \frac{A_N}{(N+1)^s}, \tag{2.21}$$

其中 $\varphi_n(s) := n^{-s} - (n+1)^{-s} - sn^{-s-1}$. 另外, 由微分中值定理, 有

$$|\varphi_n(s)| \leqslant |s(s+1)| n^{-\sigma-2} \qquad (\sigma > 0).$$

这说明 $F(s) - sG(s)$ 在半平面 $\sigma > 0$ 上可解析延拓, 从而 $G(s)$ 可在 $s = 1$ 的邻域内全纯延拓. 对 G 应用前述已证的结论, 得级数 $\sum_{n\geqslant 1} A_n/n^2$ 收敛, 其和为 $G(1)$. 用 (2.21) 中 $s = 1$ 的情形及 (2.20) 得级数 $\sum_{n\geqslant 1} a_n/n$ 收敛, 其和为 $F(1)$. □

§2.3 均值定理

对 Dirichlet 级数来说, 下述结论与关于三角级数的 Parseval 定理类似.

定理 2.10 设 $F(s) := \sum_{n\geqslant 1} a_n/n^s$ 和 $G(s) := \sum_{n\geqslant 1} b_n/n^s$ 是两个 Dirichlet 级数, 其绝对收敛坐标分别是 σ_1 和 σ_2, 那么对于 $\alpha > \sigma_1$ 及 $\beta > \sigma_2$ 有

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} F(\alpha + \mathrm{i}\tau) G(\beta - \mathrm{i}\tau) \,\mathrm{d}\tau = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n b_n}{n^{\alpha+\beta}}. \tag{2.22}$$

证明 有

$$F(\alpha + \mathrm{i}\tau) G(\beta - \mathrm{i}\tau) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n b_n}{n^{\alpha+\beta}} + \sum_{m\neq n} \frac{a_m b_n}{m^\alpha n^\beta} (n/m)^{\mathrm{i}\tau}.$$

级数对 τ 绝对一致收敛, 故可逐项积分, 得

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} F(\alpha+\mathrm{i}\tau)G(\beta-\mathrm{i}\tau) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n b_n}{n^{\alpha+\beta}} + \sum_{m\neq n}\frac{a_m b_n}{m^\alpha n^\beta}\Big(\frac{\sin(T\ln(n/m))}{T\ln(n/m)}\Big).$$

含 T 的因子对 T, m, n 一致有界, 且当 $T\to\infty$ 时趋于 0. 故由控制收敛定理即得题设结论. □

推论 2.11 对 $\sigma > \sigma_a$ 有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|F(s)|^2\,\mathrm{d}\tau = \sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}. \tag{2.23}$$

推论 2.12 对 $\sigma > \sigma_a$ 有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}F(s)n^s\,\mathrm{d}\tau = a_n. \tag{2.24}$$

(2.23) 及 (2.24) 给出了函数 Dirichlet 级数表示唯一性 (定理 1.8) 的两个新证.

关于使关系 (2.23) 成立的区域的问题通常十分困难. 可以证明 (见 Titchmarsh (1939) §9.5) 使 $F(s)$ 全纯、有有限阶且满足 (2.23) 的那些 s 组成的集合是由某直线 $\sigma=\sigma_m$ 划定的半平面, 其中

$$\sigma_m \geqslant \max\left(\sigma_c, \sigma_a - \tfrac{1}{2}\right).$$

然而即使对于在 $\sigma\geqslant\sigma_0$ 上并不全纯的函数 $F(s)$, (2.23) 左边的项也有可能在 $\sigma=\sigma_0$ 上收敛. Titchmarsh (1957, §7.2) 证明了对于 ζ-函数的情形有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{1}^{T}|\zeta(s)|^2\,\mathrm{d}\tau = \zeta(2\sigma) \qquad \left(\sigma > \tfrac{1}{2}\right), \tag{2.25}$$

从而 (2.23) 对于 $F=\zeta$ 在 $\sigma>\frac{1}{2}, \sigma\neq 1$ 上成立.

注记

§2.1 引理 2.6 的思想可回溯到 Landau (1910). 用这样的方式, 他证明了定理 2.9. 它还可细化 Perron 公式在积分区域为短竖直线段的情形下的应用. Tenenbaum 和吴杰 (2003) 某一引理的一个变体可如下叙述:

引理 2.13 *对任意固定的实数 $T>0$, 存在实常数 b_j $(1\leqslant j\leqslant 5)$, 使得当*

$$w_T(s) := \frac{1}{s} + \sum_{1\leqslant j\leqslant 5}\frac{b_j}{5+j}, \quad g_T(x) = h(x)\Big\{1+\sum_{1\leqslant j\leqslant 5}\frac{b_j}{x^j}\Big\} \qquad (x>0)$$

时, 一方面有

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant 5} b_j/j=0; \tag{2.26}$$

另一方面, 对 $x>0$, $\kappa>0$ 一致地有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\kappa-\mathrm{i}T}^{\kappa+\mathrm{i}T} w_T(s)x^s\,\mathrm{d}s=g_T(x)+O\Big(\frac{x^\kappa}{1+(\ln x)^2}+\frac{\kappa^2x^\kappa}{1+|\ln x|}\Big). \tag{2.27}$$

§2.2 Schnee-Landau 定理可如下陈述: 若 $a_n\ll_\varepsilon n^\varepsilon$ 对任意 $\varepsilon>0$ 成立[①], 且 $F(s)=\sum_{n\geqslant 1}a_n/n^s$ 对某 σ_0 在 $\sigma>\sigma_0$ 上可全纯延拓, 并在该半平面满足 $\mu(\sigma)\leqslant\alpha$, 那么

$$\sigma_c\leqslant\min\Big(\frac{\sigma_0+\alpha}{1+\alpha},\sigma_0+\alpha\Big).$$

证明见 Landau (1909) 第 853 页起.

当 $\alpha=0$ 时, Schnee-Landau 定理推出 $\sum_{n\geqslant 1}a_nn^{-s-\kappa}$ 在 $\kappa>\sigma_a$, $\sigma>\sigma_0-\kappa$ 上收敛. 条件 $a_n\ll_\varepsilon n^\varepsilon$ 并不必需, 从而得到定理 2.8.

定理 2.8 见于 Landau (1909) 第 848 页. 另一证明见 Hardy 和 Riesz (1915) 定理 50. 又见 Titchmarsh (1951) 定理 3.13.

§2.3 Carlson (1922) 证明了, 若 $F(s)$ 全纯, 并在 $\sigma\geqslant\sigma_1$ 上有有限阶, 且 $\int_{-T}^{T}|F(s)|^2\,\mathrm{d}\tau\ll T$ 对 $\sigma=\sigma_1$ 成立, 那么 (2.23) 对 $\sigma>\sigma_1$ 成立. 例如可见 Titchmarsh (1939), §9.51.

习题

169. 证明对 $\kappa>\max(0,\sigma_c)$, 有

$$\sum_{n\leqslant x}a_n\Big(\ln\frac{x}{n}\Big)^k=\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\kappa-\mathrm{i}\infty}^{\kappa+\mathrm{i}\infty}F(s)x^s\frac{\mathrm{d}s}{s^{k+1}},$$

其中 $k\geqslant 1$ 是任意整数.

170. 设 $w\in L^1(\mathbb{R})$ 使得其 Fourier 变换 $\widehat{w}(\tau):=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\tau}w(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $\mathbb{R}$ 上仍可积. 证明对 $\kappa>\sigma_a$ 有

$$\sum_{n\geqslant 1}a_n\Big(\frac{x}{n}\Big)^\kappa w\Big(\ln\frac{x}{n}\Big)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\kappa-\mathrm{i}\infty}^{\kappa+\mathrm{i}\infty}F(s)x^s\widehat{w}(\tau)\,\mathrm{d}s.$$

---

① 从而 $\sigma_a\leqslant 1$.

171. 应用习题 170 的结论于 $w(t) := \{\sin(t/2\varepsilon)\}^2 \Big/ \{t/2\varepsilon\}^2$. 证明若 $a_n \geqslant 0$, 则对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\sum_{|\ln(x/n)|\leqslant\varepsilon} a_n \leqslant C\varepsilon \mathrm{e}^{\kappa\varepsilon} \int_{\kappa-\mathrm{i}T}^{\kappa+\mathrm{i}T} |F(s)x^s|\,|\mathrm{d}s| \qquad (\kappa > \sigma_a),$$

其中 $C = 1/\{2\sin\frac{1}{2}\}^2$, $T = 1/\varepsilon$.

172. 设 $F(s) = \sum_{n\geqslant1} a_n/n^s$ 是 Dirichlet 级数, 使得极限 $\lim\limits_{\tau\to\infty} F(\sigma + \mathrm{i}\tau)$ 对于至少一个 $\sigma > \sigma_a$ 值存在. 用 λ 表示该极限.

(a) 证明 $|\lambda|^2 = \sum_{n\geqslant1} |a_n|^2/n^{2\sigma}$.

(b) 证明 $\lambda = a_1$. [可用推论 2.12]

(c) 推出 $F(s)$ 是常值函数.

173. 设 $F(s) := \sum a_n/n^s$ 是 Dirichlet 级数, 在 $\sigma = \Re e\, s > 1$ 上收敛. 假设 F 可延拓为 $s = 1$ 某邻域上的解析函数 $\widetilde{F}$.

(a) 是否一定有 $\widetilde{F}(1) = \lim\limits_{\sigma\to1+} F(\sigma)$?

(b) 附加假设 $\sum_{m\leqslant n} a_m = o(n)$ $(n \to \infty)$. 证明级数 $\sum_{n\geqslant1} a_n/n$ 收敛到 $\widetilde{F}(1)$.

(c) 设 $\sigma \in]1, \infty[$ 及 $N \in \mathbb{N}^*$.

  i) 用 0 阶 Euler-Maclaurin 公式计算 $\sum_{1\leqslant n\leqslant N} 1/n^\sigma$.

  ii) 推出 $\sigma > 1$ 时 $\zeta(\sigma) = \sum_{n\geqslant1} 1/n^\sigma$ 的一个表达式, 以及 $\sum_{1\leqslant n\leqslant N} 1/n$ 的表达式. 在后者中应出现 Euler 常数 γ.

(d) 证明 $\zeta(s)$ 可亚纯延拓到 $s = 1$ 的邻域, 并给出其在 $s = 1$ 处的一阶 Laurent 展式. 对 $\zeta'(s)$ 重复该过程.

(e) 从 Tchébychev 形式下的素数定理 $\psi(x) \sim x$ $(x \to \infty)$ 及 (b) 中的结论推出如下数值的存在性:

$$K := \lim_{x\to\infty} \left\{ \sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \ln x \right\},$$

其中 Λ 是 Mangoldt 函数. 可考虑 Dirichlet 级数 $\zeta(s) + \zeta'(s)/\zeta(s)$.

第三章 Riemann ζ-函数

§3.1 简介

ζ-函数可用来表示许多 Dirichlet 级数. 特别地, Euler 公式 (见 §1.2) 体现了它与素数之间的关系, 使其在数论中具有中心地位. 考虑到第二章中证明的 Perron 公式, ζ-函数解析性质的研究于是具有关键价值.

正如 §2.2 中所见, 一般说来, 形如

$$\int_{-T}^{T} F(s)x^s s^{-1}\,\mathrm{d}\tau$$

积分的估计可用引进积分围道结合留数定理的方法大大简化. 由于 $F(s)$ 在半平面 $\sigma > \sigma_c$ 上无奇点 (见定理 1.5), 所以自然在可以选取突入左半平面 $\sigma \leqslant \sigma_c$ 的围道时倾向于使用该方法. 这就要求函数 $F(s)$ 可以解析延拓. 下面将看到 $\zeta(s)$ 恰满足这一条件, 从而所有可由之表示的级数亦然.

在此背景下, $\zeta(s)$ (等同于其解析延拓) 解析性质的研究对数论学家来说是不可或缺的. 本章中将介绍该理论的基本结论. 对其更完备或更复杂的进展感兴趣的读者可参阅 Titchmarsh (1951) (由 Heath-Brown (1986) 所补充)、Edwards (着重于经典方法) 或 Ivić (1985) (包含该主题的大量结果) 等人的经典著作.

§3.2 解析延拓

定理 3.1 函数 $\zeta(s)$ 可解析延拓为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数. 它唯一的奇点是 $s = 1$ 处的单极点, 其留数为 1.

证明　对 $\sigma>1$, 有

$$G(s):=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^s}=\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{(2m)^s}-\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}-\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{(2m)^s}\right)=(2^{1-s}-1)\zeta(s).$$

而 $G(s)$ 在 $\sigma>0$ 上收敛, 并有

$$G(1)=-\ln 2\neq 0,\qquad G(s_k)=0\quad (s_k:=1+2\pi ik/\ln 2,\ k\neq 0).$$

第二个等式由估计

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{(-1)^n}{n^{s_k}}=2^{1-s_k}\sum_{n\leqslant x/2}\frac{1}{n^{s_k}}-\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^{s_k}}=-\sum_{x/2<n\leqslant x}\frac{1}{n^{s_k}}\ll\frac{1}{x}$$

可得, 其中用了 Abel 求和法. 从而在半平面 $\sigma>0$ 上便得到欲证的结论. 同样的结论用分部积分

$$\zeta(s)=\int_{1-}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\lfloor t\rfloor}{t^s}=\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}-\int_{1-}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\langle t\rangle}{t^s}=\frac{s}{s-1}-s\int_1^{\infty}\langle t\rangle\frac{\mathrm{d}t}{t^{s+1}}.$$

亦可得. 该等式原本对 $\sigma>1$ 成立, 它具体地给出了 $\zeta(s)$ 在 $\sigma>0$ 上延拓的另一形式.

用前述两个公式的任一者不断用分部积分便可证明题设命题. 例如对后者可用 Euler-Maclaurin 公式, 见习题 183. 我们采取另一种方法, 由 Riemann 提出. 它提供了有用的附加信息, 可用来证明 ζ-函数的函数方程.

从公式

$$\Gamma(s)n^{-s}=\int_0^{\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t\qquad(\sigma>0)\tag{3.1}$$

出发, 对 $n\geqslant 1$ 求和得, 对 $\sigma>1$, 有

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t.$$

将积分射线换成 Hankel 围道 $\mathcal{C}_\varrho$ (如图 II–2) 便得到该积分的解析延拓, 其中 ϱ 是实参数, $0<\varrho<2\pi$.

$\mathcal{C}_\varrho$ 由从右向左的幅角为 0+ 的实半轴 $[\varrho,+\infty[$, 逆时针方向并去掉点 $z=\varrho$ 的圆, 以及从左向右幅角为 2π 的半轴 $[\varrho,+\infty[$ 组成.

由于函数 $z\mapsto z^{s-1}(\mathrm{e}^z-1)^{-1}$ 在除去半轴 $[0,+\infty[$ 的水平带域 $|\Im m\,z|<2\pi$ 上全纯, 积分

$$I(s):=\int_{\mathcal{C}_\varrho}z^{s-1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^z-1}$$

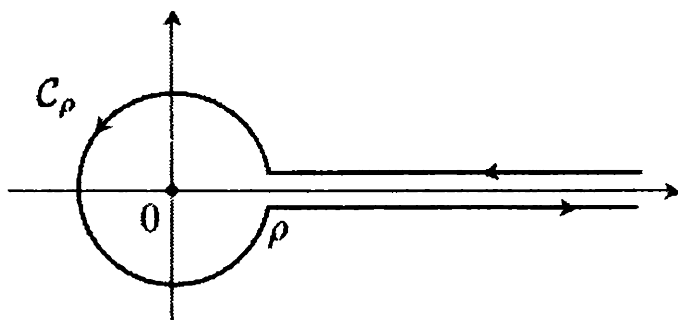


图 II–2 Hankel 围道 $\mathcal{C}_\rho$

与 $\varrho \in]0, 2\pi[$ 无关. 它对每个 $s \in \mathbb{C}$ 绝对收敛并在任意紧集上一致收敛, 故为 s 的整函数. 有

$$I(s) = \oint_{|z|=\varrho} z^{s-1} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^z - 1} + (\mathrm{e}^{2\pi i s - 1}) \int_\varrho^\infty t^{s-1} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - 1}. \tag{3.2}$$

用上界估计

$$|z^{s-1}/(\mathrm{e}^z - 1)| \ll_s \varrho^{\sigma-2} \qquad (|z| = \varrho \leqslant \pi),$$

并令 ϱ 趋于 0 得等式

$$I(s) = (\mathrm{e}^{2\pi i s} - 1)\Gamma(s)\zeta(s) \qquad (\sigma > 1).$$

由互补公式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin(\pi s)$ 推出

$$\zeta(s) = \frac{\mathrm{e}^{-i\pi s}}{2\pi i}\Gamma(1-s)I(s). \tag{3.3}$$

上式原本对 $\sigma > 1$ 成立, 给出了 $\zeta(s)$ 在全复平面上的延拓. 当 $\sigma \leqslant 0$ 时因子 $\Gamma(1-s)$ 全纯, 故而 $\zeta(s)$ 除了在 $s = 1$ 处已证的极点外没有其他奇点. 命题于是得证. □

由 (3.2) 即得 $\zeta(s)$ 在负整数处的值.

定理 3.2 设 B_n 是第 n 个 Bernoulli 数. 有

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \qquad (n \geqslant 0). \tag{3.4}$$

特别地, $\zeta(-2n) = 0$ 对所有 $n \geqslant 1$ 成立.

证明 在第一部分第零章中, Bernoulli 数由 Laurent 展式

$$(\mathrm{e}^z - 1)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} B_m z^{m-1}$$

来定义. 于是由 (3.2) 得

$$I(-n) = \oint_{|z|=\varrho} (\mathrm{e}^z - 1)^{-1} z^{-n-1}\, \mathrm{d}z = 2\pi i \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}.$$

代入 (3.3) 即得题设等式. □

§3.3 函数方程

定理 3.3 对 $s \neq 1$, 有

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s). \tag{3.5}$$

注 函数方程可有更对称的形式

$$\Phi(s) = \Phi(1-s) \qquad (s \neq 0, 1), \tag{3.6}$$

其中

$$\Phi(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s). \tag{3.7}$$

这由 (3.5), 互补公式, 以及 Γ-函数的复制公式 (0.10) 立得.

证明 设 $k \geqslant 1$ 及 $\mathcal{H}_k$ 为参数 $\varrho_k := (2k+1)\pi$ 的 Hankel 围道. 那么 $|\mathrm{e}^z - 1|^{-1}$ 在围道 $\mathcal{H}_k$ 上有界, 且有

$$\left|\int_{\mathcal{H}_k} z^{s-1}(\mathrm{e}^z - 1)\,\mathrm{d}z\right| \ll_s k^{\sigma}. \tag{3.8}$$

令 ϱ 满足 $0 < \varrho < 2\pi$, 反向围道 $\mathcal{C}_\varrho - \mathcal{H}_k$ 包含了极点 $z = 2n\pi\mathrm{i}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm k)$. 留数定理于是推出

$$\begin{aligned} I(s) = \int_{\mathcal{C}_\varrho} z^{s-1}(\mathrm{e}^z - 1)^{-1}\,\mathrm{d}z &= \int_{\mathcal{H}_k} z^{s-1}(\mathrm{e}^z - 1)^{-1}\,\mathrm{d}z - 2\pi\mathrm{i} \sum_{1 \leqslant |n| \leqslant k} (2n\pi\mathrm{i})^{s-1} \\ &= \int_{\mathcal{H}_k} z^{s-1}(\mathrm{e}^z - 1)^{-1}\,\mathrm{d}z = (2\pi\mathrm{i})^s(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi s}) \sum_{1 \leqslant n \leqslant k} n^{s-1}. \end{aligned}$$

由 (3.8), 令 k 趋于无穷知对半平面 $\sigma < 0$ 中的任意 s, 有

$$I(s) = (2\pi\mathrm{i})^s(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi s} - 1)\zeta(1-s).$$

代入 (3.3), 就对 $\sigma < 0$ 证明了方程 (3.5), 由解析延拓知其对任意 s 成立. □

关系 (3.4) 和 (3.6) 的一个直接推论便是如下关于 $\zeta(2n)$ 的公式. 它也是 Bernoulli 函数 Fourier 级数展开的一个特殊情形, 见习题 1.

定理 3.4 有

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n} \qquad (n \geqslant 1). \tag{3.9}$$

§3.4 临界带域中的逼近和上界估计

令

$$\chi(s) := 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi s\right), \tag{3.10}$$

从而函数方程 (3.5) 可写成

$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s). \tag{3.11}$$

固定 σ, 当 $|\tau| \to \infty$ 时 $\chi(s)$ 的渐近性质易用 $\Gamma(s)$ 的渐近性质来表示, 见推论 0.13 [复 Stirling 公式 (定理 0.12) 的推论]. 有

$$|\chi(s)| \sim \left(\frac{|\tau|}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \qquad (|\tau| \to +\infty). \tag{3.12}$$

从而由 (3.11) 知当 $\sigma < 0$ 时 $\zeta(s)$ 在竖直线上的阶可完全确定. 特别地, 若利用 §1.6 的记号, 对 ζ-函数, 有

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \sigma, & 若\ \sigma \leqslant 0, \\ 0, & 若\ \sigma \geqslant 1. \end{cases} \tag{3.13}$$

临界带域 $0 < \sigma < 1$ 中 $\mu(\sigma)$ 的具体值是深刻的问题, 至今尚未解决. 最简单的猜想是 $\mu(\sigma)$ 可分解成两个射线, 即

$$\mu(\sigma) = \max\left(\tfrac{1}{2} - \sigma, 0\right). \tag{3.14}$$

该公式称为 Lindelöf 假设. 由 $\mu(\sigma)$ 的凸性 (见定理 1.20) 知其等价于 $\mu(\frac{1}{2})=0$.

由凸性, 关系 $\mu(0) = \frac{1}{2}$ 及 $\mu(1) = 0$ 即可推出不等式 $\mu(\sigma) \leqslant \frac{1}{2}(1-\sigma)$ 对 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ 成立. 下述结论改进了该估计.

定理 3.5 设 $\sigma_0 > 0$, $0 < \delta < 1$. 对 $\sigma \geqslant \sigma_0$, $x \geqslant 1$, $0 < |\tau| \leqslant (1-\delta)2\pi x$ 一致地有

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{-\sigma}). \tag{3.15}$$

其证明归结为一个简单的引理.

引理 3.6 对 $\sigma > 0$ 及 $N \in \mathbb{Z}^+$ 有

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant N} \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - s\int_N^\infty \frac{\langle t \rangle}{t^{s+1}}\,\mathrm{d}t. \tag{3.16}$$

证明　对 $\sigma>1$ 有

$$\zeta(s)-\sum_{n\leqslant N}\frac{1}{n^s}=\int_N^\infty\frac{\mathrm{d}\lfloor t\rfloor}{t^s}=-\frac{N^{1-s}}{1-s}-\int_N^\infty\frac{\mathrm{d}\langle t\rangle}{t^s}$$
$$(3.17)\qquad =-\frac{N^{1-s}}{1-s}-s\int_N^\infty\frac{\langle t\rangle}{t^{s+1}}\,\mathrm{d}t.$$

由解析延拓, 该式对 $\sigma>0$ 仍成立. □

定理 3.5 的证明　当 $|\tau|\leqslant(1-\delta)2\pi x$ 时, 将第一部分定理 6.4 应用于函数 $f(t):=-(\tau/2\pi)\ln t$ (该函数在 $x\leqslant t\leqslant y$ 上满足 $|f'(t)|\leqslant 1-\delta$), 可得对 $y\geqslant x$ 有

$$(3.18)\qquad \sum_{x<n\leqslant y}n^{-\mathrm{i}\tau}=\int_x^y t^{-\mathrm{i}\tau}\,\mathrm{d}t+O(1).$$

从而对 $N\geqslant x$ 有,

$$\sum_{x<n\leqslant N}\frac{1}{n^s}=\int_x^N\frac{\mathrm{d}y}{y^s}+\int_x^N\frac{\mathrm{d}\{O(1)\}}{y^\sigma}=\frac{N^{1-s}-x^{1-s}}{1-s}+O\Big(\frac{1}{x^\sigma}\Big).$$

代入 (3.16) 并令 N 趋于无穷即得 (3.15). □

推论 3.7　有

$$(3.19)\qquad \zeta(\tfrac12+\mathrm{i}\tau)\ll\tau^{1/6}\ln|\tau|\qquad(|\tau|\to\infty).$$

证明　可设 τ 为正. 应用第一部分定理 6.5 及定理 6.9 于 $f(t):=-(\tau/2\pi)\ln t$ 即知估计

$$\sum_{a<n\leqslant b}n^{-\mathrm{i}\tau}\ll\min\Big(\tau^{1/2}+a\tau^{-1/2},a^{1/2}\tau^{1/6}+a\tau^{-1/6}\Big)$$

对 $\tau>0$, $a<b\leqslant 2a$ 一致成立. 用分部积分, 得在 $a\ll\tau$ 的附加假设下, 有

$$\sum_{a<n\leqslant b}n^{-1/2-\mathrm{i}\tau}\ll\min\Big((\tau/a)^{1/2}+(a/\tau)^{1/2},\tau^{1/6}+a^{1/2}\tau^{-1/6}\Big)$$
$$\ll\min\Big(\tau^{1/6},(\tau/a)^{1/2}\Big).$$

对于 $r\leqslant\ln x/\ln 2$, 选择 $a:=2^r$, $b:=\min(2^{r+1},x)$ 并将已得的估计相加, 得

$$\sum_{n\leqslant x}n^{-1/2-i\tau}\ll\tau^{1/6}\ln\tau\qquad(x\ll\tau)$$

将 $x=\tau$ 的情形代入 (3.15) 即得要求的估计 (3.19). □

用函数 $\mu(\sigma)$ 的凸性, 从前述结论可导出临界带域中的一个新的上界估计.

定理 3.8 ζ-函数满足不等式

$$\mu(\sigma) \leqslant \begin{cases} \frac{1}{3}(1-\sigma), & \text{若 } \frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1, \\ \frac{1}{6}(3-4\sigma), & \text{若 } 0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.20}$$

证明 由估计 $\mu(0) = \frac{1}{2}$, $\mu\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{1}{6}$, $\mu(1) = 0$ 立得. □

上界估计 (3.20) 在直线 $\sigma = 1$ 上不提供任何新的信息, 然而直接应用定理 3.5 却能可观地改进估计 $\zeta(s) \ll |\tau|^{\varepsilon}$ $(\sigma = 1)$.

定理 3.9 对 $0 < \alpha < 1$ 有

$$|\zeta(s)| \leqslant \frac{3|\tau|^{1-\alpha}}{2\alpha(1-\alpha)} \qquad (\sigma \geqslant \alpha,\ |\tau| \geqslant 1). \tag{3.21}$$

特别地, 对任意正常数 c, 有

$$\zeta(s) \ll \ln|\tau| \qquad (|\tau| \geqslant 2,\ \sigma \geqslant 1 - c/\ln|\tau|). \tag{3.22}$$

注 显式上界估计 (3.21) 除 $\alpha = \alpha(\tau) \to 1$ 以外显然不具理论意义. 在相反的情形, (3.20) 更佳.

证明 由 (3.16), 有

$$|\zeta(s)| \leqslant \sum_{n \leqslant N} n^{-\sigma} + N^{1-\sigma}|\tau|^{-1} + \tfrac{1}{2}N^{-\sigma} + \tfrac{1}{2}|s|\sigma^{-1}N^{-\sigma}.$$

另外有经典结果:

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{1}{n^{\sigma}} \leqslant 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^{\sigma}} < \frac{N^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad (0 < \sigma < 1).$$

在 $\sigma \geqslant \alpha$ 的假设下, 得到

$$|\zeta(s)| \leqslant N^{1-\alpha}\left\{\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{|\tau|} + \frac{2\alpha + |\tau|}{2\alpha N}\right\}.$$

取 $N = \lfloor|\tau|\rfloor$, 得

$$|\zeta(s)| \leqslant \frac{N^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}\{\alpha + \alpha(1-\alpha) + (1+\alpha)(1-\alpha)\}.$$

大括号中的函数在 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时取到最大值 $\frac{3}{2}$. □

推论 3.10 对任意正常数 c 以及任意整数 $k \geqslant 0$, 有

$$\zeta^{(k)}(s) \ll (\ln|\tau|)^{k+1} \quad (|\tau| \geqslant 2, \sigma \geqslant 1 - c/\ln|\tau|). \tag{3.23}$$

证明 显然可假设 $|\tau| \geqslant 3$. 对适当的常数 c_0, 圆盘 $|z-s| \leqslant r := c_0/\ln|\tau|$ 包含于使得 (3.22) 成立的区域中. 要求的上界估计于是由 Cauchy 公式

$$\zeta^{(k)}(s) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \zeta(s+z)\frac{dz}{z^{k+1}}$$

而得. □

§3.5 零点分布的初步估计

Euler 乘积 $\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ 的收敛性保证了 $\zeta(s)$ 在 $\sigma > 1$ 上非零. 本节将证明该性质可推广到闭半平面 $\sigma \geqslant 1$ 上. 另外, 本节将证明下列简单而精巧的结论可完善取极限的过程. 这是 Mertens (1898) 的结果, 它系统化了 Hadamard 的方法. La Vallée-Poussin 的结果尽管从根本上说是与之等价的, 但是用到更深刻的性质.

定理 3.11 (Mertens) 设 $F(s) := \sum_{n\geqslant 1} a_n/n^s$ 是非负系数 Dirichlet 级数, 收敛半径为 σ_c, 那么有

$$3F(\sigma) + 4\Re e\, F(\sigma + i\tau) + \Re e\, F(\sigma + 2i\tau) \geqslant 0 \quad (\sigma > \sigma_c). \tag{3.24}$$

证明 令 $V(\vartheta) := 3 + 4\cos\vartheta + \cos 2\vartheta$ $(\vartheta \in \mathbb{R})$. 容易验证

$$V(\vartheta) = 2(1+\cos\vartheta)^2 \geqslant 0.$$

而 (3.24) 的左边等于

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n V(\tau \ln n)}{n^\sigma},$$

命题于是得证. □

推论 3.12 有

$$\zeta(\sigma)^3 |\zeta(\sigma+i\tau)|^4 |\zeta(\sigma+2i\tau)| \geqslant 1 \quad (\sigma > 1). \tag{3.25}$$

证明 只须应用定理于在 $\sigma > 1$ 上收敛的函数

$$F(s) = \log\zeta(s) = -\sum_p \log(1-p^{-s}) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{\Lambda(n)}{n^s \ln n}$$

即可. □

现在可证明如下重要结论.

定理 3.13 函数 $\zeta(s)$ 在半平面 $\sigma \geqslant 1$ 中没有任何零点.

证明 用反证法. 假设 $\zeta(1+\mathrm{i}\tau_0)=0$, 那么 $\tau_0 \neq 0$ 且 $\zeta(s)$ 在 $1+\mathrm{i}\tau_0$ 的邻域内全纯. 故

$$\zeta(\sigma+\mathrm{i}\tau) \ll \sigma - 1 \quad (\sigma > 1).$$

另外, 由于 $s=1$ 是 $\zeta(s)$ 的单极点且 $\zeta(s)$ 除 $s=1$ 外处处全纯, 有

$$\zeta(\sigma) \ll 1/(\sigma-1), \qquad \zeta(\sigma+2\mathrm{i}\tau_0) \ll 1 \quad (\sigma > 1).$$

令 $\sigma \to 1+$ 便得出其与 (3.25) 矛盾. □

定理 3.13 及函数方程 (3.5) 显然推出如下结论.

推论 3.14 在半平面 $\sigma \leqslant 0$ 内, 函数 $\zeta(s)$ 的零点只能是 $-2n(n=1,2,\cdots)$. 它们是单零点.

ζ-函数在负偶数的那些零点称为其显然零点. 在 §3.7 中将看到 $\zeta(s)$ 在临界带域 $0<\sigma<1$ 中还有别的零点. 等式

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\sigma} = (2^{1-\sigma}-1)\zeta(\sigma) \quad (0<\sigma<1)$$

说明了这些非显然零点不是实数. 函数方程以及 $\zeta(s)$ 在实数点 s 取实值的事实推出它们关于直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 以及实轴 $\tau=0$ 对称.

另一个关于定理 3.13 的特别优雅的证明属于 Ingham (1930). 它基于对 $\sigma>1, \vartheta \in \mathbb{R}$ 成立的 Ramanujan 恒等式

$$\frac{\zeta(s)^2\zeta(s+\mathrm{i}\vartheta)\zeta(s-\mathrm{i}\vartheta)}{\zeta(2s)} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{|\tau(n,\vartheta)|^2}{n^s}, \tag{3.26}$$

其中

$$\tau(n,\vartheta) := \sum_{d \mid n} d^{\mathrm{i}\vartheta}. \tag{3.27}$$

将两者 Euler 乘积的因子相比较容易证明 (3.26), 又见注记. 考虑 (3.26) 的收敛坐标 σ_c. 由于 $|\tau(n,\vartheta)| \leqslant \tau(n)$, 有 $\sigma_c \leqslant 1$. 由定理 1.5, 级数之和在 $\sigma > \sigma_c$ 上全纯. 由于其系数非负, $s=\sigma_c$ 是奇点. 然而若 $s=1+\mathrm{i}\vartheta$ 是 $\zeta(s)$ 的零点, 那么 $1-\mathrm{i}\vartheta$ 亦然 (因为 $\zeta(\bar{s})=\overline{\zeta(s)}$). 这两个零点与 $\zeta(s)^2$ 在 $s=1$ 处的双重极点相消. 而 $\zeta(s)$ 除 $s=1$ 外没有别的奇点, 由前述便知 (3.26) 在实轴上直至 $\zeta(2s)$ 的第一个零点, 即 $s=-1$ 处全纯. 从而 $\sigma_c=-1$, 这与 $|\tau(n,\vartheta)|$ 不收敛到 0 矛盾.

§3.6 几个复分析中的引理

下列经典结果在后文中对函数的研究中有用.

定理 3.15 (Jensen 公式) 设 $F(s)$ 是 $|s| \leqslant R$ 上的全纯函数, 使得 $F(0) = 1$. 对 $0 < r \leqslant R$, 用 $n(r)$ 表示 F 在圆盘 $|s| \leqslant r$ 中的零点数 (计算重数), 那么

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|F(Re^{\mathrm{i}\vartheta})|\,\mathrm{d}\vartheta. \tag{3.28}$$

证明 若 $F(s)$ 在 $|s| = r$ 上非零, 则

$$n(r) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|s|=r} \frac{F'(s)}{F(s)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F'(re^{\mathrm{i}\vartheta})}{F(re^{\mathrm{i}\vartheta})} re^{\mathrm{i}\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta. \tag{3.29}$$

除以 r, 在 $[0, R]$ 上积分并比较两边的实部便从形式上得到 (3.28). 只须验证相应于零点的模的那些 r 的临界值在此过程中不引起麻烦.

用 $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k \leqslant R$ 表示这些例外的模. 令 $r_0 := 0$, $r_{k+1} := R$. 可将 (3.29) 在任意区间

$$[(1+\varepsilon)r_j, (1-\varepsilon)r_{j+1}] \qquad (j = 0, \ldots, k)$$

上积分并将得到的等式相加. 为证明 (3.28), 只须证明当 $\varepsilon \to 0$ 时没有问题, 亦即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} \ln\left|\frac{F((1+\varepsilon)r_j e^{\mathrm{i}\vartheta})}{F((1-\varepsilon)r_j e^{\mathrm{i}\vartheta})}\right|\mathrm{d}\vartheta = 0. \tag{3.30}$$

由于 F 在圆 $|s| = r_j$ 上只有有限个零点, 不失一般性, 可考虑 $s = r_j$ 是 $F(s)$ 在该圆周上的唯一零点的情形. 不妨设 $m \geqslant 1$ 是其重数, 那么

$$\ln|F(re^{\mathrm{i}\vartheta})| = m\ln\left|1 - \frac{r}{r_j}e^{\mathrm{i}\vartheta}\right| + H(r, \vartheta)$$

对于 $|r - r_j| \leqslant \varepsilon r_j$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$ 成立, 其中 $H(r, \vartheta)$ 是 r 和 ϑ 的连续函数. 关系 (3.30) 等价于

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\frac{1-(1+\varepsilon)e^{\mathrm{i}\vartheta}}{1-(1-\varepsilon)e^{\mathrm{i}\vartheta}}\right|\mathrm{d}\vartheta = 0. \tag{3.31}$$

有

$$\left|\frac{1-(1+\varepsilon)e^{\mathrm{i}\vartheta}}{1-(1-\varepsilon)e^{\mathrm{i}\vartheta}}\right|^2 = \frac{\varepsilon^2 + 4(1+\varepsilon)\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}{\varepsilon^2 + 4(1-\varepsilon)\sin^2\frac{1}{2}\vartheta} = 1 + O(\varepsilon).$$

从而 (3.31) 的被积函数在 $|\vartheta| \leqslant |\pi|$ 上一致地为 $O(\varepsilon)$. 于是便推出了 (3.31).□

定理 3.16 (Borel-Carathéodory 实部引理) 设 F 是 $|s| \leqslant R$ 上的全纯函数, 使得 $F(0)=0$. 假设 $\max_{|s|=R} \Re e\, F(s) \leqslant A$, 那么

$$|F^{(k)}(s)| \leqslant \frac{2ARk!}{(R-|s|)^{k+1}} \qquad (k \geqslant 0,\ |s|<R). \tag{3.32}$$

证明 考虑 F 在 $s=0$ 处的 Taylor 级数

$$F(s) = \sum_{n \geqslant 1} a_n s^n \qquad (|s| \leqslant R).$$

若对任意 n, ϑ_n 表示 a_n 的辐角, 那么

$$\Re e\, F(Re^{i\vartheta}) = \sum_{n \geqslant 1} |a_n| R^n \cos(n\vartheta + \vartheta_n).$$

级数在 $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$ 上绝对一致收敛. 而由 F 全纯得知 $\Re e\, F(s)$ 满足平均值性质, 即

$$\int_0^{2\pi} \Re e\, F(Re^{i\vartheta})\, d\vartheta = 0.$$

由之, 对每个整数 $n \geqslant 1$, 有

$$\pi |a_n| R^n = \int_0^{2\pi} (1+\cos(n\vartheta+\vartheta_n)) \Re e\, F(Re^{i\vartheta})\, d\vartheta \leqslant 2\pi A.$$

乘以 $\binom{n}{k}(|s|/R)^n$ 并对 $n \geqslant 1$ 求和便得到 (3.32). □

定理 3.16 的另一个有用的推论是如下结论.

推论 3.17 设 $F(s)$ 是圆盘 $|s| \leqslant R$ 上的全纯函数, 使得 $F(0)=1$ 及 $|F(s)| \leqslant M$ $(|s|=R)$. 令 Z 表示 F 在圆盘 $|s| \leqslant \frac{1}{2}R$ 中所有零点 ϱ 在计算重数下构成的有限序列. 对所有满足 $|s| < \frac{1}{2}R$ 的复数 s, 有

$$\left| \frac{F'(s)}{F(s)} - \sum_{\varrho \in Z} \frac{1}{s-\varrho} \right| \leqslant \frac{16R\ln M}{(R-2|s|)^2}. \tag{3.33}$$

证明 设 $G(s) := F(s)\prod_{\varrho \in Z}(1-s/\varrho)^{-1}$. 由于每个 ϱ 对应的乘积因子之模不超过 1, 有 $|G(s)| \leqslant M$. 函数 $H(s) := \log G(s)$ 对于 $A = \ln M$ 在圆盘 $|s| \leqslant \frac{1}{2}R$ 中满足定理 3.16 的条件. 于是对 $|s| = r < \frac{1}{2}R$ 有

$$|H'(s)| \leqslant \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-s|=(R-2|s|)/4} \frac{H(z)}{(z-s)^2}\, dz \right| \leqslant \frac{4R\ln M}{(R/2-|s|)^2}.$$ □

§3.7 零点的整体分布

下节中将对于 ζ-函数的特殊情形研究有限阶整函数 Hadamard 分解的一般方法, 这里仅证明初步的结果.

函数 $(s-1)\zeta(s)$ 是整函数, 但考虑函数

$$\xi(s) := s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = s(s-1)\Phi(s) \tag{3.34}$$

更为方便. 它满足函数方程

$$\xi(s) = \xi(1-s) \qquad (s \in \mathbb{C}). \tag{3.35}$$

$\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ 时 ξ 的正则性来自于 ζ 的正则性. 这是由于 ζ 在 $s=1$ 的极点与 $(s-1)$ 相消. 由 (3.35), $\xi(s)$ 是全复平面上的全纯函数. 有 $\xi(0)=\xi(1)=1$.

由定理 3.13, 当 $\sigma \geqslant 1$ 时 $\xi(s) \neq 0$. 由 (3.35), $\xi(s)$ 在 $\sigma \leqslant 0$ 上亦不取零值. 故 $\xi(s)$ 的所有零点位于临界带域 $0<\sigma<1$ 之中. 在其中 $\xi(s)$ 和 $\zeta(s)$ 具有共同的零点. 在半平面 $\sigma \leqslant 0$ 上则不然. 这是因为 $\zeta(s)$ 的显然零点与 $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ 的极点相消.

习惯上用 $\varrho = \beta + \mathrm{i}\gamma$ 表示 ξ 的一个零点 (即 ζ 的一个非显然零点). 令

$$N(T) := \sum_{\varrho\,:\,0 \leqslant \gamma \leqslant T} 1.$$

此处及往后均约定计算每个零点 ϱ 的重数.

本节中将给出当 $T \to +\infty$ 时 $N(T)$ 的一个渐近公式.

从这个角度出发, 显然需要知道 $\xi(s)$ 增长速度的阶. 由定理 3.8, 有

$$\zeta(s) \ll \tau \qquad (\sigma \geqslant 0,\ |\tau| \geqslant 1). \tag{3.36}$$

另外, 对复 Stirling 公式的最后一项作分部积分, 得

$$\log\Gamma(s) = \left(s-\tfrac{1}{2}\right)\log s - s + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12s} - \tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} \tfrac{B_2(t)}{(t+s)^2}\,\mathrm{d}t, \tag{3.37}$$

其中 $B_2(t) = \langle t\rangle^2 - \langle t\rangle + \frac{1}{6}$ 表示第二个 Bernoulli 函数. 这推出当 $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ 时有

$$\ln|\xi(s)| \ll |s|\ln|s| \qquad (|s| \to \infty). \tag{3.38}$$

故由 (3.35), 该式在全复平面成立.

将用一个类似的上界估计来证明以下关键结果.

定理 3.18 对 $T \geqslant 2$ 有

$$N(T+1) - N(T) \ll \ln T. \tag{3.39}$$

证明 应用参数为 $R=3$ 的 Jensen 公式 (3.28) 于函数

$$F(s):=\xi(s+2+\mathrm{i}T)/\xi(2+\mathrm{i}T).$$

一方面, 对任意 r, $\sqrt{5}\leqslant r\leqslant 3$, 圆盘 $|s|\leqslant r$ 包含顶点为 -2, $-2+\mathrm{i}$, -1 和 $-1+\mathrm{i}$ 的长方形, 从而 $n(r)\geqslant N(T+1)-N(T)$; 另一方面, 由 (3.36) 及 (3.37) 即得估计

$$\ln|F(s)|\leqslant O(\ln T)\qquad(|s|\leqslant 3).$$

Jensen 公式于是推出

$$(N(T+1)-N(T))\ln(3/\sqrt{5})\leqslant\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{n(r)}{r}\,\mathrm{d}r\ll\ln T,$$

从而 (3.39) 成立. □

现在可以证明以下基本定理.

定理 3.19 *当 T 趋于无穷时有*

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\ln T).\tag{3.40}$$

注 特别地, 这说明 $\zeta(s)$ 有无穷多个非显然零点.

证明 不失一般性, 可设 T 不是 $\xi(s)$ 某零点的纵坐标. 令 $\mathcal{R}$ 为顶点为 $2\pm\mathrm{i}T$ 和 $-1\pm\mathrm{i}T$ 的长方形, 具通常定向. 由经典的辐角定理, 有

$$2N(T)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{R}}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi}\Im m\int_{\mathcal{R}}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\,\mathrm{d}s.$$

由于 $\mathcal{R}$ 对轴 $\sigma=\frac{1}{2}$ 及 $\tau=0$ 对称, 且由函数方程, $\xi'(s)/\xi(s)$ 亦具有该对称性, 从而

$$N(T)=\frac{1}{\pi}\Im m\int_{\mathcal{L}}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{\pi}\big[\arg\xi(s)\big]_{\mathcal{L}},\tag{3.41}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是折线 $\big[2,2+\mathrm{i}T,\frac{1}{2}+\mathrm{i}T\big]$. 现在由 (3.34) 有

$$\xi(s)=2(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}+1\Big)\zeta(s)\tag{3.42}$$

及

$$\big[\arg(s-1)\big]_{\mathcal{L}}=\arg\big(\mathrm{i}T-\tfrac{1}{2}\big)=\tfrac{1}{2}\pi+O\Big(\frac{1}{T}\Big),\ \big[\arg\pi^{-s/2}\big]_{\mathcal{L}}=-\tfrac{1}{2}T\ln\pi.\tag{3.43}$$

另外, 由复 Stirling 公式 (定理 0.12) 知

$$\begin{aligned}\Big[\arg\Gamma(\tfrac{1}{2}s+1)\Big]_{\mathcal{L}} &= \Im m\,\log\Gamma(\tfrac{1}{2}\mathrm{i}T+\tfrac{5}{4})\\ &= \Im m\left\{(\tfrac{1}{2}\mathrm{i}T+\tfrac{3}{4})\log(\tfrac{1}{2}\mathrm{i}T+\tfrac{5}{4})-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}T-\tfrac{5}{4}+\tfrac{1}{2}\ln 2\pi+O\Big(\frac{1}{T}\Big)\right\}\\ &= \tfrac{1}{2}T\ln\tfrac{1}{2}T-\tfrac{1}{2}T+\tfrac{3}{8}\pi+O\Big(\frac{1}{T}\Big).\end{aligned}\tag{3.44}$$

这样只须证明

$$\Im m\int_{\mathcal{L}}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,\mathrm{d}s \ll \ln T.\tag{3.45}$$

$\mathcal{L}$ 的竖直部分位于绝对收敛半平面中, 故可逐项积分. 有

$$\left|\int_2^{2+\mathrm{i}T}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,\mathrm{d}s\right| \leqslant 2\sum_{n\geqslant 2}\frac{\Lambda(n)}{n^2\ln n}<\infty.$$

为处理水平线段上的积分, 对函数 $F(s)=\zeta(2+\mathrm{i}T+s)/\zeta(2+\mathrm{i}T)$ 用参数为 $R=4$ 及 $r=3/2$ 的推论 3.17. 该函数分子的阶是 T 的某次幂, 而其分母满足

$$|\zeta(2+\mathrm{i}T)| \geqslant 1-\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2}=2-\tfrac{1}{6}\pi^2>0.$$

若 Z 是 $\zeta(s)$ 在圆盘 $|s-2-\mathrm{i}T|\leqslant\frac{3}{2}$ 中的零点列 (计算重数), 那么对水平线段 $\left[\frac{1}{2}+\mathrm{i}T, 2+\mathrm{i}T\right]$ 中的任意 s, 有

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\sum_{\varrho\in Z}\frac{1}{s-\varrho}\ll \ln T.\tag{3.46}$$

由定理 3.18, 有 $\sum_{\varrho\in Z}1\ll\ln T$. 故对每个 $\varrho\in Z$ 有

$$\left|\Im m\int_{2+\mathrm{i}T}^{\frac{1}{2}+\mathrm{i}T}\frac{\mathrm{d}s}{s-\varrho}\right|\leqslant\pi.$$

这推出了 (3.45), 定理 3.19 得证. □

§3.8 Hadamard 乘积展开

现在可以确定整函数 $\xi(s)$ 的 (从而确定 $\zeta(s)$的) 相对于零点的 Hadamard 展式. 正如证明中所见, 仅需要关于非显然零点数局部上界估计的定理 3.18.

定理 3.20 (Hadamard 乘积公式) 对适当的常数 a, b, 有

$$\xi(s) = \mathrm{e}^{as}\prod_{\varrho}(1 - s/\varrho)\mathrm{e}^{s/\varrho} \qquad (s \in \mathbb{C}), \tag{3.47}$$

$$\zeta(s) = \frac{\mathrm{e}^{bs}}{2(s-1)}\Gamma\big(\tfrac{1}{2}s+1\big)^{-1}\prod_{\varrho}(1 - s/\varrho)\mathrm{e}^{s/\varrho} \qquad (s \neq 1). \tag{3.48}$$

注 在习题 175 中将证明

$$b = \ln(2\pi) - \tfrac{1}{2}\gamma - 1 \approx 0.549\,27, \tag{3.49}$$

由此推出 $a = \frac{1}{2}\ln(4\pi) - \frac{1}{2}\gamma - 1 \approx -0.023\,10$.

证明 由 (3.39) 知

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{1}{|\varrho|^2} \leqslant 2\int_0^T \frac{\mathrm{d}N(t)}{t^2} \ll \sum_{k\leqslant T}\frac{\ln(2k)}{k^2} \ll 1,$$

这推出无穷乘积

$$P(s) := \prod_{\varrho}(1 - s/\varrho)\mathrm{e}^{s/\varrho} \qquad (s \in \mathbb{C})$$

的收敛性. 而乘积的通项对每个 s 来说形如 $1 + O(|\varrho|^{-2})$, 于是 $P(s)$ 是 s 的整函数, 与 $\xi(s)$ 具有相同的零点. 而 $P(0) = \xi(0) = 1$, 故 $\log\big(\xi(s)/P(s)\big)$ 确定一个在 $s = 0$ 取 0 值的全纯函数 $F(s)$. 将看到

$$\max_{0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi} \Re e\, F(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}) \ll R(\ln R)^2 \tag{3.50}$$

对一列趋于无穷的 R 值成立. 由实部引理, 从 (3.50) 推知 F 是 s 的线性函数, 此即题设结论.

将证明 (3.50) 对所有满足

$$\min_{\varrho}\big|R - |\varrho|\big| \geqslant 1/(C\ln R) \tag{3.51}$$

的 R 成立, 其中 C 是适当的正常数. 每个区间 $[k, k+2]$, $k \geqslant 2$ 都至少含有一个这样的 R. 事实上, 当 C 足够大时, 有

$$\big|\{\varrho \,:\, k \leqslant |\varrho| \leqslant k+2\}\big| \leqslant 2\big(N(k+1) - N(k-1)\big) < J := \lfloor C\ln k\rfloor.$$

由抽屉原则, 至少存在一个区间

$$[k + 2j/J, k + (2j+2)/J] \qquad (0 \leqslant j < J)$$

不含有形如 $|\varrho|$ 的数, 于是可选取 $R := k + (2j+1)/J$.

考虑满足 (3.51) 的某数 R. 对 $|s|=R$ 有

$$\begin{aligned}\ln|P(s)| &= \sum_{\varrho}\ln|(1-s/\varrho)e^{s/\varrho}| \\ &\geqslant -\Big\{\sum_{|\varrho|\leqslant R/2}\frac{R}{|\varrho|}+\sum_{R/2<|\varrho|\leqslant 2R}\big(2+\ln(2CR\ln R)\big)+\sum_{|\varrho|>2R}\frac{R^2}{|\varrho|^2}\Big\},\end{aligned}$$

其中用到了不等式

$$\ln|(1-z)e^z|\geqslant\begin{cases}-|z|, & 若\ |z|\geqslant 2,\\ -2+\ln|1-z|, & 若\ \frac{1}{2}<|z|<2,\\ -|z|^2, & 若\ |z|<\frac{1}{2}.\end{cases}$$

应用 (3.39), 由前述得出上界估计

$$\ln(1/|P(s)|)\ll R(\ln R)^2.$$

细节不难, 故略去. 由 (3.38), 另有

$$\ln|\xi(s)|\ll R\ln R.$$

这推出 (3.50), 命题于是得证. □

结束本节之前, 给出以下注记. 上界估计

$$N(T+1)-N(T)\ll\ln T$$

足以证明 $\xi(s)$ 的乘积公式 (3.47). 而从该式容易推出当 T 趋于无穷时 $N(T)\to\infty$, 否则 $\xi(s)$ 形如

$$\xi(s)=e^{cs}Q(s),$$

其中 c 是常数而 $Q(s)$ 是 s 的多项式. 函数方程 $\xi(s)=\xi(1-s)$ 推出 $c=0$ 而 s 取正实数时的 Stirling 公式 说明了 ξ 不能以多项式速度增长. 另外 Titchmarsh (1951, §9.1) 用简单的方法从函数方程得出下界估计

$$N(T+A)-N(T)\gg 1$$

对一个适当的绝对常数 A 成立.

§3.9 无零点区域

从定理 3.13 的证明容易得出在 $\sigma\geqslant 1$ 上 $\zeta(s)\neq 0$ 的结论. 毋庸置疑, 其深化后可得到 $\zeta(s)$ 突入半平面 $\sigma<1$ 的一个具体的无零点区域, 在 §4.2 中将指明细节. 从上节的结论, 尤其是乘积公式实际上却容易得出更大的无零点区域.

定理 3.21 存在正常数 c, 使得 $\zeta(s)$ 在复平面中不等式

$$\sigma \geqslant 1 - c/\ln(2+|\tau|) \tag{3.52}$$

定义的区域内没有零点.

证明 Dirichlet 级数

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

的系数非负. 由定理 3.11, 对任意 $\sigma>1$ 及任意实数 γ 有

$$-3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\Re e\,\frac{\zeta'(\sigma+\mathrm{i}\gamma)}{\zeta(\sigma+\mathrm{i}\gamma)} - \Re e\,\frac{\zeta'(\sigma+2\mathrm{i}\gamma)}{\zeta(\sigma+2\mathrm{i}\gamma)} \geqslant 0. \tag{3.53}$$

当 γ 是 $\zeta(s)$ 的某零点 $\varrho=\beta+\mathrm{i}\gamma$ 的纵坐标时对上式左边三项分别行上界估计.

首先有

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \frac{1}{\sigma-1} + O(1).$$

然后, 对乘积公式 (3.48) 取对数知对 $s\neq 1$, $s\neq\varrho$ 有

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -b + \frac{1}{s-1} + \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)} - \sum_{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{s-\varrho}\right). \tag{3.54}$$

对含 Γ 的项用复 Stirling 公式 (0.11) 知当 $\sigma>1$, ϱ 及 $s-\varrho$ 具正实部时有

$$-\Re e\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \leqslant O(\ln|\tau|) \qquad (\sigma>1,\ |\tau|\geqslant 2).$$

计入零点 $\beta+\mathrm{i}\gamma$ 的贡献后知

$$-\Re e\,\frac{\zeta'(\sigma+\mathrm{i}\gamma)}{\zeta(\sigma+\mathrm{i}\gamma)} \leqslant O(\ln|\gamma|) - \frac{1}{\sigma-\beta}.$$

将这些估计代入 (3.53) 知存在正常数 c_1, 使得对 $|\gamma|\geqslant 2$, 有

$$\frac{3}{\sigma-1} - \frac{4}{\sigma-\beta} \geqslant -c_1\ln|\gamma|.$$

从而

$$1-\beta \geqslant \frac{1-c_1(\sigma-1)\ln|\gamma|}{(3/(\sigma-1))+c_1\ln|\gamma|}.$$

选取 $\sigma = 1+(2c_1\ln|\gamma|)^{-1}$, 得

$$1-\beta \geqslant c_2/\ln|\gamma|,$$

其中 $c_2 = 1/14c_1$. 若充分减小 c 的值, 对 (3.52) 来说附加的条件 $|\tau|\geqslant 2$ 并不要紧, 从而推出了题设的结论. □

§3.10 ζ'/ζ, $1/\zeta$ 和 $\log\zeta$ 的上界估计

定理 3.21 中给出了本节标题中三个函数的一个全纯区域, 自然希望得到它们在该区域上的上界估计.

定理 3.22 *存在正常数* c, *使得对* $|\tau|\geqslant 3$ *及* $\sigma\geqslant 1-c/\ln|\tau|$ *有*

$$\zeta'(s)/\zeta(s)\ll \ln|\tau|, \tag{3.55}$$

$$1/\zeta(s)\ll \ln|\tau|, \tag{3.56}$$

$$|\log\zeta(s)|\leqslant \ln_2|\tau|+O(1). \tag{3.57}$$

证明 可设 $\tau>0$. 由定理 3.21 知存在常数 c, $0<c<\frac{1}{16}$, 使得 $\zeta(s)$ 的每个非显然零点 $\varrho=\beta+\mathrm{i}\gamma$ 满足

$$\beta<1-8c/\ln(|\gamma|+2).$$

将见到这推出

$$\min_{\varrho}\Re e\left\{\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{s-\varrho}\right\}\geqslant 0\quad(\tau\geqslant 4,\ \sigma\geqslant 1-4c/\ln\tau). \tag{3.58}$$

当 $|s-\varrho|>\frac12|\varrho|$ 时, 令 $\vartheta:=2|s-\varrho|/|\varrho|\geqslant 1$, 需估计的量等于

$$\frac{\beta}{|\varrho|^2}+\frac{\sigma-\beta}{|s-\varrho|^2}=\frac{\vartheta^2\beta/4+\sigma-\beta}{|s-\varrho|^2}\geqslant\frac{\sigma-3/4}{|s-\varrho|^2}>0.$$

当 $|s-\varrho|\leqslant\frac12|\varrho|$ 时, 有 $|\tau-\gamma|\leqslant\frac12(|\gamma|+1)$. 从而 $|\gamma|\leqslant 2\tau+2$ 且

$$\beta<1-8c/\ln(2\tau+4)\leqslant 1-4c/\ln\tau\leqslant\sigma.$$

这推出了 (3.58).

代入 (3.54), 得

$$-\Re e\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\leqslant K\ln\tau\qquad(\tau\geqslant 4,\ \sigma\geqslant 1-4c/\ln\tau), \tag{3.59}$$

其中 K 是适当的绝对常数.

现在可证明上界估计 (3.55). 显然可设 τ 足够大. 令 $s=\sigma+\mathrm{i}\tau$ 为固定的复数, 使得 $\tau\geqslant 5$, $\sigma\geqslant 1-c/\ln\tau$. 令 $\eta:=c/\ln\tau$, $s_0:=1+\eta+\mathrm{i}\tau$. 对闭圆盘 $|w|\leqslant 4\eta$ 中每个 w, 点 $s_0+w=\sigma'+\mathrm{i}\tau'$ 满足 $\tau'\geqslant 4$, $\sigma'\geqslant 1-4c/\ln\tau'$. 由 (3.59) 知

$$-\Re e\frac{\zeta'(s_0+w)}{\zeta(s_0+w)}\leqslant 2K\ln\tau,$$

这推出函数

$$F(w) := \frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)} - \frac{\zeta'(s_0+w)}{\zeta(s_0+w)}$$

在圆盘 $|w| \leqslant 4\eta$ 上对参数 $A := 2K\ln\tau + |\zeta'(s_0)/\zeta(s_0)|$ 满足 Borel-Carathéodory 定理 (即定理 3.16) 的条件. 由于 $|s-s_0| \leqslant 2\eta$, 定理 3.16 推出

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leqslant 4K\ln\tau + 3\left|\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\right|,$$

而

$$\left|\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)n^{-1-\eta} = \eta^{-1} + O(1) \ll \ln\tau,$$

从中便得到上界估计 (3.55).

估计 (3.56) 由 (3.57) 显然可得. 为证 (3.57), 可应用以下形式的估计 (3.55)

$$\log\left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right) = \int_{s_0}^{s}\frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)}\,\mathrm{d}w \ll |s-s_0|\ln\tau \ll 1. \tag{3.60}$$

注意到

$$\begin{aligned}|\log\zeta(s_0)| &= \left|\sum_{n\geqslant 2}\frac{\Lambda(n)}{\ln n}n^{-s_0}\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 2}\frac{\Lambda(n)}{\ln n}n^{-1-\eta} = \ln\zeta(1+\eta)\\ &= \ln(1/\eta) + O(1) = \ln_2\tau + O(1),\end{aligned}$$

从中便得到要证的结论. □

注记

§3.2—§3.3 基本定理 3.1 和定理 3.2 的证明参照了 Riemann (1859) 的原始方法. Titchmarsh (1951) 给出了 $\zeta(s)$ 解析延拓及函数方程的多个其他证明, 如见习题 183 及习题 184.

§3.4 定理 3.5 是 Hardy 和 Littlewood (1921) 的结果. 在大多数应用中对 n 的和式含有至少 $C|\tau|$ 个项的事实相当麻烦. Hardy 和 Littlewood (1923, 1929) 的另一结果可将项数改进到 $O(\sqrt{|\tau|})$, 这便是著名的函数方程法.

定理 3.23 对任意 $\delta > 0$ 及对 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $x > \delta$, $y > \delta$, $\tau = 2\pi xy$ 一致地有

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant x} n^{-s} + \chi(s)\sum_{n\leqslant y} n^{s-1} + O(x^{-\sigma} + \tau^{\frac{1}{2}-\sigma}y^{\sigma-1}).$$

$\chi(s)$ 的定义见 (3.10).

该结论的证明, 其在 $\zeta(s)$ 的幂上的推广, 以及与之关联的大量注记见于 Ivić (1985) 第四章, 以及 Titchmarsh 和 Heath-Brown (1986) 第四章.

Huxley 于 2005 年将 $\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau\right)$ 上界估计中的指数 $\frac{1}{6}$ 减小到 $\frac{32}{205}+\varepsilon$, 其中 ε 是任意正数. 这改进了 Bombieri 和 Iwaniec (1986) 以及他自己 (1993b) 的结果.

§3.5 (3.26) 是对 $\sigma > 1+\max\{0, \Re e\, a, \Re e\, b, \Re e\,(a+b)\}$ 成立的 Ramanujan 公式

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s}$$

的特例. Titchmarsh (1951) 用 Euler 乘积公式给出该式的一个证明. 另一个方法用到等式左边是数论函数

$$\begin{aligned}\sum_{h^2k\ell m|n} h^{a+b}\mu(h)k^a\ell^b m^{a+b} &= \sum_{KLm|n} K^aL^bm^{a+b}\sum_{h|(K,L)}\mu(h)\\ &= \sum_{\substack{KLm|n\\(K,L)=1}} K^aL^bm^{a+b} = \sum_{d|n}\sum_{[\kappa,\lambda]=d}\kappa^a\lambda^b\\ &= \sum_{\kappa,\lambda|n}\kappa^a\lambda^b = \sigma_a(n)\sigma_b(n)\end{aligned}$$

对应的级数的事实.

§3.7 Riemann 在其 1859 年的笔记中猜想了定理 3.19. Mangoldt 于 1895 年证明之. 令 $S(T)=(1/\pi)\arg\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}T\right)$, 其中 ζ-函数幅角的值由在连接 $2, 2+\mathrm{i}T, \frac{1}{2}+\mathrm{i}T$ 的折线 $\mathcal{L}$ 上连续来定义. 由 (3.41), (3.42), (3.43) 及 (3.44) (见 Titchmarsh (1951, §9.2)), 有

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + O\Big(\frac{1}{T}\Big). \tag{3.61}$$

Littlewood (1924) 证明了上界估计

$$\int_0^T S(\tau)\,\mathrm{d}\tau \ll \ln T,$$

这说明至少从平均上说 (3.61) 中的项 $\frac{7}{8}$ 是显著的. 另外, Selberg 于 1946 年证明了

$$S(T) = \Omega_{\pm}\left(\frac{(\ln T)^{1/3}}{(\ln_2 T)^{7/3}}\right).$$

直到今天, 定理 3.19 中证明的估计 $S(T) \ll \ln T$ 仍是已知结果中最好的.

定理 3.19 的一个直接推论是, 若 $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\xi(s)$ 在上半平面中零点的单调递增列, 那么

$$\gamma_n \sim 2\pi n/\ln n \qquad (n\to\infty). \tag{3.62}$$

Littlewood (1924) 证明了 $\gamma_{n+1}-\gamma_n\to 0$.

§3.9 一般说来, 借助推论 3.17, 从函数 $\zeta(s)$ 在直线 $\sigma=1$ 上的信息出发可以用 $\zeta(s)$ "靠近" $\sigma=1$ 的那些零点横坐标的某个函数来估计 $-\Re e(\zeta'(s)/\zeta(s))$ 的上界. 用与定理 3.21 类似的方法可得到 $\zeta(s)$ 的一个无零点区域. 所以从道理上讲, $|\zeta(1+\mathrm{i}\tau)|$ 的上界估计等同于确定 $\zeta(s)$ 的无零点区域.

Korobov (1958) 及 Vinogradov (1958) 证明了上界估计

$$\zeta(s)\ll(1+\tau^{A(1-\sigma)^{3/2}})(\ln\tau)^{2/3}\qquad(\sigma\geqslant 0,\tau\geqslant 2),\tag{3.63}$$

从中得出无零点区域目前最好的估计

$$\sigma\geqslant 1-C(\ln\tau)^{-2/3}(\ln_2\tau)^{-1/3}\qquad(\tau\geqslant 3).\tag{3.64}$$

(3.63) 的详细证明以及推出 (3.64) 的过程见 Ivić (1985, 第六章).

§3.10 用 $\zeta(s)$ 在区域 (3.64) 中无零点的信息容易改进定理 3.22, 可得当 s 满足 (3.64) 时, 有

$$\zeta'(s)/\zeta(s)\ll(\ln\tau)^{2/3}(\ln_2\tau)^{1/3},$$

$$1/\zeta(s)\ll(\ln\tau)^{2/3}(\ln_2\tau)^{1/3},$$

$$|\log\zeta(s)|\leqslant\tfrac{2}{3}\ln_2\tau+\tfrac{1}{3}\ln_3\tau+O(1).$$

习题

174. 证明 $\zeta(s)=1/(s-1)+\gamma+O(s-1)$ 在 $s=1$ 的邻域内成立, 其中 γ 是 Euler 常数.

175. 定理 3.20 中常数 b 的计算.

(a) 或用 $\Gamma(z)$ 的无穷乘积展开, 或用复 Stirling 公式, 抑或用 $\Gamma(z)$ 的积分形式证明 $\Gamma'(1)=-\gamma$.

(b) 将 $\zeta(s)$ 的函数方程在 $s=1$ 处展开, 证明 $\zeta'(0)=-\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

(c) 证明使得

$$\zeta(s)=\frac{\mathrm{e}^{bs}}{2(s-1)\Gamma(\frac{1}{2}s+1)}\prod_{\varrho}(1-s/\varrho)\mathrm{e}^{s/\varrho}$$

的常数 b 等于 $\ln(2\pi)-1-\frac{1}{2}\gamma$. 可计算 $\zeta(s)$ 在 $s=0$ 处的对数导数.

176. 令 $R(n):=\big|\{(d,d')\,:\,[d,d']=n\}\big|\ (n\geqslant 1)$. 利用习题 47 (c) 的结论, 确定其对应的 Dirichlet 级数的收敛坐标.

177. 令 $\tau_k(n)$ 为方程 $n = m_1 m_2 \cdots m_k$ 的整数解 $m_1, m_2, \ldots, m_k \geqslant 1$ 的个数.

(a) 证明 $\sum_{n\geqslant 1} \tau_k(n)/n^s = \zeta(s)^k$.

(b) 证明对每个 $k \geqslant 1$, 存在 $\delta_k > 0$, 使得

$$\sum_{n\leqslant x} \tau_k(n) = x P_{k-1}(\ln x) + O_\varepsilon(x^{1-\delta_k+\varepsilon}),$$

其中 P_{k-1} 是 $k-1$ 次多项式, 确定 δ_k 的值并对 $k = 1, 2, 3$ 计算 P_{k-1} 的系数. 在 Lindelöf 假设下可得到哪些 δ_k 的值?

178. 证明对固定的 $\tau \in \mathbb{R}$ 及 $s = 1 + \mathrm{i}\tau$, 对于 $x \geqslant 2$ 及 $T \geqslant 1$ 一致地有

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa-\mathrm{i}T}^{\kappa+\mathrm{i}T} \frac{x^w}{w\zeta(s+w)}\,\mathrm{d}w + O\Big(\frac{\ln x}{T} + \frac{1}{x}\Big),$$

其中 $\kappa = 1/\ln x$. 用 §3.10 中的计算, 从中推出估计

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} + O_s(\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln x}}) \qquad (\sigma = 1,\ x > 1).$$

179. 利用实效的 Perron 公式以及 §3.10 中的计算证明

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\mathrm{i}\tau}} = \begin{cases} -\dfrac{\zeta'(1+\mathrm{i}\tau)}{\zeta(1+\mathrm{i}\tau)} - \dfrac{x^{-\mathrm{i}\tau}}{\mathrm{i}\tau} + O_\tau(\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln x}}), & \text{若 } \tau \neq 0, \\ \ln x - \gamma + O(\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln x}}), & \text{若 } \tau = 0. \end{cases}$$

推出下式对 $\sigma = 1$, $\tau \neq 0$ 成立:

$$\log \zeta(s) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{\Lambda(n) n^s}{\ln n}, \quad \zeta(s) = \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1}.$$

180. 对整数 n, 令 $\tau^*(n)$ 为其奇因子数目. 确定 $\tau^*(n)$ 的 Dirichlet 级数并用复积分方法得出渐近估计

$$T^*(x) := \sum_{n\leqslant x} \tau^*(n) = \frac{1}{2} x \{\ln(2x) + 2\gamma - 1\} + O_\varepsilon(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}). \tag{3.65}$$

令 $T(x) := \sum_{n\leqslant x} \tau(n)$. 证明 $T^*(x) = T(x) - T(\frac{1}{2}x)$ 并从中得出 (3.65) 余项估计的一个改进.

181. 设 z 为模 $\leqslant 1$ 的复数. 用 Euler 乘积展开证明 Dirichlet 级数 $F(s,z) := \sum_{n\geqslant 1} z^{\Omega(n)}/n^s$ 在 $\sigma > 1$ 上收敛, 并在除去某正整数倍是 $\zeta(s)$ 的零点或极点的那些点后的半平面 $\sigma > 0$ 中的任一单连通开区域上可解析延拓为收敛无穷乘积

$$F(s,z) = \prod_{k\geqslant 1} \zeta(ks)^{a_k(z)}$$

定义的函数, 其中 $a_k(z) := k^{-1} \sum_{d\mid k} \mu(d) z^{k/d}$.

182. 证明下列渐近估计均等价于 Lindelöf 假设[1]:

(a) $\displaystyle\int_1^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau\right)\right|^{2k} \mathrm{d}\tau \ll_{\varepsilon,k} T^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0,\ k = 1, 2, \ldots)$;

(b) $\displaystyle\int_1^T |\zeta(\sigma+\mathrm{i}\tau)|^{2k} \mathrm{d}\tau \ll_{\sigma,\varepsilon,k} T^{1+\varepsilon} \left(\sigma > \frac{1}{2},\ \varepsilon > 0,\ k = 1, 2, \ldots\right)$;

(c) $\displaystyle\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+\mathrm{i}\tau)|^{2k} \mathrm{d}\tau \sim \sum_{n\geqslant 1} \frac{\tau_k(n)^2}{n^{2\sigma}} \left(\sigma > \frac{1}{2},\ k = 1, 2, \ldots\right)$.

183. 用 Euler-Maclaurin 公式来解析延拓.

对 $f(t) := t^{-s}$ 用 Euler-Maclaurin 公式, 证明对 $s > 1$ 在第一部分第零章的记号下有

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + \sum_{r=0}^{k} \frac{B_{r+1}}{r+1}\binom{s+r-1}{r} - \binom{s+k}{k+1}\int_1^\infty B_{k+1}(t)t^{-s-k-1}\,\mathrm{d}t,$$

由之得出定理 3.1 及定理 3.2 的一个新证.

184. 用 Jacobi ϑ-函数证明函数方程.

令 $\vartheta(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2 x}$ $(x > 0)$.

(a) 对 $f(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2 x}$ 用 Poisson 求和公式, 证明

$$\vartheta(1/x) = \sqrt{x}\vartheta(x) \qquad (x > 0).$$

(b) 在积分 $\Gamma(s/2) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{s/2-1}\,\mathrm{d}x$ 中作变量替换 $x = \pi n^2 y$, 得出对 $\sigma > 1$ 有

$$\zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2} = \int_0^\infty \psi(x)x^{s/2-1}\,\mathrm{d}x, \tag{3.66}$$

其中 $\psi(x) := \frac{1}{2}(\vartheta(x) - 1)$.

(c) 证明 (3.66) 右边又等于

$$\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-(s+1)/2} + x^{s/2-1}\right)\psi(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中积分定义了 s 的一个整函数, 在变换 $s \mapsto 1-s$ 下不变, 由之得出定理 3.3 和定理 3.4 的一个新证.

185. 不用 van der Corput 理论重新证明定理 3.5, 其中用如下方法证明 (3.18) 式: 对 $f(t) := t^{-\mathrm{i}\tau}$ 用 Euler-Maclaurin 求和公式, 将 $B_1(t)$ Fourier 展开, 逐项积分并用第二中值公式作上界估计.

186. Hurwitz ζ-函数. 对 $\alpha \in]0, 1]$, 定义 Hurwitz ζ-函数为

$$\zeta(s;\alpha) := \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)^{-s}.$$

---

[1] 见 Titchmarsh (1951) 第十三章.

证明 $\zeta(s;\alpha)$ 可延拓为全复平面上的亚纯函数, 其唯一的奇点是在 $s=1$ 处的单极点, 留数为 1, 并且对 $\sigma<0$ 满足 "函数方程":

$$\zeta(s;\alpha)=\Gamma(1-s)\sum_{r\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{\mathrm{e}(n\alpha)}{(2n\pi\mathrm{i})^{1-s}}=\frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin\pi(\frac{1}{2}s+2n\alpha)}{n^{1-s}},$$

其中复对数取幅角主值.

187. 承认 $\zeta(s)$ 的所有零点均是单零点, 且对任意 $\varepsilon>0$, 存在序列 $\{T_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, 使得 $\min\limits_{-1\leqslant\sigma\leqslant 2}|\zeta(\sigma\pm iT_\nu)|\gg T_\nu^{-\varepsilon}$. 证明对 $x\in]1,\infty]\setminus\mathbb{N}$ 有

$$M(x):=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)=\sum_{\varrho}\frac{x^{\varrho}}{\varrho\zeta'(\varrho)}-2-\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2\pi}{x}\right)^{2n}\frac{(-1)^n}{(2n)!n\zeta(2n+1)},$$

其中对 ϱ 的求和定义为 $\sum_{|\Im m\,\varrho|\leqslant T_\nu}$ 的极限.

188. 证明对固定的 $k>0$ 及 $x>1$ 有

$$\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n\zeta(n)\frac{x^n}{n!}=x\ln x+(2\gamma-1)x+\tfrac{1}{2}+O_k(1/x^k),$$

可对 $a\in]0,1[$ 考虑积分 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\frac{\pi\zeta(s)x^s}{\Gamma(s+1)\sin\pi s}\,\mathrm{d}s$.

189. 一个自然的 Dirichlet 级数的自然边界. ②

令 $P(s)$ 为形如 $P(s)=\sum_{p\in\mathbb{P}}p^{-s}$ 的 $\sigma>1$ 上的 Dirichlet 级数.

(a) 在半平面 $\sigma>0$ 上将 $P(s)$ 表示为 $\log\zeta(s)$ 的函数.

(b) 证明 $P'(s)$ 可延拓为半平面 $\sigma>0$ 上的亚纯函数, 其极点的阶均为 1.

(c) 对 $\delta>0, t>0$, 令 $Q(\delta,t)$ 为不等式 $0<\sigma<\delta, t<\tau<t+\delta$ 所界定的正方形区域. 证明对每个正实数对 (δ,t), 均可选取实数 $q_0(\delta,t)>0$, 使得对任意素数 $q\geqslant q_0(\delta,t)$, 存在 $\zeta(s)$ 的零点 $\varrho_q=\sigma_q+\mathrm{i}\tau_q$ 满足 $\frac{1}{2}\leqslant\sigma_q<1$ 及 $qt<\tau_q<q(t+\delta)$.

(d) 对任意 $\zeta(s)$ 的零点 ϱ, 令 $\nu(\varrho)$ 表示其阶, 即最大的使得 $\zeta(s)$ 在 $s=\varrho$ 的邻域内形如 $(s-\varrho)^\nu H(s)$ (H 在 $s=\varrho$ 处全纯) 的整数 ν. 证明对适当的绝对常数 A 有 $1\leqslant\nu(\varrho_q)\leqslant A\ln q(1+\delta)$, 推出可选择 $q_0(s,t)$ 使得 $q\nmid\nu(\varrho_q)$.

(e) 证明 ϱ_q/q 可以是 $P'(s)$ 的极点, 其系数为

$$c_q=\sum_{1\leqslant m\leqslant 2q-1}\frac{\mu(m)}{m}\nu\Big(\frac{m\varrho_q}{q}\Big).$$

(f) 可得出 $c_q\neq 0$, 从而 ϱ_q/q 确是 $P(s)$ 的奇点.

② 见 Landau 和 Walfisz (1919).

(g) 证明直线 $\sigma = 0$ 是 $P(s)$ 的自然边界, 即从 P 在任一具正横坐标的点处的 Taylor 展式出发不能将 $P(s)$ 延拓到 $\sigma < 0$ 中任一处.

190. 定义数论函数 $f = \mu^2 * j$, 其中 μ 是 Möbius 函数, j 是单位函数.

(a) 证明 f 是乘性函数, 且对任意整数 n 满足 $f(n) \geqslant n$.

(b) 令 $a_m := \left|\{n \geqslant 1 : f(n) = m\}\right|$. 证明对 $\sigma > 1$ 有

$$\sum_{m\geqslant 1} \frac{a_m}{m^s} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{f(n)^s}.$$

(c) 在定义域中将 Dirichlet 级数

$$F(s;w) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{\{n/f(n)\}^w}{n^s}$$

展成 Euler 乘积, 其中 w 是复参数.

(d) 令 $F(s) = F(s;s)$. 证明对 $\sigma > 1$ 有 $F(s) = \zeta(s)G(s)$, 其中

$$G(s) := \prod_p (1 + (p+1)^{-s} - p^{-s}).$$

(e) 证明对任意 $p \geqslant 2$ 有

$$|(p+1)^{-s} - p^{-s}| \leqslant \min\{2p^{-\sigma}, |s|p^{-\sigma-1}\} \qquad (\sigma \geqslant 0).$$

(f) 证明对 $\sigma \geqslant 1 - 1/\ln(3+|\tau|)$ 有

$$\sum_{p\leqslant 3+|\tau|} \frac{1}{p^\sigma} \leqslant \mathrm{e} \ln_2(3+|\tau|) + O(1).$$

(g) 从 (e) 和 (f) 推出 $G(s)$ 在区域 $\sigma \geqslant 1 - 1/\ln(3+|\tau|)$ 上可全纯延拓, 且满足上界估计

$$G(s) \ll (\ln(3+|\tau|))^{2\mathrm{e}}.$$

(h) 令 $\sigma(\tau) = 1 - 1/\ln(3+|\tau|)$. 证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{1+\sigma(\tau)} \left|\zeta(\sigma(\tau)+\mathrm{i}\tau)G(\sigma(\tau)+\mathrm{i}\tau)\right| \frac{\mathrm{d}\tau}{\sigma(\tau)^2+\tau^2} \ll x^2 \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\sqrt{\ln x}\right\}.$$

[可对 $T := \exp\{\sqrt{\ln x}\}$ 分别估计 $|\tau| \leqslant T$ 及 $|\tau| > T$ 上的贡献.]

(i) 令 $A(t) := \sum_{n\leqslant t} a_n$. 证明

$$\int_1^x A(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}G(1)x^2 + O(x^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln x}}).$$

用 $A(t)$ 的单调递增性得出

$$A(t) = G(1)x + O(x\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\sqrt{\ln x}}).$$

191. 令 f 为形如

$$f(n)=\sum_{d^3|n}\mu(d)^2d^2$$

的数论函数. 记 $F(s):=\sum_{n\geqslant 1}f(n)/n^s$ 为 f 对应的 Dirichlet 级数, 并令 $S(x):=\sum_{n\leqslant x}f(n)$ 为 f 的和函数.

(a) 由习题 44 (c) 的结论得出与 $S(x)$ 渐近等价的一个函数.

(b) 证明 f 是乘性的. 可利用卷积及立方数的示性函数具乘性的事实.

(c) 对任意素数 p 及任意整数 $\nu\geqslant 1$ 计算 $f(p^\nu)$. 在级数 $\sum_{\nu\geqslant 0}f(p^\nu)/p^{\nu s}$ 的收敛区域内计算其值并将之表示为 p^{-s} 的有理分式.

(d) 证明 $F(s)$ 在 $\sigma>1$ 上绝对收敛.

(e) 利用 $\zeta(s)$ 和 $F(s)$ 的 Euler 乘积展开证明 $F(s)$ 可表示为 $\zeta(s)$, $\zeta(3s-2)$ 及 $\zeta(6s-4)$ 的函数.

(f) 证明 $F(s)$ 在 $s=1$ 处有一个极点并确定其阶. 计算 $F(s)$ 在 $s=1$ 处 Laurent 展式负幂部分 (可利用习题 174 的结论), 并用 γ, π 及 $\kappa:=-\zeta'(2)/\zeta(2)$ 来表示其系数.

(g) 确定 $F(s)$ 的收敛坐标.

(h) 计算 $\zeta'(s)$ 在 $s=1$ 点处的阶, 以及其 Laurent 展式负幂次部分.

(i) 证明 $G(\sigma):=\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n n^{-\sigma}$ 在 $\sigma>0$ 上非零, 从中推出 $\zeta(s)$ 在半直线 $]0,\infty[$ 上无零点.

(j) 确定实数 a 和 b, 使得 Dirichlet 级数 $H(s)=F(s)+a\zeta'(s)-b\zeta(s)$ 可全纯延拓到实半直线 $]\frac{1}{3},\infty[$ 上.

(k) 承认 $F(s)$ 在直线 $\sigma=\frac{3}{4}$ 上有一个极点, 给出关于

$$R(x):=S(x)-ax\ln x+(a-b)x$$

振荡性的一个结果. 该假设暗示了关于函数 $\zeta(s)$ 零点的何种性质?

192. (a) 证明每个自然数 $n\geqslant 1$ 可唯一地写成 $n=m\ell^2$ 的形式, 其中 $\mu(m)^2=1$. 令 $f(n):=\ell$. 该函数是否为乘性函数?

(b) 证明对每个素数 p, 幂级数 $\sum_{\nu\geqslant 0}f(p^\nu)z^\nu$ 在开圆盘 $|z|<1/\sqrt{p}$ 上收敛. 计算其和, 并从中得出级数 $F(s):=\sum_{n\geqslant 1}f(n)/n^s$ 在 $\sigma>1$ 上绝对收敛, 且可表示为 $\zeta(s)$, $\zeta(2s)$ 及 $\zeta(2s-1)$ 的函数.

(c) 证明 $F(s)$ 在 $s=1$ 处有一个极点. 何为 $F(s)$ 的收敛坐标?

(d) 令 $Q(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)^2$ 及 $S(x):=\sum_{n\leqslant x}f(n)$. 证明

$$S(x)=\sum_{\ell\leqslant\sqrt{x}}\ell Q(x/\ell^2)\quad(x\geqslant 1),$$

并给出 $S(x)$ 的一个渐近形式. 重新得到 (c) 中的结论.

(e) 计算 $F(s)$ 在 $s=1$ 处极点的阶并确定其主项.

(f) 计算 $\zeta'(s)$ 在 $s=1$ 处极点的阶并确定其主项.

(g) 确定实数 a,b, 使得级数 $F(s)-a\zeta(s)+b\zeta'(s)$ 可全纯延拓到半直线 $[\frac{1}{4},+\infty[$ 上, 并将之表示成 Euler 常数 γ 及 $\delta:=\zeta'(2)$ 的函数. 承认 $F(s)$ 在直线 $\sigma=\frac{1}{4}$ 上含有至少一个非实的极点, 从中得出 $S(x)-ax-b(x\ln x-x)$ 的振荡定理.

193. 类 ζ 整函数. 令 $\vartheta\in]0,1[$ 及 $r:=\|\vartheta\|$. 考虑 Dirichlet 级数.

$$F_\vartheta(s):=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{e}(n\vartheta)}{n^s}.$$

令 $I_\vartheta(s):=\int_{\mathcal{H}}z^{s-1}\,\mathrm{d}z/\{\mathrm{e}^{z-2\pi\mathrm{i}\vartheta}-1\}$, 其中 $\mathcal{H}$ 是 Hankel 围道, 依次由从右向左幅角为 $0+$ 的半直线 $[r,+\infty[$, 除去 $z=r$ 的逆时针方向的圆周 $|z|=r$ 以及从左向右幅角为 $2\pi-$ 的半直线 $[r,+\infty[$ 构成.

(a) 证明 $I_\vartheta(s)$ 是 s 的整函数.

(b) 证明 $I_\vartheta(1)=0$.

(c) 证明对 $\sigma=\Re e\,s>1$ 有 $F_\vartheta(s)(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s}-1)\Gamma(s)=I_\vartheta(s)$.

(d) 推出 $F_\vartheta(s)$ 可全纯延拓成整函数.

第四章　素数定理和 Riemann 假设

§4.1　素数定理

从上章中得到的关于 $\zeta(s)$ 的信息容易得出经典形式下的素数定理.

定理 4.1　*存在正常数 c, 使得当 x 趋于无穷时有*

$$\psi(x) = x + O(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln x}}), \tag{4.1}$$

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln x}}). \tag{4.2}$$

证明　由 Abel 求和法从第一式易得第二式. 下证 (4.1). 由于对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 有 $\Lambda(n) \leqslant \ln n$, 且

$$|\zeta'(1+\sigma)/\zeta(1+\sigma)| \ll 1/\sigma \qquad (\sigma > 0)$$

由第二实效 Perron 公式[①]推出, 当 $x \geqslant 2$ 及 $T \geqslant 2$ 时, 有

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa-\mathrm{i}T}^{\kappa+\mathrm{i}T} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} \,\mathrm{d}s + O\Big(\ln x\Big(1 + \frac{x\ln T}{T}\Big)\Big), \tag{4.3}$$

其中 $\kappa := 1 + 1/\ln x$. 由定理 3.21, 存在非负常数 c_0 使得 $s = 1$ 是被积函数在长方形区域 $|\tau| \leqslant T$, $1 - c_0/\ln T \leqslant \sigma \leqslant \kappa$ 中唯一的奇点. 由于其在 $s = 1$ 处的留数为 x, 有

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa-\mathrm{i}T}^{\kappa+\mathrm{i}T} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} \,\mathrm{d}s = x - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathcal{G}} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} \,\mathrm{d}s, \tag{4.4}$$

---

① 见 §2.1.

其中 $\mathcal{G}$ 是连接 $\kappa-\mathrm{i}T$, $1-c_0/\ln T-\mathrm{i}T$, $1-c_0/\ln T+\mathrm{i}T$, $\kappa+\mathrm{i}T$ 的折线. 定理 3.22 中的上界估计

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll \ln T \qquad (s\in\mathcal{G}).$$

于是推出 $\mathcal{G}$ 的水平部分上积分的贡献 $\ll x(\ln T)/T$ 且竖直部分上积分的贡献

$$\ll x\exp\Big\{-c_0\frac{\ln x}{\ln T}\Big\}(\ln T)^2.$$

选取 $T:=\exp\sqrt{c_0\ln x}$ 可得对任意常数 $c<\sqrt{c_0}$ 来说折线 $\mathcal{G}$ 上积分的阶相当于 (4.1) 的余项. 将 (4.4) 代入 (4.3) 便得要证的结论. □

§4.2 最弱的假设

从理论上讲, 确定在 ζ-函数论中证明素数定理所需的最少的信息是有意义的事. 基本而容易的不等式

$$\zeta(\sigma)^3|\zeta(\sigma+\mathrm{i}\tau)|^4|\zeta(\sigma+2\mathrm{i}\tau)|\geqslant 1 \qquad (\sigma>1), \tag{4.5}$$

大体上是 Mertens 的结果 (§3.5). 由此可证明 $\zeta(s)$ 在 $\sigma=1$ 上非零. 从它出发基本上足以得到素数定理. 事实上, 对 $k=0$ 和 1 利用简单的上界估计 (见 §3.4)

$$\zeta^{(k)}(s)\ll(\ln|\tau|)^{k+1} \qquad (|\tau|\geqslant 2,\ \sigma\geqslant 1-c/\ln|\tau|), \tag{4.6}$$

从 (4.5) 可实效地算出突入半平面 $\sigma<1$ 的一个无零点区域.

令 $s=\sigma+\mathrm{i}\tau$, $0<\eta<c/\ln|\tau|$, $s_0=1+\eta+\mathrm{i}\tau$, 那么对 $\sigma\geqslant1-\eta$ 有

$$|\zeta(s)-\zeta(s_0)|=\Big|\int_{s_0}^{s}\zeta'(w)\,\mathrm{d}w\Big|\leqslant C_0\eta(\ln|\tau|)^2.$$

而 (4.5) 和 (4.6) 推出

$$|\zeta(s_0)|^4\geqslant C_1\eta^3(\ln|\tau|)^{-1}.$$

从而

$$|\zeta(s)|\geqslant C_1^{1/4}\eta^{3/4}(\ln|\tau|)^{-1/4}-C_0\eta(\ln|\tau|)^2.$$

优化 η 后得到

$$|\zeta(s)|\gg 1/(\ln|\tau|)^7 \qquad (|\tau|\geqslant 2,\ \sigma\geqslant 1-C_2/(\ln|\tau|)^9), \tag{4.7}$$

其中 C_2 是适当的非负常数.

读者容易自行验证上节定理 4.1 的证明仍适用于这些较弱的假设. 唯一的修改是参数 T 的选择. 其最优值变成

$$T:=\exp\{c_3(\ln x)^{1/10}\},$$

从而

$$\psi(x) = x + O\big(x\exp\{-c(\ln x)^{1/10}\}\big).$$

注意到仅用 $\zeta(s)$ 在半平面 $\sigma \geqslant 1$ 中无零点的性质便可推出 (最弱形式, 即 $\psi(x) \sim x$ 的) 素数定理.

事实上, 若对 Dirichlet 级数

$$F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\Lambda(n) - 1}{n^s}$$

应用 Perron 公式 (2.10) 得对 $\kappa > 1$ 有

$$\int_0^x (\psi(t) - \lfloor t \rfloor)\,\mathrm{d}t = \frac{x^{\kappa+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\kappa + \mathrm{i}\tau)x^{\mathrm{i}\tau}}{(\kappa + \mathrm{i}\tau)(\kappa + 1 + \mathrm{i}\tau)}\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.8}$$

估计 (4.6) 及 (4.7) 说明了

$$F(\kappa + \mathrm{i}\tau) \ll (\ln(2 + |\tau|))^9 \qquad (\kappa \geqslant 1). \tag{4.9}$$

于是可对 (4.8) 中第二个积分用控制收敛定理. 从而

$$\int_0^x (\psi(t) - \lfloor t \rfloor)\,\mathrm{d}t = x^2 J(x)$$

其中

$$J(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(1 + \mathrm{i}\tau)x^{\mathrm{i}\tau}}{(1 + \mathrm{i}\tau)(2 + \mathrm{i}\tau)}\,\mathrm{d}\tau.$$

所以 $J(x)$ 是某可积函数 Fourier 变换在 $-\ln x$ 处的值. 由 Riemann-Lebesgue 引理, 有 $J(x) = o(1)$ $(x \to \infty)$, 从而

$$\int_0^x \psi(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x),$$

其中 $\varepsilon(x) = J(x) + O(1/x) = o(1)$.

令 $\eta(x) := \max\limits_{x/2\leqslant y\leqslant 3x/2} |\varepsilon(y)|$. 对任意 h, $0 < h \leqslant \frac{1}{2}x$, 有

$$\begin{aligned} x - \frac{h}{2} - \frac{2}{h}\eta(x)x^2 \leqslant \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} \psi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \psi(x) \\ \leqslant \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} \psi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant x + \frac{h}{2} + \frac{4}{h}x^2\eta(x). \end{aligned}$$

选取 $h := x\sqrt{\eta(x)}$, 得

$$\psi(x) = x\{1 + O(\sqrt{\eta(x)})\} = x(1 + o(1)), \tag{4.10}$$

从而素数定理由 $\zeta(s)$ 在 $\sigma=1$ 上非零的事实及 $F(s)$ 在 $\sigma\geqslant 1$ 上一个 "合理的" 上界估计可得. 事实上, 在前述证明中不妨将估计 (4.9) 换成

$$F(s)\ll 1+|\tau|^{1-\delta}\qquad(\sigma\geqslant 1).$$

在第七章中将看到用 (推广形式下的) Wiener-Ikehara 的 Tauber 型定理 (定理 7.13) 可从 $\zeta(1+\mathrm{i}\tau)\neq 0$ 的假设出发不用任何的 $F(s)$ 上界估计便可得到 (4.10).

$\zeta(s)$ 在直线 $\sigma=1$ 上无零点其实是素数定理所需的一个最弱假设, 它容易从素数定理推出.

事实上, 假设 $\psi(x)\sim x$ $(x\to\infty)$ 及 $s_0=1+\mathrm{i}\tau$ 是 $\zeta(s)$ 的 $m\geqslant 1$ 阶零点, 那么

$$\lim_{\sigma\to 1+}(\sigma-1)\frac{\zeta'(\sigma+\mathrm{i}\tau)}{\zeta(\sigma+\mathrm{i}\tau)}=m. \tag{4.11}$$

由分部积分可证明下式

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{s}{s-1}+s\int_1^{\infty}(\psi(t)-t)t^{-s-1}\,\mathrm{d}t.$$

它推出

$$\begin{aligned}(\sigma-1)\left|\frac{\zeta'(\sigma+\mathrm{i}\tau)}{\zeta(\sigma+\mathrm{i}\tau)}\right| &\leqslant\left|\frac{\sigma+\mathrm{i}\tau}{\tau}\right|(\sigma-1)+|\sigma+\mathrm{i}\tau|(\sigma-1)\int_0^{\infty}o(t)t^{-\sigma-1}\,\mathrm{d}t\\ &=o(1)\qquad(\sigma\to 1+),\end{aligned}$$

这与 (4.11) 矛盾.

§4.3 Riemann 假设

Riemann 于 1859 年猜想 $\zeta(s)$ 的非显然零点均位于直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上, 并断言方程

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}\tau)=0\qquad(0<\Re e\,\tau\leqslant T) \tag{4.12}$$

的复根数 "约等于 $(T/2\pi)\ln(T/2\pi)-(T/2\pi)$" (见定理 3.19). 他写道: "事实上, 在此范围内可找到的实根的个数几乎与所有根的个数相当, 极可能所有根都是实根" . 而在 Riemann 的手稿中可找到一段笔记, 说他 "尚未完成第一部分的证明", 见 Riemann (1859) 第 168~169, 及第 175 页.

直到今天, Riemann 的两个断言既未被证明亦未被否定. Hardy 于 1914 年证明了 $\zeta(s)$ 在临界直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上有无穷多个零点. Selberg 于 1942 年证明了临界直线上的零点具有正的比例, 即

$$N_0(T)=\left|\{\tau:0\leqslant\tau\leqslant T,\zeta(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}\tau)=0\}\right|\geqslant cN(T)\qquad(T\to\infty), \tag{4.13}$$

其中 $c>0$. 如今从 Levinson (1974) 的工作中可得到一些 c 的具体值. 他证明了当 T 足够大时可取 $c=0.342$.

(4.12) 仅有实根 (即 $N_0(T)=N(T)$) 的断言称为 Riemann 假设. 它是最著名的数学猜想之一, 在解析数论中有许多深刻的推论. 本节将介绍其中两个.

定理 4.2 Riemann 假设可推出 Lindelöf 假设. 具体地说, 若 $\zeta(s)$ 所有非显然零点的实部都等于 $\frac{1}{2}$, 那么

$$\log\zeta(s)\ll_\varepsilon (\ln|\tau|)^{2-2\sigma+\varepsilon}\qquad(\tfrac{1}{2}<\sigma\leqslant 1,\ |\tau|\geqslant 2).\tag{4.14}$$

其证明用到如下经典结果.

引理 4.3 (Hadamard 三圆引理) 设 $F(s)$ 在圆环 $R_1\leqslant|s|\leqslant R_2$ 上全纯, 那么

$$M(r):=\max_{|s|=r}|F(s)|\qquad(R_1\leqslant r\leqslant R_2)$$

在区间 $R_1\leqslant r\leqslant R_2$ 上是 $\ln r$ 的对数凸函数.

引理的证明 对 $s^mF(s)^n$ 用极大模原理便推出对 $R_1<r<R_2$ 有

$$r^mM(r)^n\leqslant\frac{R_1^mM(R_1)^n}{r-R_1}+\frac{R_2^mM(R_2)^n}{R_2-r}.$$

取 α 使得 $R_1^\alpha M(R_1)=R_2^\alpha M(R_2)$. 在上式中令 n 和 m 依 $m/n\to\alpha$ 趋于无穷, 得

$$r^\alpha M(r)\leqslant R_1^\alpha M(R_1).$$

将 α 的值代入便得

$$\ln M(r)\leqslant\frac{\ln(R_2/r)}{\ln(R_2/R_1)}\ln M_1(R_1)+\frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}\ln M(R_2).\tag{4.15}$$

命题于是得证. □

定理 4.2 的证明 观察到 Riemann 假设推出当 τ 足够大时, 函数

$$F(w):=\log\frac{\zeta(s_0+w)}{\zeta(s_0)}\qquad(s_0:=2+\mathrm{i}\tau)$$

在圆盘 $|w|<\frac{3}{2}$ 上全纯. 可从定理 3.9 得到

$$\Re e\,F(w)\leqslant O(\ln\tau)\qquad(|w|\leqslant\tfrac{3}{2}-\delta).$$

于是由实部引理 (见定理 3.16) 立得

$$\log\zeta(s)\ll_\sigma\ln\tau\qquad(\sigma>\tfrac{1}{2},\ \tau\geqslant 2).\tag{4.16}$$

令 $s := \sigma + \mathrm{i}\tau$, 其中 $\sigma > \frac{1}{2}$, $\tau \geqslant \tau_0$. 取参数 σ_1 及 ε 使得 $1 < \sigma_1 \leqslant \tau$, $0 < \varepsilon < \min\{\sigma_1 - 1, \sigma - \frac{1}{2}\}$. 对

$$R_1 := \sigma_1 - 1 - \varepsilon, \quad r := \sigma_1 - \sigma, \quad R_2 := \sigma_1 - \frac{1}{2} - \varepsilon$$

用三圆引理于 $\log\zeta(\sigma_1 + \mathrm{i}\tau + w)$ (在此三圆上, $\sigma + \mathrm{i}\tau + w$ 分别为 $1 + \varepsilon + \mathrm{i}\tau$, s 和 $\frac{1}{2} + \varepsilon + \mathrm{i}\tau$), 得

$$|\log\zeta(s)| \leqslant M_1^{1-\alpha} M_2^{\alpha},$$

其中

$$\alpha := \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{\ln\left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1 - 1 - \varepsilon}\right)}{\ln\left(\dfrac{\sigma_1 - \frac{1}{2} - \varepsilon}{\sigma_1 - 1 - \varepsilon}\right)} = 2(1 - \sigma + \varepsilon) + O\Big(\frac{1}{\sigma_1 - 1 + \varepsilon}\Big),$$

$$M_1 \leqslant \sup_{\sigma \geqslant 1+\varepsilon} |\log\zeta(\sigma + \mathrm{i}\tau)| \ll_{\varepsilon} 1, \quad M_2 \ll_{\varepsilon} \ln\tau,$$

最后一个估计由 (4.16) 而得. 取 $\sigma_1 = 1 + \ln\tau$ 便得要证的结论. □

定理 4.4 设 Θ 是使得

$$\psi(x) - x \ll x^{\xi} \qquad (x \geqslant 2)$$

成立的所有实数 ξ 之集的下确界, 那么

$$\Theta = \sup_{\varrho} \beta, \tag{4.17}$$

其中对 $\zeta(s)$ 的非显然零点 $\varrho = \beta + \mathrm{i}\gamma$ 取上确界.

推论 4.5 Riemann 假设等价于

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \psi(x) = x + O_{\varepsilon}(x^{1/2+\varepsilon}).$$

定理的证明 令 $R(x) := \psi(x) - x$. 对 $\sigma > 1$ 有

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \int_{1-}^{\infty} t^{-s}\,\mathrm{d}\psi(t) = \frac{1}{s-1} + \int_{1-}^{\infty} t^{-s}\,\mathrm{d}R(t)$$
$$= \frac{1}{s-1} + 1 + s\int_{1}^{\infty} R(t)t^{-s-1}\,\mathrm{d}t.$$

由 Θ 的定义, 有 $R(t) \ll_{\varepsilon} t^{\Theta+\varepsilon}$. 故上式定义了 $\zeta'(s)/\zeta(s)$ 在 $\sigma > \Theta$ 上的亚纯延拓, 在 $s = 1$ 处有唯一的奇点. 这说明了 $\zeta(s)$ 在 $\sigma > \Theta$ 上无零点.

反过来, 若 $\zeta(s)$ 在 $\sigma > \Theta$ 上无零点, 那么上界估计

$$\ln|\zeta(s)| \leqslant O(\ln|\tau|) \qquad (\sigma > \tfrac{1}{2}, |\tau| \geqslant 2)$$

及实部引理推出[②]

$$(4.18)\qquad \log\zeta(s) \ll_\sigma \ln|\tau| \qquad (\sigma > \Theta,\ |\tau| \geqslant 2).$$

对半径为 $\delta < \sigma - \Theta$ 的圆周用 Cauchy 公式, 得

$$(4.19)\qquad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll_\sigma \ln|\tau| \qquad (\sigma > \Theta,\ |\tau| \geqslant 2).$$

由实效的 Perron 公式 (4.3) 及形如 (4.4) 的留数定理并取 $\mathcal{G}$ 为连接 $\kappa - \mathrm{i}T$, $\Theta + \delta \pm \mathrm{i}T$, $\kappa + \mathrm{i}T$ 的折线, 得

$$\psi(x) - x \ll \frac{x\ln T}{T} + x^{\Theta+\delta}(\ln T)^2 + \ln x\Big(1 + \frac{x\ln T}{T}\Big).$$

取 $T := x$ 知该上界为 $O(x^{\Theta+2\delta})$. 而 δ 任意小, 命题得证. □

§4.4 $\psi(x)$ 的显式公式

Riemann 提出了 $\psi(x)$ 的显式公式, Mangoldt 于 1895 年证明之. 它将素数分布完全地描述为 ζ-函数零点的函数.

令

$$\langle\!\langle x\rangle\!\rangle := \min_{p\in\mathbb{P},\nu\geqslant 1,p^\nu\neq x} |x - p^\nu|.$$

定理 4.6 对 $x \geqslant 2$ 有

$$(4.20)\qquad \psi_0(x) := \tfrac{1}{2}\{\psi(x) + \psi(x-)\} = x - \sum_{\varrho}{}' \frac{x^\varrho}{\varrho} - \ln(2\pi) - \tfrac{1}{2}\ln\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big),$$

其中撇号表示在对 $\zeta(s)$ 非显然零点 ϱ 的求和中, 零点 ϱ 和 $\overline{\varrho}$ 必须同时考虑.

另外, 对 $x \geqslant 2$, $T \geqslant 2$, 有

$$(4.21)\qquad \psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma|\leqslant T} \frac{x^\varrho}{\varrho} - \ln(2\pi) + \tfrac{1}{2}\ln\Big(\frac{1}{1 - 1/x^2}\Big) + R(x,T),$$

其中

$$(4.22)\qquad R(x,T) \ll \frac{x\ln^2(xT)}{T} + \frac{x\ln x}{x + T\langle\!\langle x\rangle\!\rangle}.$$

注 (i) 对固定的 $x > 2$, 有 $\lim_{T\to\infty} R(x,T) = 0$. 此外, 若 x 是半整数, 那么 $\langle\!\langle x\rangle\!\rangle \geqslant \frac{1}{2}$, 从而

$$(4.23)\qquad R(x,T) \ll \frac{x(\ln xT)^2}{T}.$$

② 推理与估计 (4.16) 的证明相同, 细节略去.

(ii) 重申有

$$\zeta'(0)/\zeta(0) = \ln(2\pi). \tag{4.24}$$

分若干步证明定理 4.6. 只须证明 (4.21). 出发点自然是实效 Perron 公式 (定理 2.3). 将函数 Λ 以零值延拓到 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}^*$ 上并用引理 2.2 (ii) 中得到的不等式来处理当 $\Lambda(x)\neq 0$ 时相应于 x 的项的积分知对 $\kappa>1, T>0, x>0$ 有

$$|\psi_0(x) - J_\kappa(x,T)| < 2\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\neq x}} \frac{\Lambda(n)(x/n)^\kappa}{1+T|\ln(x/n)|} + \frac{\kappa\Lambda(x)}{T}, \tag{4.25}$$

其中

$$J_\kappa(x,T) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\kappa-\mathrm{i}T}^{\kappa+\mathrm{i}T} \frac{-\zeta'(s)x^s}{s\zeta(s)}\,\mathrm{d}s.$$

第一步是验证 (4.25) 右边与 (4.21) 相符.

引理 4.7 对 $x\geqslant 2$, $\kappa := 1+1/\ln x$ 及 $T>0$ 有

$$|\psi_0(x) - J_\kappa(x,T)| \ll \frac{x(\ln x)^2}{T} + \frac{x\ln x}{x+T\langle\!\langle x\rangle\!\rangle}.$$

证明 (4.25) 右边和式中使得 $n\leqslant 3x/4$ 或 $n\geqslant 5x/4$ 的那些 n 对应部分的贡献

$$\ll \frac{x^\kappa}{T}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\kappa} = \frac{-x^\kappa\zeta'(\kappa)}{T\zeta(\kappa)} \ll \frac{x\ln x}{T}.$$

令 $N_1 := \max_{p^\nu<x} p^\nu$. 用 S_1 表示使得 $3x/4<n<x$ 的那些 n 对应的贡献. 倘若 $N_1\leqslant 3x/4$, 那么 $S_1=0$. 否则有

$$\ln\frac{x}{n} \geqslant \ln\frac{N_1}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-v/N_1}\right) \geqslant \frac{v}{N_1}, \qquad (n=N_1-v,\ 1\leqslant v\leqslant x/4)$$

及

$$\ln\frac{x}{N_1} \geqslant \frac{x-N_1}{x} \geqslant \frac{\langle\!\langle x\rangle\!\rangle}{x}.$$

从而

$$S_1 \ll \sum_{1\leqslant v<x/4}\frac{\Lambda(N_1-v)N_1}{Tv} + \frac{x\Lambda(N_1)}{x+T\langle\!\langle x\rangle\!\rangle} \ll \frac{x(\ln x)^2}{T} + \frac{x\ln x}{x+T\langle\!\langle x\rangle\!\rangle}.$$

引进 $N_2 := \min_{p^\nu>x} p^\nu$ 后可类似处理使得 $x<n<5x/4$ 的那些 n 对应的贡献. 细节略去. □

只须估计 $J_\kappa(x,T)$. 首先注意到将 T 平移一个不超过 1 的值后便可假设

$$\inf_{\varrho}|\gamma - T| \gg 1/(\ln T). \tag{4.26}$$

隐含的常数是绝对常数: 这由定理 3.18 中得到的上界估计

$$N(T+1) - N(T) \ll \ln T \tag{4.27}$$

立得.

在假设 (4.26) 下, 考虑足够大的奇数 U 并对顶点为 $\kappa \pm \mathrm{i}T$, $-U \pm \mathrm{i}T$ 的长方形区域 $\mathcal{R}(T,U)$ 用留数定理. 区域的边界不含 $\zeta(s)$ 的显然零点. 由 (4.24), 得

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{R}(T,U)} \frac{\zeta'(s)x^s}{\zeta(s)s}\,\mathrm{d}s = x - \sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\varrho}{\varrho} - \ln(2\pi) + \sum_{0<2m<U}\frac{1}{2mx^{2m}}.$$

积分 $J_\kappa(x,T)$ 等同于 $\mathcal{R}(T,U)$ 右边竖直部分上的积分. 其余三部分的处理需要 $\zeta'(s)/\zeta(s)$ 的上界估计.

引理 4.8 (i) *在假设 (4.26) 下, 有*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll (\ln T)^2 \qquad (-1 \leqslant \sigma \leqslant 2).$$

(ii) *在假设* $\min_{m\in\mathbf{N}}|s+2m| \geqslant \frac{1}{2}$ *下, 有*

$$|\zeta'(s)/\zeta(s)| \ll \ln(2|s|) \qquad (\sigma \leqslant -1).$$

证明 (i) 由函数方程知证明 $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ 的情形即可. 由 (3.46), 有

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|\gamma-T|\leqslant 3/2}\frac{1}{s-\varrho} + O(\ln T).$$

而和式中任一项 $\ll \ln T$, 项数 $\ll \ln T$, 题设估计于是得证.

(ii) 对函数方程 (3.5) 取对数导数, 得

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \ln 2\pi + \frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{\pi s}{2}\right) - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}.$$

当 $\min_{m\in\mathbf{N}}|s+2m| \geqslant \frac{1}{2}$ 时 $\cot(\pi s/2)$ 项有界. 由 (0.5) 或复 Stirling 公式 (0.11) 知当 $\sigma \leqslant -1$ 时含 Γ 的项 $\ll \ln(2|s|)$. 最后, 由于 $\Re e(1-s) \geqslant 2$, 最后一项有界. □

现在可完成定理 4.6 的证明. 令 $R^* := R^*(x,T)$ 为 (4.22) 左边的项并令 $\mathcal{L}$ 为折线 $[\kappa - \mathrm{i}T, -U - \mathrm{i}T, -U + \mathrm{i}T, \kappa + \mathrm{i}T]$, 由前述, 在假设 (4.26) 下有

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{x^\varrho}{\varrho} - \ln(2\pi) + \sum_{0<m<U/2} \frac{x^{2m}}{2m} + O(R^* + |E|),$$

其中

$$E := \int_{\mathcal{L}} \frac{\zeta'(s)x^s}{s\zeta(s)}\,\mathrm{d}s.$$

由引理 4.8, 比如当 $U > T^2$ 时有

$$E \ll \int_{-U}^{-1} \frac{x^\sigma \ln(T+|\sigma|)}{T+|\sigma|}\,\mathrm{d}\sigma + \int_{-1}^{\kappa} \frac{x^\sigma (\ln T)^2}{T}\,\mathrm{d}\sigma + \int_{-T}^{T} \frac{\ln U}{Ux^U}\,\mathrm{d}\tau \ll \frac{x(\ln T)^2}{T\ln x}.$$

注意到

$$\sum_{m\geqslant 1} \frac{1}{2mx^{2m}} = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-1/x^2}\right),$$

于是可令 U 趋于无穷. 这在条件 (4.26) 下证明了题设结论. 然而该条件可放松. 事实上, 当 T 在有限的区域内变化时, 对 ϱ 的求和至多变了 $O(\ln T)$ 项, 且各项均 $\ll x/T$. 故和的变化 $\ll x(\ln T)/T$, 可纳入余项中.

从显式公式可得到定理 4.4 的一个改进.

定理 4.9 设 $\Theta := \sup_{\varrho} \beta$. 有

$$\psi(x) = x + O(x^\Theta(\ln x)^2), \qquad \pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^\Theta \ln x).$$

证明 由 (4.27) 立得估计

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T} \frac{1}{|\varrho|} \ll (\ln T)^2.$$

在 (4.22) 中选 $T = x$ 便得到关于 $\psi(x)$ 的公式. 关于 $\pi(x)$ 的公式由 Abel 求和法可得. □

注记

§4.1 目前知道的素数定理最好的余项是

$$O(x\exp\{-c(\ln x)^{3/5}(\ln_2 x)^{-1/5}\}).$$

这是从 Korobov-Vinogradov 得到的无零点区域而推知的, 见第三章注记. 此结果的另一证明见 Ellison 和 Mendès France (1975) 或 Ivić (1985). 至今用初等方法只能得到较弱的估计, 即

$$|\psi(x) - x| \ll x\exp\left\{-\tfrac{1}{40}(\ln x)^{1/6}\right\},$$

这是 Srinivasan 和 Sampath (1988) 的结果. 关于这方面可参考 Diamond (1982) 著名的综述.

§4.2 此处素数定理的证明中只用到了 $\sigma \geqslant 1$ 上 $\zeta(s)$ 的性质, 这基本上是 Widder (1971, 第四章) 的结果.

§4.3 Titchmarsh (1951) 给出了 Hardy 定理的许多证明, 亦证明了 Selberg 的定理. 这里仅指出如何简要地证明

$$N_0(T) \gg \ln T \qquad (T \to \infty).$$

其要点在于用到了若 $Z(\tau)$ 是实连续函数且

$$\int_T^{2T} Z(\tau)\,\mathrm{d}\tau = o\left(\int_T^{2T} |Z(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\right) \qquad (T \to \infty), \tag{4.28}$$

那么当 T 足够大时在区间 $[T, 2T]$ 上 $Z(\tau)$ 必为零的事实.

Titchmarsh 选取

$$Z(\tau) := \chi(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\tau)^{-1/2}\zeta(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\tau),$$

其中 $\chi(s)$ 表示函数方程的 "基本因子", 见 (3.10). 由方程 $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$ 推出

$$\chi(s)\chi(1-s) = 1$$

(从 $\chi(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s)\right)/\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)$ 出发亦可), 这样 $\chi\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\tau\right)$ 模为 1. 从而

$$Z(\tau) = \chi(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\tau)^{-1/2}\zeta(\tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\tau)\chi(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\tau) = \overline{Z(\tau)},$$

亦即函数 $Z(\tau)$ 当 τ 为实数时取实值.

为估计 (4.28) 的左边, 可用如下形式的留数定理

$$\int_{\mathcal{R}} \chi(s)^{-1/2}\zeta(s)\,\mathrm{d}s = 0,$$

其中 $\mathcal{R}$ 是顶点为 $\frac{1}{2} + \mathrm{i}T$, $\frac{1}{2} + 2\mathrm{i}T$, $\frac{5}{4} + 2\mathrm{i}T$, $\frac{5}{4} + \mathrm{i}T$ 的长方形. $\mathcal{R}$ 左边界上的积分等于

$$\mathrm{i}\int_T^{2T} Z(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

估计其余三边上的积分即得其上界估计.

由 §3.4 中的上界估计

$$\chi(s)^{-1} \ll \tau^{\sigma-\frac{1}{2}}, \qquad \zeta(s) \ll_\varepsilon \tau^{(1-\sigma)/2+\varepsilon} \qquad (0 \leqslant \sigma \leqslant 1)$$

立即推出

$$\chi(s)^{-\frac{1}{2}}\zeta(s) \ll_\varepsilon \begin{cases} \tau^{(1/4)+\varepsilon}, & \text{若 } \frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1, \\ \tau^{(3/8)+\varepsilon}, & \text{若 } 1 \leqslant \sigma \leqslant \frac{5}{4}. \end{cases}$$

$\mathcal{R}$ 的水平线段上的积分于是 $\ll T^{(3/8)+\varepsilon}$.

为估计竖直线段 $[\frac{5}{4}+\mathrm{i}T, \frac{5}{4}+2\mathrm{i}T]$ 上积分的贡献, 用形如推论 0.13 的复 Stirling 公式来估计, 得到

$$\mathrm{i}\int_T^{2T} \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{(3/8)+\mathrm{i}\tau} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau/2-\mathrm{i}\pi/8}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\tau}\Big)\Big\}\zeta(\tfrac{5}{4}+\mathrm{i}\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

余项可显然地估计, 其值 $\ll T^{3/8}$. 将用级数来替换 $\zeta\left(\frac{5}{4}+\mathrm{i}\tau\right)$ 并交换和号, 可知其主项等于

$$\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/8}\sum_{n\geqslant 1} n^{-5/4}\int_T^{2T}\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{3/8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}F_n(\tau)}\,\mathrm{d}\tau, \tag{4.29}$$

其中 $F_n(\tau) := \tau\left(\ln(\tau/2\pi)-\frac{1}{2}+\ln n\right)$. 易知

$$F_n''(\tau) \asymp T^{-1} \qquad (T \leqslant \tau \leqslant 2T),$$

从而由第一部分定理 6.3, 有

$$\int_T^{\tau} \mathrm{e}^{\mathrm{i}F_n(t)}\,\mathrm{d}t \ll T^{1/2} \qquad (T \leqslant \tau \leqslant 2T).$$

应用分部积分可由前述推知 (4.29) $\ll T^{7/8}$, 最终得

$$\int_T^{2T} Z(\tau)\,\mathrm{d}\tau \ll_\varepsilon T^{7/8} \tag{4.30}$$

现在估计 (4.28) 右边. 有

$$\int_T^{2T} |Z(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = \int_T^{2T}\left|\zeta(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}\tau)\right|\mathrm{d}\tau \geqslant \left|\int_T^{2T}\zeta(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|.$$

由留数定理得

$$\mathrm{i}\int_T^{2T}\zeta(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathcal{G}}\zeta(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\mathcal{G}$ 是连接 $\frac{1}{2}+\mathrm{i}T$, $2+\mathrm{i}T$, $2+2\mathrm{i}T$, $\frac{1}{2}+2\mathrm{i}T$ 的折线. 由于在 $\mathcal{G}$ 上 $\zeta(s) \ll_\varepsilon T^{(1/4)+\varepsilon}$, 水平线段上积分的贡献 $\ll_\varepsilon T^{(1/4)+\varepsilon}$. 而竖直部分的贡献则为

$$\mathrm{i}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}\int_T^{2T} n^{-\mathrm{i}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{i}\Big\{T+O\Big(\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2\ln n}\Big)\Big\},$$

于是有

$$\int_T^{2T} |Z(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \gg T,$$

(4.28) 得证.

由前述推理一个显然的改动可得到形如

$$N_0(T) \gg T^{(1/4)-\varepsilon}$$

的下界估计, 见 Blanchard (1969, IV.6).

目前由推广 Levinson 的工作 (见 (4.13)) 可得到的最好常数是 Conrey (1989) 的结果, 它超过了 2/5.

用与定理 4.9 类似的思想, Pintz (1984) 建立了余项 $R(x) = \psi(x) - x$ 的大小与 $\zeta(s)$ 零点分布之间具体的联系 : 有

$$\ln\{x/R(x)\} \sim \min_{\varrho}\{(1-\beta)\ln x + \ln|\gamma|\} \qquad (x \to \infty).$$

§4.4 显式公式的另证可见 Ellison 和 Mendès France (1975) §5.5 或 Titchmarsh (1951) 著作第十四章, 抑或 Ivić (1985) 第十二章.

Ingham (1990) 证明了用 $R(x,T)$ 估计的一个轻微改动可得 (4.20) 式对 $1 < x < 2$ 成立. 他还给出了 $0 < x < 1$ 上的一个变体.

习题

194. 设 k 是 $\geqslant 1$ 的整数.

(a) 证明由等式

$$1 + \sum_{\nu \geqslant 1} h_\nu z^\nu = (1-z)^k \Big(1 + \frac{kz}{1-z}\Big)$$

定义的复数 h_ν 满足形如 $|h_\nu| \leqslant C(k) \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$ 的上界估计.

(b) 证明 $\sum_{n \geqslant 1} k^{\omega(n)}/n^s = H_k(s)\zeta(s)^k$, 其中 $H_k(s)$ 是在 $\sigma > \frac{1}{2}$ 上绝对收敛的 Dirichlet 级数.

(c) 由上题推出关系

$$\sum_{n \leqslant x} k^{\omega(n)} = xP_{k-1}(\ln x) + O_\varepsilon(x^{1-\delta_k+\varepsilon}),$$

其中 P_{k-1} 是 $k-1$ 次多项式, δ_k 是 >0 的常数. 确定 P_{k-1} 的首项系数及 δ_k 的值.

(d) 在 Riemann 假设下计算 δ_k.

195. Bateman (1972) 定理.

令 φ 为 Euler 示性函数.

(a) 证明对任意整数 $n \geqslant 1$, $a_n := \left|\{m : m \geqslant 1, \varphi(m) = n\}\right|$ 有限.

(b) 对 $\sigma > 1$, 令 $G(s) := \prod_p (1 + (p-1)^{-s} - p^{-s})$. 证明

$$\sum_{n \geqslant 1} a_n/n^s = \zeta(s)G(s) \quad (\sigma > 1).$$

(c) 证明定义 $G(s)$ 的无穷乘积在 $\sigma > 0$ 上收敛.

(d) 证明 $|(p-1)^{-s} - p^{-s}| \leqslant \min\left(2(p-1)^{-\sigma}, |s|(p-1)^{-\sigma-1}\right) \quad (\sigma > 0)$ 并推出存在绝对常数 A 使得

$$G(s) \ll (\ln|\tau|)^A, \qquad (|\tau| \geqslant 2, \sigma \geqslant 1 - 1/\ln 2|\tau|).$$

(e) 令 $\Phi(x) := \left|\{m : m \geqslant 1, \varphi(m) \leqslant x\}\right|$. 证明 $\Phi(x)$ 是 a_n 的和函数并证明估计

$$\int_0^x \Phi(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\alpha x^2 + O\left(x^2 \mathrm{e}^{-c_0\sqrt{\ln x}}\right) \qquad (x \to \infty),$$

其中 $\alpha := G(1) = \zeta(2)\zeta(3)/\zeta(6)$.

(f) 用与 (4.10) 证明类似的推理, 利用 Φ 的单调增性证明

$$\Phi(x) = \alpha x + O\left(x \mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln x}}\right).$$

(g) 证明 $a_n \ll n\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln n}} \quad (n \geqslant 1)$.

196. 证明从 Riemann 假设可推出级数 $\sum \mu(n)/n^s$ 对所有半平面 $\sigma > \frac{1}{2}$ 中的 s 收敛. [提示: 用定理 4.2 及 Schnee-Landau 定理 2.8].

197. 通过显式公式证明素数定理. 证明存在适当的正常数 c_1, 使得

$$\sum_{|\gamma| \leqslant T} \left|\frac{x^{\varrho}}{\varrho}\right| \ll (\ln T)^2 x^{1-c_1/\ln T} \qquad (x \geqslant 2, T \geqslant 2),$$

并得出素数定理的一个新证明.

198. 令 $\tau(n,\vartheta) := \sum_{d|n} d^{\mathrm{i}\vartheta}$. 用 Ramanujan 恒等式 (3.26) 证明对 $x \geqslant 2$, $|\vartheta| \leqslant 1$, $\vartheta \neq 0$ 一致地有

$$\sum_{n \leqslant x} |\tau(n,\vartheta)|^2 = \frac{6x}{\pi^2}\left\{|\zeta(1+\mathrm{i}\vartheta)|^2 \ln x + O(1/|\vartheta|^3)\right\}.$$

199. 考虑数论函数

$$T(n) := \left|\left\{(d, d') : d \mid n, d' \mid n, |\ln(d'/d)| \leqslant 1\right\}\right|.$$

用权函数 $w(t) := \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\Big)^2$ 及其 Fourier 变换 $\widehat{w}(\vartheta) = (1 - |\vartheta|)^+$ 证明

$$w(1)\int_{-1}^{1} |\tau(n,\vartheta)|^2 \,\mathrm{d}\vartheta \leqslant T(n) \leqslant \frac{1}{2\pi w(1)}\int_{-1}^{1} |\tau(n,\vartheta)|^2 \,\mathrm{d}\vartheta.$$

并利用习题 198 的结论推出

$$\sum_{n\leqslant x} T(n) \asymp x(\ln x)^2.$$

第五章 Selberg-Delange 方法

§5.1 $\zeta(s)$ 的复次幂

通过 Riemann ζ-函数的解析性质的研究可以估计容易用 $\zeta(s)$ 表示的那些 Dirichlet 级数所对应的数论函数的和函数. 比如渐近公式

$$\psi(x) := \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n) = x + O(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln x}}),$$
$$M(x) := \sum_{n\leqslant x}\mu(n) = O(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln x}}),$$
$$T_k(x) := \sum_{n\leqslant x}\tau_k(n) = xP_{k-1}(\ln x) + O_k(x^{1-\delta_k})$$

(其中 P_{k-1} 是 $k-1$ 次多项式, δ_k 是正常数) 是第三章中得到的 $\zeta(s)$ 简单性质的推论, 即将 Perron 公式分别应用于亚纯函数

$$-\zeta'(s)/\zeta(s), \quad 1/\zeta(s), \quad \zeta(s)^k$$

而得的.

本章中将研究该方法的一个双重推广. 一方面希望处理 Dirichlet 级数含有非极点奇点的情形, 另一方面则寻求一种稳定性的概念, 亦即当 Dirichlet 级数之比足够正则时得到的渐近估计的形态所具有的不变性. 在此指导思想下, 考虑 Dirichlet 级数在 $\sigma > 1$ 上表达式形如

$$F(s) = G(s;z)\zeta(s)^z \qquad (z\in\mathbb{C}) \tag{5.1}$$

的情形, 其中 $G(s;z)$ 应满足一些条件, 将在后文中提及.

这套理论本质上属于 Selberg (1954) 及 Delange (1959, 1971). 在展开讨论之前, 先看当 z 是固定的复数时 $\zeta(s)^z$ 的解析性质.

定义广义二项式系数

$$\binom{w}{\nu} := \frac{1}{\nu!}\prod_{0\leqslant j<\nu}(w-j) \qquad (w\in\mathbb{C},\ \nu\in\mathbb{N}).$$

对 $|\xi|<1$, $z\in\mathbb{C}$, 有

$$(1-\xi)^{-z}=\sum_{\nu\geqslant 0}\binom{z+\nu-1}{\nu}\xi^{\nu}.$$

当 z 是负整数时, 该式即是经典的二项式公式. 对 $\sigma>1$, 有

$$\zeta(s)^z=\prod_p(1-p^{-s})^{-z}=\prod_p\left\{1+\sum_{\nu\geqslant 1}\binom{z+\nu-1}{\nu}p^{-\nu s}\right\}, \tag{5.2}$$

其中无穷乘积绝对收敛. 由定理 1.3 知在半平面 $\sigma>1$ 中 $\zeta(s)^z$ 可表示为某乘性函数的 Dirichlet 级数. 记该乘性函数为 $\tau_z(n)$, 其定义为

$$\tau_z(p^{\nu}) := \binom{z+\nu-1}{\nu}. \tag{5.3}$$

该定义推广了函数 $\tau_k(n)$ (对应于 $z=k$ 是正整数的情形). 在此情形下, τ_k 是 1 的卷积 k 次幂. 从组合上说 $\tau_k(n)$ 是将 n 分解成 k 个因子之积的方法数:

$$\tau_k(n)=\sum_{d_1d_2\cdots d_k=n}1. \tag{5.4}$$

注意到 $\tau_2=\tau$.

后文中将见到函数

$$Z(s;z) := \{(s-1)\zeta(s)\}^z/s \tag{5.5}$$

具有特殊作用. 它在 $\mathbb{C}^*$ 与任何不含 $\zeta(s)$ 零点的单连通区域之交上有定义. 本书中总假设该区域包含 $[1,+\infty[$. 于是可选择 $\log\{(s-1)\zeta(s)\}$ 的全纯分支, 使得

$$Z(1;z)=1.$$

定理 5.1 函数 $Z(s;z)$ 在圆盘 $|s-1|<1$ 上全纯, 具有 Taylor 展式

$$Z(s;z)=\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{j!}\gamma_j(z)(s-1)^j, \tag{5.6}$$

其中 $\gamma_j(z)$ 是 z 的整函数, 对任意 $A>0$, $\varepsilon>0$ 满足上界估计

$$\frac{1}{j!}\gamma_j(z)\ll_{A,\varepsilon}(1+\varepsilon)^j \qquad (|z|\leqslant A). \tag{5.7}$$

证明 由 Cauchy 公式

$$\frac{1}{j!}\gamma_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|s-1|=r} \frac{Z(s;z)}{(s-1)^{j+1}}\,ds,$$

题设的所有结论由 $\zeta(s)$ 在 $|s-1|<1$ 上非零的事实立得. 事实上, 众所周知半平面 $\tau \geqslant 0$ 中模长最小的非显然零点是

$$\varrho = \tfrac{1}{2} + i\,14.13472\ldots,$$

见 Titchmarsh (1951) 第十五章. 出于完整性的考虑, 给出在 $|s-1|<1$ 上 $\zeta(s)\neq 0$ 的一个简短的证明. 由分部积分和 (3.17) 推出

$$\zeta(s) = \frac{1.}{s-1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12}s - \tfrac{1}{2}s(s+1)\int_1^\infty \frac{B_2(t)}{t^{s+2}}\,dt.$$

倘若 $\zeta(s)$ 具有使得 $|\varrho-1|<1$ 的零点 $\varrho=\beta+i\gamma$, 由对称性不妨设 $\beta\geqslant\frac{1}{2}$. 考虑到 $|B_2(t)|\leqslant B_2=\frac{1}{6}$ 的事实, 若在上式中令 $s=\varrho$, 得

$$1+\tfrac{1}{2}(\varrho-1)\left\{1+\tfrac{1}{6}\varrho-\tfrac{1}{6}\vartheta\varrho(\varrho+1)\int_1^\infty\frac{dt}{t^{5/2}}\right\}=0,$$

其中 $|\vartheta|\leqslant 1$. 从而

$$1\leqslant \tfrac{1}{2}|\varrho-1|\left\{1+\tfrac{1}{6}|\varrho|+\tfrac{1}{9}|\varrho(\varrho+1)|\right\}<\tfrac{1}{2}\left\{1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\right\}=1,$$

矛盾! □

由定理 3.21, 存在正绝对常数 c, 使得 $\zeta(s)$ 在不等式

$$\sigma \geqslant 1 - c/(1+\ln^+|\tau|) \tag{5.8}$$

定义的区域中非零. 直至本章末, 用 $\mathcal{D}$ 表示 (5.8) 中定义的区域除去实线段 $[1-c,1]$ 后得到的单连通区域. 其上有解析延拓

$$\zeta(s)^z = sZ(s;z)(s-1)^{-z} \qquad (s\in\mathcal{D}). \tag{5.9}$$

此外定理 3.22 的上界估计 $|\log\zeta(s)|\leqslant \ln_2|\tau|+O(1)$ 说明, 对任意常数 $A>0$, 有

$$\zeta(s)^z \ll_A \{1+\ln^+|\tau|\}^A \qquad (|z|\leqslant A,\ s\in\mathcal{D},\ |s-1|\gg 1). \tag{5.10}$$

§5.2 主要结论

现在可证明主要定理, 它对足够接近于 $\zeta(s)$ 复次幂的 Dirichlet 级数给出了系数和函数的估计, 这与素数定理相当.

此结果的诸多应用, 以及其表述的一致性, 说明了在其中出现较多的参数应不足为奇. 为明确起见, 引进如下记号.

设 $z \in \mathbb{C}$, $c_0 > 0$, $0 < \delta \leqslant 1$, $M > 1$, $F(s)$ 是 Dirichlet 级数. 若 Dirichlet 级数

$$G(s;z) := F(s)\zeta(s)^{-z}$$

在 $\sigma \geqslant 1 - c_0/(1 + \ln^+ |\tau|)$ 上可延拓为全纯函数且在其上满足上界估计

$$|G(s;z)| \leqslant M(1 + |\tau|)^{1-\delta}, \tag{5.11}$$

则称级数 $F(s)$ 具有性质 $\mathcal{P}(z; c_0, \delta, M)$.

若 $F(s)$ 具有性质 $\mathcal{P}(z; c_0, \delta, M)$, 且存在非负实数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $|a_n| \leqslant b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ 且使得级数

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{b_n}{n^s}$$

对某个复数 w 满足 $\mathcal{P}(w; c_0, \delta, M)$, 则称 $F(s)$ 是 $\mathcal{T}(z, w; c_0, \delta, M)$ 型的. 以下应注意到若非负系数级数具有性质 $\mathcal{P}(z; c_0, \delta, M)$, 那么它显然是 $\mathcal{T}(z, z; c_0, \delta, M)$ 型的.

在 $G(s;z)$ 的全纯区域中令

$$G^{(k)}(s;z) := \frac{\partial^k}{\partial s^k} G(s;z) \tag{5.12}$$

及

$$\lambda_k(z) := \frac{1}{\Gamma(z-k)} \sum_{h+j=k} \frac{1}{h!j!} G^{(h)}(1;z)\gamma_j(z), \tag{5.13}$$

其中 $\gamma_j(z)$ 是定理 5.1 中出现的整函数. 若用原点处的 Taylor 展式

$$\frac{s^z F(s+1)}{s+1} = \sum_{k \geqslant 0} \mu_k(z) s^k \qquad (|s| < \min(1, c_0)) \tag{5.14}$$

来定义序列 $\{\mu_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, 便得

$$\lambda_k(z) = \frac{\mu_k(z)}{\Gamma(z-k)} \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{5.15}$$

为简洁计, 以下对 $x > 1$, $a > 0$, $b > 0$, 令

$$R_N(x;a,b) := \mathrm{e}^{-a\sqrt{\ln x}} + \left(\frac{bN+1}{\ln x}\right)^{N+1} \tag{5.16}$$

定理 5.2 设 $F(s) := \sum_{n\geqslant 1} a_n/n^s$ 是 $\mathcal{T}(z,w;c_0,\delta,M)$ 型 Dirichlet 级数. 对 $x\geqslant 3$, $N\geqslant 0$, $A>0$, $|z|\leqslant A$, $|w|\leqslant A$ 有

$$\sum_{n\leqslant x} a_n = x(\ln x)^{z-1}\bigg\{\sum_{0\leqslant k\leqslant N}\frac{\lambda_k(z)}{(\ln x)^k}+O\big(MR_N(x)\big)\bigg\}, \tag{5.17}$$

其中 $R_N(x) := R_N(x;c_1,c_2)$. 正常数 c_1, c_2 以及 Landau 记号中的隐含常数至多依赖于 c_0, δ 和 A.

在下一章 (§6.2) 中将看到如何利用 (5.17) 中对 M 的一致性. 对 N 的一致性同样重要. 比如考虑 $z\in\mathbb{Z}$ 的情形. (5.15) 推出当 $k\geqslant z$ 时 $\lambda_k(z)=0$. 选取 N 极小化 (5.17) 的余项. 对于 $N := \lfloor(\ln x)/\mathrm{e}c_2\rfloor$ 可得

$$\sum_{n\leqslant x} a_n = x(\ln x)^{z-1}\Big\{P\Big(\frac{1}{\ln x}\Big)+O\big(M\mathrm{e}^{-c_1\sqrt{\ln x}}\big)\Big\},$$

其中 P 是至多 $z-1$ 次多项式.

习题 195 (第 250 页) 中直接研究了一例这类情形. 其结论对应于定理 5.2 的一个显然推论. 对 $a_n := \big|\{m\geqslant 1 : \varphi(m)=n\}\big|$ 的选择有

$$F(s)=\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{\varphi(m)^s}=\zeta(s)G(s),$$

其中

$$G(s)=\prod_p\Big(1+\frac{1}{(p-1)^s}-\frac{1}{p^s}\Big)\qquad(\sigma>0).$$

容易证明的上界估计

$$G(s)\ll(\ln|\tau|)^{O(1)}\qquad(|\tau|\geqslant\tau_0,\ \sigma\geqslant 1-1/\ln|\tau|)$$

说明了对任意固定的 $\delta<1$, $F(s)$ 是 $\mathcal{T}(1,1;1,\delta,M(\delta))$ 型的, 其中 $M(\delta)$ 只依赖于 δ. 由于

$$\lambda_0(1)=G(1)=\zeta(2)\zeta(3)/\zeta(6)\approx 1.943\,6$$

是 $\lambda_k(1)$ 中唯一非零的数, 命题得证.

定理 5.3 (Bateman, 1972) 存在正常数 c 使得对 $x\geqslant 1$, 有

$$\big|\{n\geqslant 1 : \varphi(n)\leqslant x\}\big| = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x+O\big(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln x}}\big). \tag{5.18}$$

注意到将 $\varphi(n)$ 换成 $\sigma(n)$, 或更一般地, 换成任意使得

$$f(p^\nu)=p^\nu+O(p^{\nu-\delta})\qquad(\nu\geqslant 1)$$

的正值乘性函数 $(\delta>0)$ 时, 由定理 5.2 可得出类似的结论.

§5.3 定理 5.2 的证明

设 c 是正常数, 使得 $c < c_0$ 且使得 $\zeta(s)$ 在区域

$$\sigma \geqslant 1 - c/(1 + \ln^+ |\tau|)$$

内无零点. 那么 $F(s)$ 在 §5.1 中定义的区域 $\mathcal{D}$ 内全纯. 且由 (5.10) 和 (5.11) 知对 $s \in \mathcal{D}$, $|s-1| \gg 1$, $|z| \leqslant A$ 一致地有

$$F(s) \ll_A M(1 + \ln^+ |\tau|)^A (1 + |\tau|)^{1-\delta} \ll_{A,\delta} M(1 + |\tau|)^{1-\delta/2}. \tag{5.19}$$

令 $A(x) := \sum_{n \leqslant x} a_n$. 由 Perron 公式 (2.10), 有

$$\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa - \mathrm{i}\infty}^{\kappa + \mathrm{i}\infty} F(s) x^{s+1} \frac{\mathrm{d}s}{s(s+1)},$$

其中 $\kappa = 1 + 1/\ln x$. 令 $T > 1$ 为参数, 以后再确定其值. 由留数定理, 可将积分线段 $[\kappa - \mathrm{i}T, \kappa + \mathrm{i}T]$ 换成中连接其两端点的任意路径. 这里选择对于实轴对称的路径, 其上部包括由包围 $s = 1$ 半径为 $r = 1/(2\ln x)$ 的圆与连接 $1 - r$ 和 $1 - \frac{1}{2}c$ 的线段组成截断的 Hankel 围道, 以及 $0 \leqslant \tau \leqslant T$ 上的曲线

$$\sigma = \sigma(\tau) := 1 - \tfrac{1}{2}c/(1 + \ln^+ \tau)$$

加上水平线段 $[\sigma(T) + \mathrm{i}T, \kappa + \mathrm{i}T]$ 组成 (如图 II–3).

将看到截断的 Hankel 围道 Γ 上的积分具有主要贡献.

利用 (5.19) 立知竖直射线 $[\kappa \pm \mathrm{i}T, \kappa \pm \mathrm{i}\infty[$ 上的贡献 $\ll_{A,\delta} Mx^2 T^{-\delta/2}$.

同样的上界估计对水平线段 $[\sigma(T) \pm \mathrm{i}T, \kappa \pm \mathrm{i}T]$ 上的贡献亦有效. 最后, 曲线 $\sigma = \sigma(\tau)$ 上的贡献

$$\ll_{A,\delta} Mx^{1+\sigma(T)} \int_0^T (1 + \tau)^{-1-\delta/2}\,\mathrm{d}\tau \ll_{A,\delta} Mx^{1+\sigma(T)}.$$

选取 $T = \exp\sqrt{(c/\delta)\ln x}$, 对 $x \geqslant x_0$, 得

$$\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(x) + O(Mx^2 \mathrm{e}^{-c_3\sqrt{\ln x}}), \tag{5.20}$$

其中

$$\Phi(x) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma F(s) x^{s+1} \frac{\mathrm{d}s}{s(s+1)}. \tag{5.21}$$

这里及证明剩下的部分中约定无论是具体或隐含的常数均至多依赖于 c_0, δ 及 A.

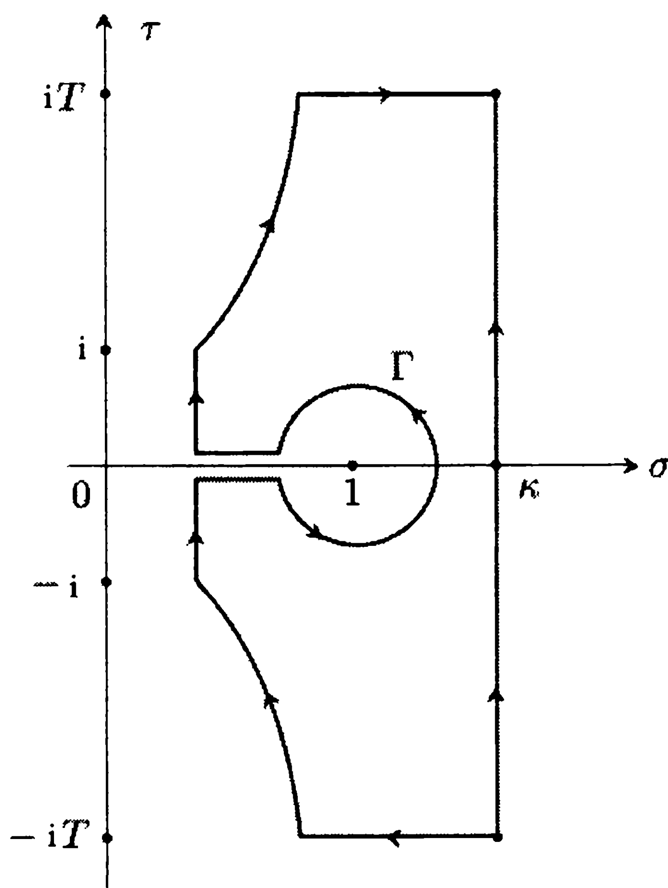


图 II–3 $F(s)=\zeta(s)^zG(s;z)$ 的积分路径

以下只须研究 (5.20) 的主项 $\Phi(x)$. 显然它是 $\mathbb{R}^+$ 上关于 x 的无穷阶可微函数, 特别地, 有

$$\Phi'(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma F(s)x^s\,\frac{\mathrm{d}s}{s},\qquad \Phi''(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma F(s)x^{s-1}\,\mathrm{d}s.$$

对 $s\in\mathcal{D}$, 有

$$F(s)=sG(s;z)Z(s;z)(s-1)^{-z}, \tag{5.22}$$

从而由 (5.6), (5.7) 及 (5.11), 得

$$F(s)\ll M|s-1|^{-A}\qquad (s\in\Gamma).$$

由 $r=1/(2\ln x)$ 得

$$\Phi''(x)\ll M(\ln x)^A. \tag{5.23}$$

当 $s\in\Gamma$ 时, 由 (5.14) 知

$$G(s;z)Z(s;z)=\frac{(s-1)^zF(s)}{s}=\sum_{k\geqslant 0}\mu_k(z)(s-1)^k,$$

其中

$$\mu_k(z):=\frac{1}{k!}\sum_{h+j=k}\binom{k}{j}G^{(h)}(1;z)\gamma_j(z)=\Gamma(z-k)\lambda_k(z)\qquad (k\in\mathbb{N}).$$

另外, 由于 $G(s;z)Z(s;z)$ 全纯且在圆盘 $|s-1|\leqslant c$ 中为 $O(M)$, Cauchy 公式推出

$$\mu_k(z)\ll Mc^{-k}\qquad(k\geqslant 0).\tag{5.24}$$

注意到 Γ 包含于圆盘 $|s-1|\leqslant\frac{1}{2}c$ 中, 对于 $s\in\Gamma$, $N\geqslant 0$ 有

$$G(s;z)Z(s;z)=\sum_{0\leqslant k\leqslant N}\mu_k(z)(s-1)^k+O\big(M(|s-1|/c)^{N+1}\big).$$

从而

$$\Phi'(x)=\sum_{0\leqslant k\leqslant N}\mu_k(z)\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma x^s(s-1)^{k-z}\,\mathrm{d}s+O(Mc^{-N}R(x)),\tag{5.25}$$

其中

$$\begin{aligned}R(x)&:=\int_\Gamma\big|x^s(s-1)^{N+1-z}\big|\,|\mathrm{d}s|\\&\ll\int_{1-c/2}^{1-r}(1-\sigma)^{N+1-\Re e\,z}x^\sigma\,\mathrm{d}\sigma+x^{1+r}r^{N+2-\Re e\,z}\\&\ll x(\ln x)^{\Re e\,z-N-2}\Big\{\int_{\frac12}^{+\infty}t^{N+1-\Re e\,z}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t+2^{-N}\Big\}\\&\ll x(\ln x)^{\Re e\,z-N-2}\Gamma(N+A+2)\ll x(\ln x)^{z-1}\Big(\frac{c_4N+1}{\ln x}\Big)^{N+1}\end{aligned}$$

换元 $w=(s-1)\ln x$, 依推论 0.18 的记号, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma x^s(s-1)^{k-z}\,\mathrm{d}s&=\frac{x}{2\pi i}(\ln x)^{z-1-k}\int_{\mathcal{H}(\frac12 c\ln x)}w^{k-z}\mathrm{e}^w\,\mathrm{d}w\\&=x(\ln x)^{z-1-k}\Big\{\frac{1}{\Gamma(z-k)}+O\big((c_5k+1)^kx^{-c/4}\big)\Big\}.\end{aligned}$$

(5.25) 的主项于是等于

$$x(\ln x)^{z-1}\Big\{\sum_{0\leqslant k\leqslant N}\frac{\lambda_k(z)}{(\ln x)^k}+O(E_N)\Big\},$$

其中

$$\begin{aligned}E_N&:=\frac{1}{x^{c/4}}\sum_{0\leqslant k\leqslant N}|\mu_k(z)|\Big(\frac{c_5k+1}{\ln x}\Big)^k\ll\frac{M}{x^{c/4}}c_6^N\sum_{0\leqslant k\leqslant N}k!\Big(\frac{5}{c\ln x}\Big)^k\\&\leqslant\frac{M}{x^{c/4}}\Big(\frac{5c_6}{c\ln x}\Big)^N\sum_{0\leqslant k\leqslant N}\frac{N!}{(N-k)!}\Big(\frac{c\ln x}{5}\Big)^{N-k}\\&\leqslant\frac{M}{x^{c/20}}N!\Big(\frac{5c_6}{c\ln x}\Big)^N\leqslant M\Big(\frac{c_7N+1}{\ln x}\Big)^{N+1}.\end{aligned}$$

代入 (5.25), 得

$$\Phi'(x) = x(\ln x)^{z-1}\Big\{\sum_{0\leqslant k\leqslant N}\frac{\lambda_k(z)}{(\ln x)^k} + O\Big(M\Big(\frac{c_8 N+1}{\ln x}\Big)^{N+1}\Big)\Big\}. \tag{5.26}$$

将用 (5.20) 及 (5.23) 证明 $\Phi'(x)$ 是 $A(x)$ 恰当的逼近. 为此引进参数 h, $0<h<\frac{1}{2}x$, 并应用 (5.20) 于 x 及 $x+h$, 得

$$\int_x^{x+h} A(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(x+h)-\Phi(x)+O\big(Mx^2\mathrm{e}^{-c_3\sqrt{\ln x}}\big). \tag{5.27}$$

而由 (5.23) 推出

$$\begin{aligned}\Phi(x+h)-\Phi(x) &= h\Phi'(x)+h^2\int_0^1(1-t)\Phi''(x+th)\,\mathrm{d}t\\ &= h\Phi'(x)+O(Mh^2(\ln x)^A).\end{aligned} \tag{5.28}$$

于是有

$$A(x)=\Phi'(x)+O\Big(\frac{Mx^2}{h}\mathrm{e}^{-c_3\sqrt{\ln x}}+Mh(\ln x)^A+\frac{L}{h}\Big), \tag{5.29}$$

其中

$$L := \int_x^{x+h}|A(t)-A(x)|\,\mathrm{d}t.$$

证明的现阶段要用到 b_n 对应的级数具有性质 $\mathcal{P}(w;c_0,\delta,M)$ 的假设. 令 $B(t):=\sum_{n\leqslant t}b_n$, 有

$$L\leqslant\int_x^{x+h}(B(t)-B(x))\,\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{x+h}B(t)\,\mathrm{d}t-\int_{x-h}^{x}B(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.30}$$

而对序列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的假设推出存在无穷阶可微的函数 Φ_1 满足 (5.28) 并使得将 $A(t)$ 换成 $B(t)$ 及将 Φ 换成 Φ_1 后 (5.27) 仍成立. 由 (5.30), 这推出

$$L\ll Mx^2\mathrm{e}^{-c_9\sqrt{\ln x}}+Mh^2(\ln x)^A.$$

也就是说, 适当改变 c_3 的值后可在 (5.29) 的余项中删去 L/h 那一项. 选取 $h:=x\exp\{-(c_3/2)\sqrt{\ln x}\}$, 得

$$A(x)=\Phi'(x)+O(Mx\mathrm{e}^{-c_{10}\sqrt{\ln x}}). \tag{5.31}$$

联合 (5.26) 及 (5.31) 便得定理 5.2 的结论.

§5.4 主要定理的一个变体

现在将证明与定理 5.2 同类的一个结论, 其中将级数

$$G(s;z) := \zeta(s)^{-z}F(s) =: \sum_{n\geqslant 1}\frac{g_z(n)}{n^s} \tag{5.32}$$

解析延拓的假设换成关于其在 $s=1$ 处导数 (可以是分数次) 的收敛性. 以下还沿用 (5.16) 的记号.

定理 5.4 设 $F(s) := \sum_{n\geqslant 1} a_n/n^s$ 是在 $\sigma > 1$ 上收敛的 Dirichlet 级数. 假设存在复数 z 及整数 $N \geqslant 0$, 使得

$$H_N(z) := \sum_{n\geqslant 1} |g_z(n)|\frac{(\ln 3n)^{N+1+w}}{n} < \infty, \tag{5.33}$$

其中 $w := \max\{1-\Re e\, z, 0\}$, 那么对 $|z| \leqslant A$ 有

$$\sum_{n\leqslant x} a_n = x(\ln x)^{z-1}\Big\{\sum_{0\leqslant k\leqslant N}\frac{\lambda_k(z)}{(\ln x)^k} + O_A\big(H_N(z)R_N(x)\big)\Big\}, \tag{5.34}$$

其中 $R_N(x) := R_N(x;c_1,c_2)$, c_1, c_2 是至多依赖于 A 的正常数; 对 $0 \leqslant k \leqslant N$, $\lambda_k(z)$ 的定义见 (5.13).

注 特别地, 若 Dirichlet 级数 $G(s;z)$ 的不超过 $N+1+\lceil w\rceil$ 阶导数在 $s=1$ 处绝对收敛, 那么条件 (5.33) 成立.

证明 首先, 上界估计

$$|\tau_z(n)| \leqslant \tau_{|z|}(n) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

保证了对某正绝对常数 c_0, $\zeta(s)^z$ 是 $\mathcal{T}(z,|z|;c_0,1,1)$ 型的, 故可应用定理 5.2 于级数 $\zeta(s)^z$. 令

$$T_z(x) := \sum_{n\leqslant x}\tau_z(n), \tag{5.35}$$

得

$$T_z(x) := x(\ln x)^{z-1}\Big\{\sum_{0\leqslant k\leqslant N}\frac{\gamma_k(z)}{k!\Gamma(z-k)(\ln x)^k} + O_A(R_N(x;c_3,c_4))\Big\}, \tag{5.36}$$

其中 $\gamma_k(z)$ 是定理 5.1 中的整函数, c_3, c_4 是仅依赖于 A 的常数.

现在由卷积关系 $a_n = \tau_z * g_z(n)$ $(n=1,2,\ldots)$ 得

$$A(x) = \sum_{mn\leqslant x}\tau_z(m)g_z(n) = \sum_{n\leqslant x} g_z(n)T_z(x/n).$$

由于对 $1 \leqslant x < 2$ 有 $T_z(x) = 1$, 得

$$A(x) = \sum_{n \leqslant x/2} g_z(n) T_z(x/n) + \sum_{x/2 < n \leqslant x} g_z(n). \tag{5.37}$$

用 (5.36) 来估计 $T_z(x/n)$ 便得到题设结论. 将多次用到以下对所有 $y \geqslant 1$ 及 $0 \leqslant h \leqslant N+1+w$ 成立的估计

$$\sum_{n \geqslant y} \frac{|g_z(n)|(\ln n)^h}{n} \leqslant \frac{H_N(z)}{(\ln 3y)^{N+1+w-h}}. \tag{5.38}$$

这由 $H_N(z)$ 的定义及显然的上界估计

$$(\ln n)^h \leqslant \left(\frac{\ln 3n}{\ln 3y}\right)^{N+1+w} (\ln 3y)^h \qquad (n \geqslant y)$$

立得.

对 $h = 0$, $y = x/2$ 应用估计 (5.38), 推出

$$\left|\sum_{x/2 < n \leqslant x} g_z(n)\right| \leqslant x \sum_{n > x/2} \frac{|g_z(n)|}{n} \leqslant \frac{H_N(z) x}{(\ln x)^{N+1+w}}.$$

另外, $N = 0$ 时的 (5.36) 给出

$$T_z(x) \ll_A x(\ln x)^{z-1} \qquad (x \geqslant 2),$$

从而对 $x \geqslant 4$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{x} < n \leqslant x/2} g_z(n) T_z\left(\frac{x}{n}\right) &\ll_A x \sum_{\sqrt{x} < n \leqslant x/2} \frac{|g_z(n)|}{n} \left(\ln \frac{x}{n}\right)^{\Re e\, z - 1} \\ &\ll_A x(\ln x)^{z-1+w} \sum_{\sqrt{x} < n \leqslant x/2} \frac{|g_z(n)|}{n} \ll_A 2^N H_N(z) x (\ln x)^{z-N-2},\end{aligned}$$

其中最后一个上界估计源自 $h = 0$, $y = \sqrt{x}$ 时的 (5.38). 将这些估计代入 (5.37), 得

$$A(x) = \sum_{n \leqslant \sqrt{x}} g_z(n) T_z\left(\frac{x}{n}\right) + O_A(2^N H_N(z) x (\ln x)^{z-N-2}). \tag{5.39}$$

(5.36) 显然推出存在正常数 $c_5 = c_5(A)$ 及 $c_6 = c_6(A)$, 使得对 $n \leqslant \sqrt{x}$ 有

$$T_z\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n}\left\{\sum_{0 \leqslant k \leqslant N} \frac{\gamma_k(z)}{k!\Gamma(z-k)} \left(\ln \frac{x}{n}\right)^{z-k-1} + O_A\big(R_N(x; c_5, c_6)\big)\right\}. \tag{5.40}$$

在上式中将 $(\ln x - \ln n)^{z-k-1}$ 的项用广义二项式公式展开并代入 (5.39) 便得要求的 $A(x)$ 的估计.

对 $|\xi| \leqslant \frac{1}{2}, 0 \leqslant k \leqslant N$ 有

$$(1-\xi)^{z-k-1} = \sum_{0 \leqslant h \leqslant N-k} \binom{z-k-1}{h} (-\xi)^h + O_A\big(3^N |\xi|^{N-k+1}\big).$$

对半径为 2/3 的圆盘用 Cauchy 公式来上界估计二项式系数便立即得到上式, 细节略去. 选取 $\zeta = (\ln n)/\ln x$, 并用由 (5.7) 及 Γ-函数互补公式得出的上界估计

$$\frac{\gamma_k(z)}{k!\Gamma(z-k)} \ll_A (c_7 N+1)^N \qquad (|z| \leqslant A,\ 0 \leqslant k \leqslant N)$$

得 (5.40) 的主项可写成

$$\frac{x}{n}\bigg\{ \sum_{0 \leqslant m \leqslant N} (\ln x)^{z-m-1} \sum_{h+k=m} \frac{\gamma_k(z)}{k!\Gamma(z-k)} \binom{z-k-1}{k} (-\ln n)^h \\ + O\big((c_8 N+1)^N (\ln x)^{z-N-2} (\ln n)^{N+1}\big) \bigg\}$$

的形式. 注意到对 $h+k=m$ 有

$$\frac{1}{\Gamma(z-k)} \binom{z-k-1}{h} = \frac{1}{h!\Gamma(z-m)},$$

由 (5.40) 得

$$\sum_{n \leqslant \sqrt{x}} g_z(n) T_z\Big(\frac{x}{n}\Big) = x \bigg\{ \sum_{0 \leqslant m \leqslant N} \frac{(\ln x)^{z-m-1}}{\Gamma(z-m)} \sum_{k+h=m} \frac{\gamma_k(z)}{k!h!} \sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \frac{g_z(n)(-\ln n)^h}{n} \\ + O\big(H_N(z) R_N(x; c_5, c_9)\big) \bigg\}.$$

由 (5.38), 对每个 h, 内部对 n 的和式等于

$$G^{(h)}(1; z) + O_A\big(2^A H_N(z) (\ln z)^{h-N-1-w}\big).$$

上式的余项于是

$$\ll_A 2^N H_N(z) x (\ln x)^{z-N-w-2} \sum_{k+h \leqslant N} \frac{1}{h!|\Gamma(z-k-h)|} \Big(\frac{2}{\ln x}\Big)^k \\ \ll_A H_N(z) x (\ln x)^{z-1} \Big(\frac{c_{10} N+1}{\ln x}\Big)^{N+1}.$$

这样便证明了

$$\sum_{n \leqslant \sqrt{x}} g_z(n) T_z\Big(\frac{x}{n}\Big) = x (\ln x)^{z-1} \bigg\{ \sum_{0 \leqslant m \leqslant N} \frac{\lambda_m(z)}{(\ln x)^m} + O_A\big(H_N(z) R_N(x; c_5, c_{11})\big) \bigg\}.$$

由 (5.39), 定理得证. □

注记

§5.1 用复积分方法还可处理 Dirichlet 级数具有不同于形如本书中讨论的 $(s-1)^{-z}$ 的奇点的情形. Delange (1954) 给出了

$$(s-1)^{-\omega}\Big(\log\frac{1}{s-1}\Big)^k$$

型奇点的估计, 其中 $\omega\in\mathbb{R}$, k 是非负整数, 见定理 7.28. 在习题 210 中简述适用于形如

$$\mathrm{e}^{\lambda/(s-1)}$$

的奇点的估计. 在这两种情形下, 假设在奇点的邻域 (或除去某半直线后的邻域) 内可解析延拓是非常重要的.

除了在 $\gamma_0(z)\equiv 1$ 的情形下, 看起来难以给出 $\gamma_j(z)$ 简单的表达式. 由 $\zeta(s)$ 在 $\sigma>0$ 上的解析延拓

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-s\int_1^\infty\frac{\langle t\rangle}{t^{s+1}}\,\mathrm{d}t$$

即得对 $j\geqslant 1$ 有

$$\gamma_j(1)=(-1)^j\int_1^\infty\langle t\rangle(\ln t)^{j-1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

特别地, $\gamma_1(1)=\gamma-1$, 其中 γ 是 Euler 常数.

§5.3 Bateman 的 (5.18) 余项的精确形式是 $\ll x\exp\{-c_{12}\sqrt{\ln x\ln_2 x}\}$, 其中 c_{12} 是 $<\frac12\sqrt2$ 的任意常数. 在本章的方法中稍微改变积分围道后便可得到相同的结论. Balazard 和 Smati (1990) 证明了用初等方法亦可达到同样的目的. Balazard 和 Tenenbaum (1998) 用复分析方法证明了对适当的常数 $c>0$, 余项 $\ll x\exp\{-c(\ln x)^{3/5}/(\ln_2 x)^{1/5}\}$. 特别地, 这推出

$$a_n:=\big|\{m\,:\,\varphi(m)=n\}\big|\ll n\,\mathrm{e}^{-c(\ln n)^{3/5}/(\ln_2 n)^{1/5}}\qquad(n\geqslant 3).$$

Erdős 于 1935 年证明了存在 $\delta>0$ 使得 $a_n>n^\delta$ 对无穷多个整数 n 成立. 他猜想该结论对所有 $\delta<1$ 成立. 同样, 他还提出了 (5.18) 的余项对于适当的正常数 c 是

$$\Omega\big(x\mathrm{e}^{-c(\ln x)/\ln_2 x}\big)$$

的猜想.

§5.4 此处广泛地参考了 Delange (1971) 的证明, 并明确指出了余项如何依赖于 M 和 N.

倘若 Hankel 围道圆周半径趋于 0 时相应的圆周部分上的积分在 $\Phi'(x)$ 中的贡献也趋于 0, 那么 (5.31) 给出了 $A(x)$ 较简单的逼近. 比如在定理 5.2

的条件下假设 $\Re e\, z \leqslant 1-\varepsilon$, 便得到

$$A(x)=\int_0^{c_{13}} x^{1-t}\alpha(t;z)\frac{\mathrm{d}t}{t^z}+O\big(x\mathrm{e}^{-c_{14}\sqrt{\ln x}}\big),$$

其中 c_{13} 和 c_{14} 是仅依赖于 A 和 ε 的常数, $\alpha(t;z)$ 是 $[0,c_{13}]$ 上的连续函数, 其定义为

$$\alpha(t;z)=\frac{\sin\pi z}{\pi}Z(1-t;z)G(1-t;z).$$

注意到从 (5.17) 出发, 选取适当的 $N=N(x)\to\infty$, 利用 (其中$X:=c_{13}\ln x$)

$$\frac{1}{\Gamma(z-k)}=\frac{\sin\pi z}{\pi}(-1)^k\Gamma(k+1-z)=\frac{\sin\pi z}{\pi}(-1)^k\int_0^X \mathrm{e}^{-t}t^{k-z}\,\mathrm{d}t+\text{余项},$$

并在 (5.17) 中交换求和与积分亦可得到同样的结论.

习题

200. 令 $f(n)$ 为乘性函数, 满足 $f(p)=\alpha$, $f(p^\nu)\ll p^{\delta\nu}$ $(\nu\geqslant 2)$, 其中 $\delta<\frac{1}{2}$. 计算 $f(n)$ 的和函数.

201. 令 $g(n)$ 为将 n 分解成形如 $p-1$ (p 为素数) 的相异整数之积的方法数. 估计 $\sum_{n\leqslant x} g(n)$.

202. 对 $x\geqslant 2$, $1\leqslant q\leqslant x$ 一致地估计 $\displaystyle\sum_{n\leqslant x,\,(n,q)=1} 1/\tau(n)$.

203. 令 $\lambda>0$. 证明渐近估计

$$\sum_{n\leqslant x}(-1)^n\lambda^{\omega(n)}=o\Big(\sum_{n\leqslant x}\lambda^{\omega(n)}\Big)\qquad(x\to\infty)$$

成立当且仅当 $\lambda=1$.

204. 提出对 $0\leqslant t\leqslant 1$ 一致成立的 $\sum_{1<n\leqslant x} t^{\omega(n)-1}$ 的渐近公式. 用积分推出

$$\sum_{1<n\leqslant x} 1/w(n)$$

的一个估计.

205. 利用习题 204 的方法估计 $\sum_{1<n\leqslant x}\mu(n)^2/\omega(n)$.

206. 同上, 估计 $\sum_{1<n\leqslant x}\varphi(n)/\omega(n)$.

207. 定义数论函数 $r(n)$ 为将整数 n 表示成 $n=[a,b]$ $(a\geqslant 1,\ b\geqslant 1)$ 的方法数.

(a) 计算 $r(p^\nu)$. 证明 r 是乘性函数. 或按定义直接证明, 或先算 $\sum_{d|n} r(d)$.

(b) 证明对任意 $\beta>0$, 存在两个常数 $G(\beta)$ 和 $\gamma(\beta)$, 使得

$$\sum_{1<n\leqslant x}\frac{1}{r(n)^\beta}=\frac{x}{(\ln x)^{\gamma(\beta)}}\Big\{G(\beta)+O\Big(\frac{1}{\ln x}\Big)\Big\}. \tag{5.41}$$

具体算出它们的值, 并指出余项如何依赖于 β.

(c) 将 (5.41) 作为 β 的函数在 $[0,+\infty[$ 上积分, 证明

$$\sum_{1<n\leqslant x}\frac{1}{\ln r(n)}\sim\frac{Kx}{\ln_2 x}\qquad(x\to\infty),$$

并计算常数 K 的值.

208. (a) 设 f 和 g 是乘性函数, 使得 $f(p)=g(p)$ 对任意素数 p 成立, 并使得对任意 $\nu\geqslant 1$ 及 $\varepsilon>0$, 对 p 一致地有 $|f(p^\nu)|+|g(p^\nu)|\ll_\varepsilon \mathrm{e}^{\varepsilon\nu}$. 另假设

$$\inf_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ |z|\leqslant 3/4}}\Big|\sum_{\nu\geqslant 0}g(p^\nu)z^\nu\Big|>0.$$

证明存在常数 M 及在 $\sigma\geqslant 3/4$ 上收敛的 Dirichlet 级数 $H(s)$, 使得

$$\sup_{\sigma\geqslant 3/4}|H(s)|\leqslant M,\qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{f(n)}{n^s}=H(s)\sum_{n\geqslant 1}\frac{g(n)}{n^s}\qquad(\sigma>1).$$

(b) 对 $\vartheta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$, 令 $\tau(n,\vartheta):=\sum_{d|n}d^{i\vartheta}$. 证明对任意 $p\in\mathbb{P}$, $\vartheta\in\mathbb{R}$ 有 $|\tau(p,\vartheta)|^2=2+2\cos(\vartheta\ln p)$. 适当利用问题 (a) 的结论, 证明对 $\sigma>1$, $\vartheta\in\mathbb{R}$ 有

$$F_\vartheta(s):=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)^2|\tau(n,\vartheta)|^2}{\tau(n)n^s}=\zeta(s)\zeta(s+i\vartheta)^{1/2}\zeta(s-i\vartheta)^{1/2}H_\vartheta(s),$$

其中 $H_\vartheta(s)$ 是收敛 Dirichlet 级数, 在半平面 $\sigma\geqslant\frac{3}{4}$ 内有界. 推出对 $|\vartheta|\leqslant 1$, 存在常数 $a>0$, 使得在 $\sigma_a(\tau):=a/\ln(3+|\tau|)$ 的记号下, 函数 $F_\vartheta(s)$ 在区域

$$\mathcal{D}:=\{s\mid\sigma\geqslant 1-\sigma_a(\tau)\}\setminus\big([1-\sigma_a(\vartheta)+i\vartheta,1+i\vartheta]\cup[1-\sigma_a(\vartheta)-i\vartheta,1-i\vartheta]\big)$$

上可亚纯延拓.

(c) 注意到 $|1-p^{i\vartheta-1}|=\{1-c_p/p\}\sqrt{1+s_p^2/(p-c_p)^2}$, 其中 $c_p:=\cos(\vartheta\ln p)$, $s_p:=\sin(\vartheta\ln p)$. 证明

$$H_\vartheta(1)=\prod_p\Big(1+\frac{s_p^2}{(p-c_p)^2}\Big)^{1/2}\Big(1-\frac{1+c_p+c_p^2}{p^2}+\frac{c_p+c_p^2}{p^3}\Big),$$

并推出对 $|\vartheta|\leqslant 1$ 有 $H_\vartheta(1)\gg 1$.

(d) 证明对任意整数 $n\geqslant 1$ 有 $\tau(n)\leqslant 2\sum_{d|n,\,d\leqslant\sqrt{n}}1$. 推出对 $x\geqslant 1$, $\sqrt{x}\leqslant y\leqslant x$ 一致地有

$$\sum_{|n-x|\leqslant y}\tau(n)\ll y\ln x.$$

(e) 证明对 $x \geqslant 3, \vartheta \in \mathbb{R}$ 有

$$D(x;\vartheta) := \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)^2 |\tau(n,\vartheta)|^2}{\tau(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - iT}^{\alpha + iT} F_\vartheta(s) x^s \frac{ds}{s} + O(x e^{-\sqrt{\ln x}})$$

其中 $T := e^{3\sqrt{\ln x}}, \alpha := 1 + 1/\ln x$.

(f) 以下假设 $1/\ln x \leqslant |\vartheta| \leqslant 1$. 将积分线段左移至 $\sigma = 1 - \frac{1}{2}\sigma_a(T)$ 并引入围绕平行线段 $[1 - \sigma_a(\vartheta) \pm i\vartheta, 1 \pm i\vartheta]$ 的半径为 $r := 1/(2\ln x)$ 的截断的 Hankel 围道. 特别地, 令

$$S_\pm := \{\sigma + i(\vartheta \pm 0) \,:\, 1 - \sigma_a(\vartheta) \leqslant \sigma \leqslant 1 - r\},$$

$$C := \{1 + i\vartheta + r e^{i\varphi} \,:\, -\pi < \varphi < \pi\},$$

并定义正定向的 Hankel 围道 $\mathcal{H} := S_- \cup C \cup S_+$. 证明存在常数 $b > 0$, 使得当 $x \geqslant x_0(b)$, $1/\ln x \leqslant |\vartheta| \leqslant 1$ 时, 有

$$D(x;\vartheta) = x|\zeta(1 + i\vartheta)| H_\vartheta(1) + 2\Re e\, I(x;\vartheta) + O\big(x e^{-b\sqrt{\ln x}}\big),$$

其中

$$I(x;\vartheta) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} F_\vartheta(s) x^s \frac{ds}{s}.$$

(g) 证明对于 $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, $0 < |\vartheta_0| \leqslant 2$, $w \in \mathbb{C}$, $|w| \leqslant \frac{1}{2}|\vartheta_0|$, 有

$$\zeta(1 + i\vartheta_0 + w) = \zeta(1 + i\vartheta_0)\{1 + O(|w|/\vartheta_0)\}.$$

推出

$$I(x;\vartheta) = \frac{A(\vartheta) x^{1+i\vartheta}}{\sqrt{\pi}\ln x}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{|\vartheta|\ln x}\Big)\Big\},$$

其中 $A(\vartheta) := \zeta(1 + i\vartheta)\zeta(1 + 2i\vartheta)^{1/2} H_\vartheta(1 + i\vartheta)/(1 + i\vartheta)$.

(h) 证明

$$\int_0^1 D(x;\vartheta)\, d\vartheta \gg x \ln_2 x.$$

209. Hooley Δ-函数: 均值下界估计①.对 $n \geqslant 1, u \in \mathbb{R}$, 令

$$\Delta(n,u) := \sum_{\substack{d|n \\ e^{u-1/2} < d \leqslant e^{u+1/2}}} 1, \qquad \Delta(n) := \sup_{u \in \mathbb{R}} \Delta(n,u).$$

(a) 令 $w(\vartheta) := \dfrac{1}{2\pi}\Big(\dfrac{\sin(\vartheta/2)}{\vartheta/2}\Big)^2$, 从而

$$\widehat{w}(u) := \int_{-\infty}^{\infty} w(\vartheta) e^{i\vartheta u}\, d\vartheta = \max(1 - |u|, 0) \qquad (u \in \mathbb{R}),$$

① 见 Hall 和 Tenenbaum (1982).

证明 $\int_{-\infty}^{\infty} w(\vartheta)|\tau(n,\vartheta)|^2\,\mathrm{d}\vartheta \leqslant 2\Delta(n)\tau(n) \quad (n \geqslant 1)$.

(b) 由上, 从习题 208 (h) 中的渐近下界估计得出

$$\sum_{n\leqslant x} \Delta(x) \gg x\ln_2 x.$$

210. 设 $F(s) := \sum_n a_n/n^s$ 是非负系数 Dirichlet 级数, 在 $\sigma > 1$ 上收敛. 假设 $F(s)$ 可连续地延拓到 $\sigma = 1$, $s \neq 1$ 之上, 并在去心圆盘上 $0 < |s-1| < c$ 全纯. 还假定该延拓满足条件

(i) $F(s) \ll (1+|\tau|)^{1-\delta} \qquad (\sigma \geqslant 1, \tau \geqslant 1)$,

(ii) $F(s) = \exp\left(\dfrac{\lambda}{s-1}\right)\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n(s-1)^n \qquad (0 < |s-1| < c)$,

其中 $\delta \in]0,1[$ 固定, $\lambda > 0$, 且 $\sum \alpha_n\xi^n$ 是收敛半径至少为 c 的幂级数. 令 $A(x) = \sum_{n\leqslant x} a_n$.

(a) 证明

$$\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{C}} F(s)x^{s+1}\frac{\mathrm{d}s}{s(s+1)} + O(x^2),$$

其中 $\mathcal{C}$ 是半圆周 $s = 1 + \frac{1}{2}c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

(b) 在上述积分中作变量替换 $s = 1 + \frac{1}{w}$, 证明存在 Laurent 级数 $L(w) := \alpha_0 + \sum_{n\geqslant 1}\beta_n/w^n$, 当 $|w|$ 足够大时收敛, 且使得

$$\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}I(x) + O(x^2),$$

其中

$$I(x) := \frac{x^2}{2\pi\mathrm{i}}\int_{R-\mathrm{i}\infty}^{R+\mathrm{i}\infty} \exp\{w^{-1}\ln x + \lambda w\}L(w)\frac{\mathrm{d}w}{w^2} \qquad (R \geqslant R_0).$$

(c) 以下选取 $R := \sqrt{(\ln x)/\lambda}$. 证明 $I(x)$ 无穷阶可微, 且 $I'(x)$ 中在区域 $|\tau| \leqslant (\ln x)^{1/3}$ 上积分的贡献

$$\ll x\exp\{2\sqrt{\lambda\ln x} - \lambda^{3/2}(\ln x)^{1/6}\}.$$

(d) 对于 $|\tau| \leqslant (\ln x)^{1/3}$ 将函数 $(\ln x)/w + \lambda w$ Taylor 展开到第 4 阶, 证明 $I'(x)$ 中区域 $|\tau| \leqslant (\ln x)^{1/3}$ 上积分的贡献为

$$\frac{\lambda^{1/4}}{\sqrt{\pi}}x\frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{\lambda\ln x}}}{(\ln x)^{3/4}}\left\{\alpha_0 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\right)\right\}.$$

(e) 证明 $I''(x) \ll I'(x)/x$.

(f) 利用 $A(t)$ 的单调递增性, 由前述结论得出

$$A(x)=\frac{\lambda^{1/4}}{2\sqrt{\pi}}x\frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{\lambda\ln x}}}{(\ln x)^{3/4}}\Big\{\alpha_0+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\Big)\Big\}.$$

211. Oppenheim "数的分解" 问题.

设 $Q(n)$ 为将 n 分解成 >1 的因子之积 (不计次序) 的方法数, 亦即

$$Q(n):=\Big|\Big\{(\nu_2,\nu_3,\ldots)\,:\,\prod_{j\geqslant 2}j^{\nu_j}=n\Big\}\Big|.$$

(a) 证明 Dirichlet 级数 $F(s):=\sum_{n\geqslant 1}Q(n)/n^s$ 可表示为乘积

$$F(s)=\prod_{j\geqslant 2}\Big(1-\frac{1}{j^s}\Big)^{-1}.$$

(b) 证明 $F(s)$ 对 $\lambda=1$ 满足习题 210 的条件.

(c) 证明 Oppenheim (1927) 公式

$$\sum_{n\leqslant x}Q(n)=x\frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{\ln x}}}{2\sqrt{\pi}(\ln x)^{3/4}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\Big)\Big\}.$$

212. Diamond (1984) 的一个定理. 令 $F_0(n):=\delta(n)$.② 对 $k\geqslant 1$, 令

$$F_k(n):=\sum_{\substack{\nu_1\nu_2\cdots\nu_k=n\\ \nu_j>1\ (j=1,\ldots,k)}}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{\ln\nu_j}.$$

设 F是数论函数, 定义为 $F(n):=\sum_{k\geqslant 0}F_k(n)/k!\quad(n\geqslant 1)$.

(a) 证明

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{F(n)}{n^s}=\zeta(s)\exp\Big\{-\sum_{n\geqslant 2}\frac{\Lambda(n)-1}{n^s\ln n}\Big\}\qquad(\sigma>1).$$

(b) 证明渐近公式 $\sum_{n\leqslant x}F(n)=Kx+O(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln x}})\quad(x\to\infty)$, 其中

$$K:=\exp\Big\{\sum_{n\geqslant 2}\{1-\Lambda(n)\}/(n\ln n)\Big\}\approx 1.242\,92.$$

213. 证明对 $x\geqslant 2, T>0$ 一致地有

$$\sum_{n\leqslant x,\,w(n)\leqslant T}1\ll x2^T/\sqrt{\ln x}.$$

② 见第一部分 §2.3.

利用整数 n 的固有分解 $n = qs$, 其中 $\mu(q)^2 = 1$, $(q, s) = 1$, $p \mid s \Rightarrow p^2 \mid s$, 证明对任意固定的整数 $k \geqslant 1$, 有

$$\sum_{n \leqslant x,\, k \mid \tau(n)} 1 = c_k x + O(x/\sqrt{\ln x}).$$

对任意素数 p, 将 $1 - c_p$ 写成 Euler 乘积.

214. **结合大筛法.** 对 $n \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, 令 $r_q(n)$ 为 n 的模 q 剩余类在 $[0, q[$ 中的代表元. 给定 $M \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$, 令

$$E(M, N) := \left|\left\{n \in]M, M+N] : \forall p \in \mathbb{P},\, 0 \leqslant r_p(n) \leqslant \tfrac{2}{3}p\right\}\right|,$$

并记 $E_N := \sup_{M \geqslant 0} E(M, N)$. 在此将提出当 $N \to \infty$ 时 E_N 的一个上界估计.

(a) 证明 $E(0, 10) = 4$.

(b) 设 g 为乘性函数, 定义为

$$\forall p \in \mathbb{P}, \qquad g(p) = \frac{p - 1 - \lfloor 2p/3 \rfloor}{1 + \lfloor 2p/3 \rfloor}, \qquad g(p^\nu) = 0 \quad (\nu \geqslant 2).$$

证明 $g(p) = \frac{1}{2} + O(1/p) \quad (p \in \mathbb{P})$. 推出

$$\left(1 + \frac{g(p)}{p^s}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{1/2} = 1 + O\left(\frac{1}{p^{\sigma+1}} + \frac{1}{p^{2\sigma}}\right) \quad (s = \sigma + \mathrm{i}\tau,\, \sigma > 0,\, p \in \mathbb{P}),$$

并证明存在函数 $H(s)$, 在半平面 $\sigma = \Re e\, s \geqslant \frac{3}{4}$ 上全纯且有界, 使得 Dirichlet 级数 $G(s) := \sum_{n \geqslant 1} g(n)/n^s$ 在区域

$$\mathcal{D} := \left\{s = \sigma + \mathrm{i}\tau \in \mathbb{C} : \sigma \geqslant 1 - \frac{c}{1 + \ln^+ |\tau|},\, s \notin [1 - c, 1]\right\}$$

上具有形如 $G(s) = H(s)\zeta(s)^{1/2}$ 的全纯延拓, 其中 c 是适当的正常数.

(c) 当 $Q \to \infty$ 时估计 $L(Q) := \sum_{q \leqslant Q} g(q)$.

(d) 用大筛法不等式, 证明

$$E_N \leqslant \left\{1 + O\left(\frac{1}{\ln N}\right)\right\} \frac{\sqrt{2\pi N \ln N}}{H},$$

其中 $H := \prod_p (1 + g(p)/p)(1 - 1/p)^{1/2}$.

第六章　两个算术上的应用

在此将用上一章的结果, 尤其是定理 5.4, 来解决两个具体的算术问题.

§6.1　素因子个数为 k 的整数

由素数定理对 $k \geqslant 1$ 作归纳, 易证对任意固定的 k, 有

$$N_k(x) := \left|\{n \leqslant x : \Omega(n) = k\}\right| \sim \frac{x}{\ln x}\frac{(\ln_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \qquad (x \to \infty),$$

见 Landau (1909). 同样的结论对函数

$$\pi_k(x) := \left|\{n \leqslant x : \omega(n) = k\}\right|$$

也成立.

从而数论函数 Ω 和 ω 在 $[0, x]$ 上的局部分布与参数为 $\ln_2 x$ 的 Poisson 分布类似. 然而, 当 k 随 x 趋于无穷时, 用归纳法研究 $\pi_k(x)$ 或 $N_k(x)$ 的渐近性质则是高度技巧化的, 见 Sathe (1953, 1954). Selberg (1954) 设想另一种方法, 比如在 $\omega(n)$ 的情形下将 $\pi_k(x)$ 视为

$$\sum_{n \leqslant x} z^{\omega(n)} \tag{6.1}$$

中 z^k 的系数, 并使用 Cauchy 公式. 这样的纲领则要求对 (6.1) 有精确的估计, 此即是定理 5.2 或定理 5.4 所提供的.

事实上, 若考虑 Dirichlet 级数

$$F_1(s; z) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{z}{p^s - 1}\right) \qquad (\sigma > 1),$$

那么函数

$$G_1(s;z) := F_1(s;z)\zeta(s)^{-z} = \prod_p \Big(1+\frac{z}{p^s-1}\Big)\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^z$$

可展成 Dirichlet 级数

$$G_1(s;z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{b_{1z}(n)}{n^s},$$

其中 b_{1z} 是乘性函数, 在素数的幂上的值由等式

$$1+\sum_{\nu\geqslant 1} b_{1z}(p^\nu)\xi^\nu = \Big(1+\frac{\xi z}{1-\xi}\Big)(1-\xi)^z \qquad (|\xi|<1)$$

来定义. 特别地, 有

$$b_{1z}(p)=0 \tag{6.2}$$

而且由 Cauchy 公式推出对 $|z|\leqslant A$ 有

$$|b_{1z}(p^\nu)| \leqslant M\cdot 2^{\nu/2} \qquad (\nu\geqslant 2), \tag{6.3}$$

其中

$$M=M(A) := \sum_{|z|\leqslant A,\ |\xi|\leqslant 1/\sqrt{2}} \Big|\Big(1+\frac{\xi z}{1-\xi}\Big)(1-\xi)^z\Big|.$$

由关系 (6.2) 和 (6.3) 推出对 $\sigma>\frac{1}{2}$ 有

$$\sum_p \sum_{\nu\geqslant 1} \frac{|b_{1z}(p^\nu)|}{p^{\nu\sigma}} \leqslant 2M\sum_p \frac{1}{p^\sigma(p^\sigma-\sqrt{2})} \leqslant \frac{cM}{\sigma-1/2},$$

其中 c 是绝对常数. 由定理 1.3 知 $G_1(s;z)$ 在 $\sigma>\frac{1}{2}$ 上绝对收敛, 且对 $\sigma\geqslant\frac{3}{4}$ 有

$$G_1(s;z) \ll_A 1.$$

于是定理 5.2 的条件满足, 故可断言以下结论.

定理 6.1 对任意正常数 A, 存在正常数 $c_1=c_1(A)$ 和 $c_2=c_2(A)$, 使得对 $x\geqslant 3$, $N\geqslant 0$, $|z|\leqslant A$ 一致地有

$$\sum_{n\leqslant x} z^{\omega(n)} = x(\ln x)^{z-1}\Big\{\sum_{0\leqslant k\leqslant N}\frac{\lambda_k(z)}{(\ln x)^k} + O_A(R_N(x))\Big\}, \tag{6.4}$$

其中

$$R_N(x) := \mathrm{e}^{-c_1\sqrt{\ln x}} + \Big(\frac{c_2N+1}{\ln x}\Big)^{N+1}, \tag{6.5}$$

$$\lambda_k(z) := \frac{1}{\Gamma(z-k)}\sum_{h+j=k}\frac{1}{h!j!}G_1^{(h)}(1;z)\gamma_j(z), \tag{6.6}$$

$\gamma_j(z)$ 是定理 5.1 中定义的整函数.

必须注意对任意 k 有 $\lambda_k(0)=0$. 特别地, 有

$$\lambda_0(z)=z\lambda(z),\quad \text{其中 } \lambda(z):=\frac{G_1(1;z)}{\Gamma(z+1)}. \tag{6.7}$$

当然可对

$$F_2(s;z):=\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^{\Omega(n)}}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{z}{p^s}\right)^{-1}$$

作平行的研究. 在

$$G_2(s;z):=F_2(s;z)\zeta(s)^{-z}=\prod_p\left(1-\frac{z}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^z$$

中 $1/n^s$ 的系数 $b_{2z}(n)$ 仍是 n 的乘性函数, 由等式

$$1+\sum_{\nu\geqslant 1}b_{2z}(p^\nu)\xi^\nu=\frac{(1-\xi)^z}{1-\xi z}$$

定义.

如前, 仍有 $b_{2z}(p)=0$. 然而在 $|b_{2z}(p^\nu)|$ 的上界估计中应考虑到上式右边关于 ξ 的函数仅在 $|\xi|<\min(1,1/|z|)$ 上全纯的事实. 对任意 δ, $0<\delta<1$, 由 Cauchy 公式得

$$|b_{2z}(p^\nu)|\leqslant M(\delta)(2-\delta)^\nu\qquad(|z|\leqslant 2-2\delta),$$

其中

$$M(\delta):=\sup_{\substack{|\xi|\leqslant 1/(2-\delta)\\ |z|\leqslant 2-2\delta}}\left|\frac{(1-\xi)^z}{1-\xi z}\right|.$$

这推出 $G_2(s;z)$ 在 $\sigma\geqslant 1-c_0(\delta)$ 上绝对收敛. 定理 5.2 于是给出如下估计.

定理 6.2 对任意 δ, $0<\delta<1$, 存在正常数 $c_1=c_1(\delta)$ 和 $c_2=c_2(\delta)$, 使得对 $x\geqslant 3$, $N\geqslant 0$, $|z|\leqslant 2-\delta$ 一致地有

$$\sum_{n\leqslant x}z^{\Omega(n)}=x(\ln x)^{z-1}\left\{\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\frac{\nu_k(z)}{(\ln x)^k}+O_\delta(R_N(x))\right\}, \tag{6.8}$$

其中 $R_N(x)$ 在 (6.5) 中定义, 且

$$\nu_k(z)=\frac{1}{\Gamma(z-k)}\sum_{h+j=k}\frac{1}{h!j!}G_2^{(h)}(1;z)\gamma_j(z).$$

如前, 有 $\nu_k(0)=0\quad(k\geqslant 0)$. 令

$$\nu_0(z_0)=z\nu(z),\quad \text{其中 } \nu(z):=\frac{G_2(1;z)}{\Gamma(z+1)}. \tag{6.9}$$

从 (6.4) 和 (6.8) 出发, 由以下一般的定理便得到要求的 $\pi_k(x)$ 和 $N_k(x)$ 的估计.

定理 6.3　设 $a_z(n)$ 是依赖于复参数 z 的数论函数, 在 $|z| \leqslant A$ 上可展成幂级数

$$a_z(n) = \sum_{k \geqslant 0} c_k(n) z^k \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

设 N 是 $\geqslant 0$ 的整数. 假设存在 $N+1$ 个函数 $h_j(z)$　$(0 \leqslant j \leqslant N)$, 在 $|z| \leqslant A$ 上全纯, 以及与 z 无关的量 $R_N(x)$, 使得对 $x \geqslant 3$ 及 $|z| \leqslant A$ 有

$$\sum_{n \leqslant x} a_z(n) = x(\ln x)^{z-1} \left\{ \sum_{0 \leqslant j \leqslant N} \frac{z h_j(z)}{(\ln x)^j} + O_A(R_N(x)) \right\}, \tag{6.10}$$

那么, 对 $x \geqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant A \ln_2 x$ 一致地有

$$\begin{aligned} C_k(x) :&= \sum_{n \leqslant x} c_k(n) \\ &= \frac{x}{\ln x} \left\{ \sum_{0 \leqslant j \leqslant N} \frac{Q_{j,k}(\ln_2 x)}{(\ln x)^j} + O_A\Big(\frac{(\ln_2 x)^k}{k!} R_N(x) \Big) \right\}, \end{aligned} \tag{6.11}$$

其中

$$Q_{j,k}(X) := \sum_{m+\ell=k-1} \frac{1}{m!\ell!} h_j^{(m)}(0) X^l \qquad (0 \leqslant j \leqslant N,\ k \geqslant 1). \tag{6.12}$$

倘若还假定当 $|z| \leqslant A$ 时 $|h_0''(z)| \leqslant B$, 那么对 $x \geqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant A \ln_2 x$ 一致地有

$$C_k(x) = \frac{x(\ln_2 x)^{k-1}}{(k-1)! \ln x} \left\{ h_0\Big(\frac{k-1}{\ln_2 x}\Big) + O_A\Big(\frac{B \cdot (k-1)}{(\ln_2 x)^2} + \frac{\ln_2 x}{k} R_0(x) \Big) \right\}. \tag{6.13}$$

证明　先证 (6.11). 由于主项是 (6.10) 主项中 z^k 项的系数, 只须估计余项. 由 Cauchy 公式, 对任意 $r \leqslant A$, 该项

$$\ll_A \oint_{|z|=r} \frac{x R_N(x)}{\ln x} (\ln x)^{\Re e\, z} |z|^{-k-1}\, |\mathrm{d}z|. \tag{6.14}$$

选取 $r := k/\ln_2 x$. 有

$$\oint_{|z|=r} (\ln x)^{\Re e\, z} |z|^{-k-1}\, |\mathrm{d}z| = \Big(\frac{\ln_2 x}{k} \Big)^k \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{k \cos \vartheta}\, \mathrm{d}\vartheta$$

及

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{k\cos\vartheta}\, \mathrm{d}\vartheta &\leqslant 2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{k\cos\vartheta}\, \mathrm{d}\vartheta + \pi = 2 \int_0^1 \mathrm{e}^{kt} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} + \pi \\ &\leqslant 2\mathrm{e}^k \int_0^1 \mathrm{e}^{-k(1-t)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} + \pi \leqslant 2\Gamma(\tfrac{1}{2}) \mathrm{e}^k k^{-\frac{1}{2}} + \pi. \end{aligned}$$

将之代入 (6.14) 即得题设结论.

当 $k=1$ 时, (6.13) 与 $N=0$ 时的 (6.11) 相同. 下设 $k\geqslant 2$. 利用 $N=0$ 时的 (6.11), 并用 Cauchy 公式估计主项. 对 $r\leqslant A$ 有

$$Q_{0,k}(X)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|z|=r} h_0(z)\mathrm{e}^{zX}z^{-k}\,\mathrm{d}z.$$

当 $k\leqslant AX$ 时, 可选 $r=(k-1)/X$. 注意到

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|z|=r}(z-r)\mathrm{e}^{zX}z^{-k}\,\mathrm{d}z=\frac{X^{k-2}}{(k-2)!}-r\frac{X^{k-1}}{(k-1)!}=0,$$

得

$$\begin{aligned}Q_{0,k}(X)=&\frac{h_0(r)}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|z|=r}\mathrm{e}^{zX}z^{-k}\,\mathrm{d}z\\&+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|z|=r}\{h_0(z)-h_0(r)-(z-r)h_0'(r)\}\mathrm{e}^{zX}z^{-k}\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

右边第一项等于要求的主项 $h_0(r)X^{k-1}/(k-1)!$. 为估计第二项, 注意到大括号中的表达式等于

$$(z-r)^2\int_0^1(1-t)h_0''(r+t(z-r))\,\mathrm{d}t,$$

而且对每个 $[0,1]$ 中的 t 有 $|r+t(z-r)|=|r(1-t)+tz|\leqslant r(1-t)+tr=r$. 于是相应的积分的绝对值

$$\leqslant\frac{B}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}-1|^2\mathrm{e}^{rX\cos\vartheta}r^{3-k}\,\mathrm{d}\vartheta\leqslant\frac{B}{\pi}r^{3-k}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{(k-1)\cos\vartheta}(1-\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta.$$

用

$$2\int_0^1\mathrm{e}^{(k-1)t}\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t+2\pi\leqslant 2\Gamma(3/2)\mathrm{e}^{k-1}(k-1)^{-3/2}+2\pi$$

来估计对 ϑ 的积分的上界并利用 Stirling 公式, 得

$$Q_{0,k}(X)=h_0(r)\frac{X^{k-1}}{(k-1)!}+O\Big(B\frac{X^{k-1}}{(k-1)!}\frac{k-1}{X^2}\Big)\qquad(k\leqslant AX).$$

(6.13) 于是得证. □

用定理 6.1、定理 6.2 和定理 6.3 可以具体算出 $\pi_k(x)$ 和 $N_k(x)$ 的渐近公式. 函数 $h_0(z)$ 的角色分别由

$$\lambda(z):=\frac{1}{\Gamma(z+1)}\prod_p\Big(1+\frac{z}{p-1}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^z \tag{6.15}$$

和

$$\nu(z) := \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z \tag{6.16}$$

来担当.

定理 6.4 设 $A > 0$. 存在正常数 $c_1 = c_1(A)$ 和 $c_2 = c_2(A)$ 使得对 $x \geqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant A \ln_2 x$, $N \geqslant 0$ 一致地有

$$\pi_k(x) = \frac{x}{\ln x} \left\{ \sum_{0 \leqslant j \leqslant N} \frac{P_{j,k}(\ln_2 x)}{(\ln x)^j} + O\left(\frac{(\ln_2 x)^k}{k!} R_N(x)\right) \right\}, \tag{6.17}$$

其中 $P_{j,k}(X)$ 是至多 $k-1$ 阶的多项式, $R_N(x)$ 由 (6.5) 定义. 特别地, 有

$$P_{0,k}(X) = \sum_{m+\ell=k-1} \frac{1}{m!\ell!} \lambda^{(m)}(0) X^\ell.$$

另外, 在同样的条件下, 有

$$\pi_k(x) = \frac{x}{\ln x} \frac{(\ln_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \left\{ \lambda\left(\frac{k-1}{\ln_2 x}\right) + O\left(\frac{k}{(\ln_2 x)^2}\right) \right\}. \tag{6.18}$$

定理 6.5 给定 δ, $0 < \delta < 1$. 存在正常数 $c_1 = c_1(\delta)$ 及 $c_2 = c_2(\delta)$, 使得对 $x \geqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant (2-\delta) \ln_2 x$, $N \geqslant 0$ 一致地有

$$N_k(x) = \frac{x}{\ln x} \left\{ \sum_{0 \leqslant j \leqslant N} \frac{Q_{j,x}(\ln_2 x)}{(\ln x)^j} + O\left(\frac{(\ln_2 x)^k}{k!} R_N(x)\right) \right\}, \tag{6.19}$$

其中 $Q_{j,k}$ 是至多 $k-1$ 阶多项式, $R_N(x)$ 由 (6.5) 定义. 特别地, 有

$$Q_{0,k}(X) = \sum_{m+\ell=k-1} \frac{1}{m!\ell!} \nu^{(m)}(0) X^\ell.$$

另外, 在同样的条件下, 有

$$N_k(x) = \frac{x}{\ln x} \frac{(\ln_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \left\{ \nu\left(\frac{k-1}{\ln_2 x}\right) + O\left(\frac{k}{(\ln_2 x)^2}\right) \right\}. \tag{6.20}$$

由于 $\nu(z)$ 在 $z = 2$ 处有极点, 为使 (6.20) 成立, $k \leqslant (2-\delta) \ln_2 x$ 是自然的限制条件. 可利用该事实在 $(2+\delta) \ln_2 x \leqslant k \leqslant A \ln_2 x$ 上估计 $N_k(x)$.

定理 6.6 设 $0 < \delta < 1$, $A > 0$. 对 $x \geqslant 3$, $(2+\delta) \ln_2 x \leqslant k \leqslant A \ln_2 x$ 一致地有

$$N_k(x) = C \frac{x \ln x}{2^k} \left\{ 1 + O\left((\ln x)^{-\delta^2/5}\right) \right\}, \tag{6.21}$$

其中

$$C := \frac{1}{4} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right) \approx 0.378\,694.$$

证明 令 $\varepsilon = \varepsilon(A)$ 为待定正参数. 先对 $N = 0$ 下的 (6.8) 在圆周 $|z| = 2 - \varepsilon$ 上应用 Cauchy 公式, 得

$$N_k(x) = \frac{x}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=2-\varepsilon} \nu(z)(\ln x)^{z-1} z^{-k}\,\mathrm{d}z + O_\varepsilon\big(x(2-\varepsilon)^{-k}(\ln x)^{-\varepsilon}\big), \tag{6.22}$$

其中对余项的贡献作了显然的上界估计.

当 $\varepsilon = \varepsilon(A)$ 足够小时, 对 $k \leqslant A\ln_2 x$ 有

$$(2-\varepsilon)^{-k}(\ln x)^{-\varepsilon} \leqslant 2^{-k}(\ln x)^{-A\ln(1-\varepsilon/2)-\varepsilon} \leqslant 2^{-k}(\ln x)^{1/2}.$$

只剩证明 (6.22) 主项的估计. 由 $\nu(z)$ 在 $z=2$ 有留数为 $-C$ 的极点知该量等于

$$C\frac{x\ln x}{2^k} - \frac{x}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=2+\delta} \nu(z)(\ln x)^{z-1}z^{-k}\,\mathrm{d}z,$$

最后的积分显然

$$\ll_\delta (\ln x)^{1+\delta}(2+\delta)^{-k} \leqslant (\ln x)2^{-k}(\ln x)^{-\eta(\delta)},$$

其中

$$\eta(\delta) := 2\big\{\big(1+\tfrac{1}{2}\delta\big)\ln\big(1+\tfrac{1}{2}\delta\big) - \tfrac{1}{2}\delta\big\} > \tfrac{1}{5}\delta^2.$$

命题得证. □

在习题 217 中将推广该结论至较大的 k 值, 即 $A\ln_2 x < k \leqslant (\ln x)/\ln 2$ 的情形.

§6.2 因子的平均分布：反正弦分布

在本书第一部分中曾给出了关于整数 n 的全部因子个数 $\tau(n)$ 的均阶和极阶的信息. 一个自然的问题便是这些因子是否依某分布律位于区间 $[1,n]$ 中. 显然不应期望有对所有 n 都成立的结论. 在此将着手于从平均意义上来研究它.

对每个整数 n, 定义 D_n 为依概率 $1/\tau(n)$ 取值为 $(\ln d)/\ln n$ 的均匀分布随机变量, 其中 d 为遍历 n 的 $\tau(n)$ 个因子构成的集合. D_n 的分布函数 F_n 定义为

$$F_n(u) := \operatorname{Prob}(D_n \leqslant u) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n,\, d\leqslant n^u} 1 \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1).$$

显然在 $[0,1]$ 上 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不点点收敛. 然而 Cesàro 平均序列

$$G_N(u) := N^{-1}\sum_{n\leqslant N} F_n(u)$$

在 $[0,1]$ 上有一致极限. 值得注意的是, 该极限是一个为专业人员熟知的概率分布 — 反正弦分布所对应的分布函数. 该分布的密度函数是 $1/\pi\sqrt{u(1-u)}$. 大值和小值都很可能取到: 倘若 D 是依此分布的随机变量, 那么

$$\text{Prob}(D < 0.01 \text{ 或 } D > 0.99) \approx 0.128.$$

这说明从平均意义上来说一个整数含有 “许多” 小因子 (从而有许多大因子).

定理 6.7　*对任意* $x \geqslant 2$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ *有*

$$\frac{1}{x}\sum_{n \leqslant x} F_n(u) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{u} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\Big). \tag{6.23}$$

该结论是如下定理的简单推论.

定理 6.8　*令* $h := \prod_{p\in\mathbb{P}}\sqrt{p(p-1)}\ln\{1/(1-1/p)\} \approx 0.969$. *对* $x \geqslant 2$, $d \geqslant 1$ *一致地有*

$$\sum_{n \leqslant x}\frac{1}{\tau(nd)} = \frac{hx}{\sqrt{\pi\ln x}}\Big\{g(d) + O\Big(\frac{(3/4)^{\omega(d)}}{\ln x}\Big)\Big\}, \tag{6.24}$$

其中 g *是某个使得*

$$\sum_{n \leqslant x} g(d) = \frac{x}{h\sqrt{\pi\ln x}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\ln x}\Big)\Big\} \tag{6.25}$$

的数论函数.

暂时承认该定理, 看如何推出估计 (6.23). 由 n 的因子对 $\sqrt{n}$ 的对称性知

$$\begin{aligned} F_n(u) &= \text{Prob}(D_n \geqslant 1-u) = 1 - \text{Prob}(D_n < 1-u) \\ &= 1 - F_n(1-u) + O\Big(\frac{1}{\tau(n)}\Big). \end{aligned}$$

令 $S(x,u)$ 为 (6.23) 的左边. 将上式对 $n \leqslant x$ 求和并用 $d=1$ 时的 (6.24) 估计余项, 得

$$S(x,u) + S(x,1-u) = 1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\Big) \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1).$$

由 $(2/\pi)\arcsin\sqrt{u} + (2/\pi)\arcsin\sqrt{1-u} = 1$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$ 知, 只须对 $0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}$ 证明 (6.23).

既然如此, 易知

$$
\begin{aligned}
S(x,u) &= \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\tau(n)}\sum_{d|n,\,d\leqslant n^{\nu}}1\\
&= \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\tau(n)}\Big\{\sum_{d|n,\,d\leqslant x^u}1-\sum_{d|n,\,n^u<d\leqslant x^u}1\Big\}\\
&= \frac{1}{x}\sum_{d\leqslant x^u}\sum_{m\leqslant x/d}\frac{1}{\tau(md)}-R(x,u)
\end{aligned}
\tag{6.26}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
R(x,u) &:= \frac{1}{x}\sum_{d\leqslant x^u}\sum_{\substack{m\leqslant x/d\\(md)^u<d}}\frac{1}{\tau(md)}\leqslant\frac{1}{x}\sum_{d\leqslant x^u}\sum_{\substack{m\leqslant x/d\\ m\leqslant d^{(1-u)/u}}}\frac{1}{\tau(m)}\\
&\ll \frac{1}{x}\sum_{d\leqslant x^u}\frac{d^{(1-u)/u}}{\sqrt{1+\ln d^{(1-u)/u}}}\ll\frac{1}{\sqrt{1+\ln x^{1-u}}}\ll\frac{1}{\sqrt{\ln x}}.
\end{aligned}
$$

用 (6.24) 来估计 (6.26) 内部的和式, 得

$$
S(x,u)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\sum_{d\leqslant x^u}\frac{1}{d\sqrt{\ln x/d}}\Big\{g(d)+O\Big(\frac{(3/4)^{\omega(d)}}{\ln x}\Big)\Big\}+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\Big),
$$

其中用了 $u\leqslant\frac{1}{2}$ 的事实来将 $1/(\ln x/d)$ 的上界估计为 $O(1/\ln x)$.

将 $(\frac{3}{4})^{\omega(d)}$ 放大为 1, 可知对 d 的和式中余项的贡献 $\ll 1/\sqrt{\ln x}$. 用分部积分来处理主项. 令

$$
\mathcal{G}(t):=\sum_{n\leqslant \mathrm{e}^t}g(n)=\frac{\mathrm{e}^t}{h\sqrt{\pi t}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big\}\qquad(t>1).
$$

有

$$
\begin{aligned}
\frac{h}{\sqrt{\pi}}\sum_{d\leqslant x^u}\frac{g(d)}{d\sqrt{\ln x/d}} &= \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{0-}^{u\ln x}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{\ln x-t}}\,\mathrm{d}\mathcal{G}(t)\\
&= \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{u\ln x}\mathcal{G}(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{\ln x-t}}\Big\{1-\frac{1}{2(\ln x-t)}\Big\}\,\mathrm{d}t+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\Big)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{u\ln x}\frac{1+O(1/(t+1))}{\sqrt{t(\ln x-t)}}\,\mathrm{d}t+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\Big)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{u}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v(1-v)}}+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\Big)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{u}+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\Big).
\end{aligned}
$$

故 (6.23) 得证.

定理 6.8 的证明 引进生成级数

$$f_d(s) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\tau(nd)n^s} \qquad (d=1,2,\ldots).$$

虽然函数 $n \mapsto \tau(nd)$ 并非乘性函数, 通过公式

$$\tau(nd) = \prod_p (v_p(n) + v_p(d) + 1)$$

仍可将 $f_d(s)$ 表示为 Euler 乘积的形式, 即

$$f_d(s) = \prod_p \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{p^{-\nu s}}{\nu + v_p(d) + 1} = g_d(s) f_1(s),$$

其中

$$g_d(s) := \prod_{p^\alpha \| d} \left(\sum_{\nu\geqslant 0} \frac{p^{-\nu s}}{\nu + \alpha + 1} \right) \left(\sum_{\nu\geqslant 0} \frac{p^{-\nu s}}{\nu + 1} \right)^{-1}$$

对每个 d, $g_d(s)$ 是在 $\sigma > 0$ 上绝对收敛的级数之比. 对 $\sigma \geqslant \frac{3}{4}$, 可将分母的绝对值用一个正的绝对常数来作下界估计:

$$\left| \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{p^{-\nu s}}{\nu+1} \right| \geqslant 1 - \sum_{\nu\geqslant 1} \frac{p^{-\nu\sigma}}{\nu} = 1 + \ln\left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right) \geqslant 1 + \ln(1 - 2^{-3/4}) > 0.$$

这推出对 $\sigma \geqslant \frac{3}{4}$ 有

$$|g_d(s)| \leqslant \prod_{p^\alpha \| d} \left\{ \frac{1}{\alpha+1} + O(p^{-\sigma}) \right\} \leqslant C \left(\frac{3}{4}\right)^{\omega(d)}, \tag{6.27}$$

其中 C 是绝对常数.

现在有 $h(s) := f_1(s)\zeta(s)^{-1/2} = \sum_{n\geqslant 1} b(n)/n^s$, 其中 $b(n)$ 是等式

$$\sum_{\nu\geqslant 0} b(p^\nu)\xi^\nu = \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{\xi^\nu}{\nu+1} (1-\xi)^{1/2}$$

所定义的乘性函数. 特别地, 对任意 p 有 $b(p) = 0$ 及

$$b(p^\nu) \ll \left(\frac{3}{2}\right)^\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots).$$

这推出 $h(s)$ 在 $\sigma > \frac{1}{2}$ 上绝对收敛. 于是对于 $z = \frac{1}{2}$ 及 $M \ll (3/4)^{\omega(d)}$, $f_d(s)$ 满足 Selberg-Delange 定理 5.2 (或定理 5.4) 的条件. 考虑到 $h(1) = h$, 这便推出 $g(d) = g_d(1)$ 对 (6.24) 成立.

现在只余下 (6.25) 的证明. 为此将再次使用 Selbert-Delange 的定理 5.2 (或定理 5.4) 并注意到 g 是定义为

$$g(p^\nu) := \Big(\sum_{j\geqslant 0}\frac{p^{-j}}{j+\nu+1}\Big)\Big(\sum_{j\geqslant 0}\frac{p^{-j}}{j+1}\Big)^{-1}$$

的乘性函数. 对 $\sigma > 0$, 有

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{g(n)}{n^s} = \zeta(s)^{1/2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\beta(n)}{n^s},$$

其中 β 是由

$$\sum_{\nu\geqslant 1}\beta(p^\nu)\xi^\nu = (1-\xi)^{1/2}\sum_{\nu\geqslant 0}g(p^\nu)\xi^\nu \qquad (|\xi|<1) \tag{6.28}$$

定义的乘性函数. 由于 $|g(p^\nu)| \leqslant 1$, 右边的项在 $|\xi| < 1$ 上全纯, 并且

$$\beta(p^\nu) \ll \Big(\frac{3}{2}\Big)^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

另外,

$$\beta(p) = g(p) - \tfrac{1}{2} \ll \frac{1}{p}.$$

这推出 $\sum\beta(n)/n^s$ 在 $\sigma > \frac{1}{2}$ 上的绝对收敛性.

定理 5.2 于是推出估计

$$\sum_{n\leqslant x} g(n) = \frac{Bx}{\sqrt{\pi\ln x}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\ln x}\Big)\Big\}, \tag{6.29}$$

其中

$$B := \prod_p\prod_{\nu\geqslant 0}\beta(p^\nu)/p^\nu.$$

由 (6.28), 可将乘积中指标为 p 的项另写成

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{n\geqslant 0}g(p^\nu)p^{-\nu}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1/2}\\
&\qquad = \Big(\sum_{j\geqslant 0}\frac{p^{-j}}{j+1}\Big)^{-1}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1/2}\sum_{\nu\geqslant 0}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{j\geqslant 0}\frac{p^{-\nu-j}}{\nu+j+1}\\
&\qquad = \Big(\sum_{j\geqslant 0}\frac{p^{-j}}{j+1}\Big)^{-1}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1/2} = \Big\{\sqrt{p(p-1)}\ln\Big(\frac{1}{1-1/p}\Big)\Big\}^{-1}
\end{aligned}$$

的形式. 于是得到

$$B = 1/h,$$

(6.25) 从而得证. □

注记

§6.1 当 k 有界时用归纳法对 $N_k(x)$ 和 $\pi_k(x)$ 的研究见 Hardy 和 Wright (1938) §22.18. 当 $N=0$ 时, 定理 6.1 — 定理 6.5 是 Selberg (1954) 的结果. 对一般但固定的 $N \geqslant 0$, 则是 Delange (1971) 工作的特殊情形.

定理 6.6 估计所蕴含的渐近等价是 Selberg (1954) 的结论. Nicolas (1984) 用初等方法推广了该结果, 证明了对 $x \geqslant 3$, $(2+\delta)\ln_2 x \leqslant k \leqslant \ln x/\ln 2$ 一致地有

$$N_k(x) = Cy\ln y\Big\{1 + O\big((\ln y)^{-\eta}\big)\Big\}, \tag{6.30}$$

其中 $y := x/2^k$, $\eta = \eta(\delta) > 0$. Nicolas 利用了如下事实：对这些较大的 k 值, 形如 $2^\ell m$ ($\ell \gg k$, $\Omega(m) \sim 2\ln_2 y$) 的整数的数目在 $N_k(x)$ 中比例占优, 见习题 217, 那里将用 Selberg-Delange 方法给出一个解析证明.

当 k 接近 $2\ln_2 x$ 时, Balazard, Delange 和 Nicolas (1988) 明确指出了 $N_k(x)$ 的渐近性质：对 $|k - 2\ln_2 x| \leqslant A\sqrt{\ln_2 x}$, 有

$$N_k(x) = C\Phi\Big(\frac{k - 2\ln_2 x}{\sqrt{2\ln_2 x}}\Big)\frac{x\ln x}{2^k}\Big\{1 + O_A\Big(\frac{1}{\sqrt{\ln_2 x}}\Big)\Big\},$$

其中

$$\Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

Balazard (1987) 在其博士论文中统一了对 $N_k(x)$ 的研究, 提出了 $N_k(x)$ 对于 $1 \leqslant k \leqslant (\ln x)/\ln 2$ 一致成立的解析逼近. 可见于 Balazard, Delange 和 Nicolas (1988).

注意到在关于 $h_0(z)$ 高阶导数的附加假设下可以具体化 (6.13). 比如说, 若对于 $|z| \leqslant A$ 有 $h^{(4)}(z) \ll B$, 那么在 $r := (k-1)/\ln_2 x$ 的记号下有

$$C_k(x) = \frac{x}{\ln x}\frac{(\ln_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}\Big\{h_0(r) - \frac{rh_0''(r)}{2\ln_2 x} + O\Big(\frac{B(k-1)^2}{(\ln_2 x)^4} + \frac{\ln_2 x}{k}R_0(x)\Big)\Big\}.$$

这即推出对定理 6.4 和定理 6.5 相应的改进.

当 $k > A\ln_2 x$ 时 $\pi_k(x)$ 渐近性质的问题则比 $N_k(x)$ 相应的问题要复杂得多. 这是因为没有一个素数具有独特的地位. 直至多年以后人们才知道 Selberg 公式

$$\pi_k(x) \sim \lambda\Big(\frac{k-1}{\ln_2 x}\Big)\frac{x}{\ln x}\frac{(\ln_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \tag{6.31}$$

的成立域. Hensley 于 1987 年证明了 (6.31) 成立当且仅当

$$k = o\big((\ln_2 x/\ln_3 x)^2\big).$$

用二元鞍点法,① Hildebrand 和 Tenenbaum (1988) 证明了对 $k \ll (\ln_2 x)^2$ 一

① 在第三部分第五章中通过一个范例 — 脆数来讲述该方法的一元情形.

致地有

$$\pi_k(x) = \lambda(r)\frac{x}{\ln x}\frac{(\ln_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-kh/2}\Big\{1+O\Big(\frac{1+r}{\ln_2 x}\Big)\Big\}, \tag{6.32}$$

其中 $r := (k-1)/\ln_2 x$, 及②

$$h := \Big(\frac{\ln(2+\mathrm{e}^{\gamma} r\ln r)}{\ln_2 x}\Big)^2.$$

同一篇文章中还包括许多当 k 值较大时 $\pi_k(x)$ 渐近性质的具体结果, 特别是关系

$$\frac{\pi_{k+1}(x)}{\pi_k(x)} \sim \frac{L}{k} \qquad \Big(1 \leqslant k \ll \frac{\ln x}{(\ln_2 x)^2}\Big), \tag{6.33}$$

其中 $L := \ln\Big(\dfrac{\ln x}{k\ln(k+1)}\Big)$.

在本书作者指导下, Kerner (2002) 在其博士论文中对此问题拓展了鞍点方法的适用域, 得到当 $x \to \infty$ 时在区域

$$k \leqslant K_{x,\varepsilon} := \{1+(1-\varepsilon)/\ln_2 x\}(\ln x/\ln_2 x) \qquad (\varepsilon > 0 \text{ 任意})$$

上成立的渐近公式. 这推广了 (6.33), 特别是它还蕴涵了

$$\pi_{k+1}(x)/\pi_k(x) \asymp (L_1/k)^{\beta},$$

其中 $L_1 := \ln(K_{x,\varepsilon}/k)$. 数量 $\beta = \beta(k,x)$ 在该工作中有具体定义, 在上述区域中满足 $\beta - 1 \asymp k/(L_1 \ln x)$.

对该主题的其他信息, 特别是关于非常大的 k 值, 即 $k \gg \ln x/\ln_2 x$ 的, 见 Pomerance (1984).

Balazard (1990) 证明了, 当 x 足够大时, 序列 $k \mapsto \pi_k(x)$ 是单态的.

正如 De Koninck 和 Tenenbaum (2002) 所证明的, 可用定理 6.5 来估计整数 $n \leqslant x$ 满足 $\Omega(n) \leqslant \ln_2 x$ 的概率, 这是轻微带偏的 $\Omega(n)$ 值分布中位数问题. 易知

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Omega(n)\leqslant \ln_2 x}} 1 = \frac{1}{2}x - x\frac{C+\langle \ln_2 x\rangle}{\sqrt{2\pi\ln_2 x}} + O\Big(\frac{x}{\ln_2 x}\Big),$$

其中 $C := \dfrac{1}{3} + \nu'(1) = \gamma - \dfrac{2}{3} + \displaystyle\sum_p \Big\{\frac{1}{p-1} - \ln\Big(\frac{1}{1-1/p}\Big)\Big\} \approx 0.367\,98.$

§6.2 定理 6.7 和定理 6.8 是 Deshouillers, Dress 和 Tenenbaum (1979) 的结果. 正如该文章作者们所指出的, 倘若在 (6.23) 中要求对 u 一致, 那么余项 $O(1/\sqrt{\ln x})$ 是最优的: 对 $u \in [0, (\ln 2)/\ln x[$, 有 $F_n(u) = 1/\tau(n)$ $(n \leqslant x)$, 从而

$$S(x,u) \sim \frac{hx}{\sqrt{\pi\ln x}}.$$

② 该式参考了 Noton 私下的意见.

习题

215. Delange (1959) 的一个公式. 令 $\xi = \xi(x) := \ln_2 x$, 及

$$T(x,u) := \sum_{n\leqslant x} u^{\omega(n)} \qquad (x \geqslant 1,\ 0 < u < \infty).$$

(a) 证明对任意 $\varepsilon > 0$, $u \leqslant 1 \leqslant v$, $x \geqslant 1$, 有

$$\big|\{n \leqslant x : |\omega(n) - \xi| > \varepsilon\xi\}\big| \leqslant u^{-(1-\varepsilon)\xi} T(x,u) + v^{-(1+\varepsilon)\xi} T(x,v).$$

并推出存在绝对常数 c, 使得

$$\big|\{n \leqslant x : |\omega(n) - \xi| > \xi^{3/5}\}\big| \ll x \exp\{-c\,\xi^{1/5}\} \qquad (x \geqslant 3).$$

(b) 证明对 $|k - \xi| \leqslant \xi^{3/5}$, 有

$$\mathrm{e}^{-\xi}\frac{\xi^k}{k!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}}\mathrm{e}^{-\vartheta^2/2} \qquad (\xi \to \infty),$$

其中 $\vartheta := (k-\xi)/\sqrt{\xi}$. 并推出对任意整数 $m \geqslant 0$ 成立的 Delange 渐近估计

$$x^{-1}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n) - \xi)^m = \{\mu_m + o(1)\}\xi^{m/2} \qquad (x \to \infty), \tag{6.34}$$

其中

$$\mu_m := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^m \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & \text{若 } m = 2k+1, \\ \dfrac{(2k)!}{2^k k!}, & \text{若 } m = 2k. \end{cases}$$

216. 给出习题 215 中 (6.34) 余项的具体值.

217. Nicolas (1984) 定理. 在本习题中令 $y := x/2^k$. 用 $N_k(x)$ (相应地, $N'_k(x)$) 表示不超过 x 且使得 $\Omega(n) = k$ 的整数 (相应地, 奇数) 个数.

(a) 证明对任意 $x \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, 有 $N_k(x) = \sum_{0\leqslant j\leqslant k} N'_j(2^j y)$.

(b) 证明对任意 δ, $0 < \delta < 1$, 以及对 $|z| \leqslant 3 - \delta$, $x \geqslant 3$ 一致地有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x \\ n\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)}} z^{\Omega(n)} = x(\ln x)^{z-1}\Big\{zh(z) + O_\delta\Big(\frac{1}{\ln x}\Big)\Big\},$$

其中 $h(z) := \dfrac{2^{-z}}{\Gamma(z+1)}\displaystyle\prod_{p>2}\Big(1 - \frac{z}{p}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^z.$

(c) 对 $z=\frac{5}{2}$ 利用前述结论, 证明上界估计

$$N_j'(x) \ll x(\ln x)^{3/2}(\tfrac{2}{5})^j \qquad (x \geqslant 3,\, j \geqslant 1).$$

(d) 令 $Y := \ln_2(3y)$, 并假设 $y \geqslant 1$. 证明

$$\sum_{j>\frac{5}{2}Y} N_j'(2^j y) \ll y(\ln 3y)^{1-c_1},$$

其中 $c_1 = \frac{5}{2}\ln\frac{5}{4} - \frac{1}{2} > \frac{1}{20}$.

(e) 由 (b) 推出对 $x \geqslant 3$ 及 $j \leqslant \frac{5}{2}\ln_2 x$ 一致地有

$$N_j'(x) = \frac{x}{\ln x}\Big\{Q_j(\ln_2 x) + O\Big(\frac{(\ln_2 x)^j}{j!\ln x}\Big)\Big\},$$

其中 $Q_j(x) := \sum_{m+\ell=j-1} \frac{1}{m!\ell!} h^{(m)}(0) X^l$.

(f) 证明 $\frac{1}{m!}h^{(m)}(0) \ll \left(\frac{3}{8}\right)^m \quad (m \geqslant 0)$, 并推出

$$Q_j(X) \ll (\tfrac{3}{8})^j \mathrm{e}^{8X/3} \quad (j > \tfrac{5}{2}X),$$

$$Q_j'(X) \ll \frac{X^{j-2}}{(j-2)!} \quad (2 \leqslant j \leqslant \tfrac{5}{2}X).$$

(g) 从 (e) 和 (f) 推出对 $y \geqslant 1$, $j \leqslant \frac{5}{2}Y$ 有

$$N_j'(2^j y) = \frac{2^j y}{\ln 3y}\Big\{Q_j(Y) + O\Big(\frac{Y^{j+1}\mathrm{e}^{-Y}}{j!}\Big)\Big\}.$$

(h) 证明 $\sum_{j\geqslant 1} 2^j Q_j(Y) = 2h(2)\mathrm{e}^{2Y}$ 及

$$\sum_{j>\frac{5}{2}Y} 2^j Q_j(Y) \ll \mathrm{e}^{(2-c_2)Y},$$

其中 $c_2 := \frac{5}{2}\ln\frac{4}{3} - \frac{2}{3} > \frac{1}{20}$.

(i) 证明对任意 $k \in \left[\frac{5}{2}Y, (\ln x)/\ln 2\right]$, 有

$$N_k(x) = Cy\ln 3y\Big\{1 + O((\ln 3y)^{-1/20})\Big\},$$

其中 $C := 2h(2) = \frac{1}{4}\prod_{p>2}\Big(1 + \frac{1}{p(p-2)}\Big)$.

218. Erdős-Kac (1939) 定理.

(a) 由概率论的中心极限定理推出, 对任意实数 λ 有

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k\leqslant x+\lambda\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-x}\frac{x^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

(b) 令 $\varphi_x(t) := \mathrm{e}^{-x}x^t/\Gamma(t+1)$. 证明对 $x \geqslant 1$, $|t-x| \ll \sqrt{x}$ 有

$$\varphi_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{e}^{-(t-x)^2/2x}\Big\{1 + O(1/\sqrt{x})\Big\}.$$

估计 Stieltjes 积分 $\int_{-\infty}^{x+\lambda\sqrt{x}} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}\lfloor t \rfloor$ 并重新得到上题结论.

(c) 对 $\pi_k(x) := \big|\{n \leqslant x \,:\, \omega(n) = k\}\big|$ 应用 Selberg-Delange 方法得到的估计, 证明 Erdős-Kac 定理

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\big|\{n \leqslant x \,:\, \omega(n) \leqslant \ln_2 x + \lambda\sqrt{\ln_2 x}\}\big| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

可以得到怎样的显式余项?

第七章　Tauber 型定理

§7.1　简介, Tauber 型与 Abel 型定理的对偶性

在前面各章中研究了通过数论函数的 Dirichlet 级数解析延拓来估计其和函数的各种方法, 它们的共同关键点是在收敛区域以外对解析延拓的研究. 相反地, 这里则只用生成级数在收敛点的值来得到关于和函数渐近性质的结果. 这类定理有一个明显的好处: 假设的减弱使之便于应用. 作为代价, 余项的质量不很理想. 然而在这样一般的情形下, 往往可以证明得到的结果已经是最优的了.

从 Abel 一个经典结果开始.

定理 7.1 (Abel)　*设 $f(z) := \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 是幂级数, 收敛半径是 1, 在 $s=1$ 处收敛. 对任意实数 ϑ, $0 \leqslant \vartheta < \pi/2$, 及任意扇形*

$$S(\vartheta) := \big\{z : |z|<1, |\arg(1-z)| \leqslant \vartheta\big\},$$

有 $\displaystyle\lim_{z\to 1,\, z\in S(\vartheta)} f(z) = f(1)$.

证明　令 $z = 1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \in S(\vartheta)$, 其中 $r>0$, $|\varphi| \leqslant \vartheta$. 有

$$|z|^2 = 1 - 2r\cos\varphi + r^2 < 1,$$

从而 $r < 2\cos\varphi$. 由于 $z\to 1$ 时 $r \to 0$, 可设 $r \leqslant \cos\vartheta$. 令 $S^*(\vartheta)$ 为 $S(\vartheta)$ 的由该附加条件所定义的子集.

当 $z\in S^*(\vartheta)$ 时, 有

$$|1-z|\cos\vartheta = r\cos\vartheta \leqslant r(2\cos\varphi - r) = 1-|z|^2 \leqslant 2(1-|z|). \tag{7.1}$$

只须证明级数 $f(z)$ 在扇形 $S^*(\vartheta)$ 上一致收敛 (如图 Ⅱ-4), 即

$$\sup_{z\in S^*(\vartheta)}\left|\sum_{n>N}a_nz^n\right|\to 0\qquad (N\to\infty).$$

令 $A_n:=\sum_{N<m\leqslant n}a_m\ (n\geqslant N)$, $\varepsilon_N:=\sup_{n>N}|A_n|$, 从而 $f(1)$ 收敛性的假设等价于 $\lim\limits_{N\to\infty}\varepsilon_N=0$. 由 Abel 求和法, 对$z\in S^*(\vartheta)$, 有

$$\left|\sum_{n>N}a_nz^n\right|=\left|(1-z)\sum_{n>N}A_nz^n\right|\leqslant\frac{\varepsilon_N|1-z||z|^N}{1-|z|}\leqslant\frac{2\varepsilon_N}{\cos\vartheta}.\qquad\square$$

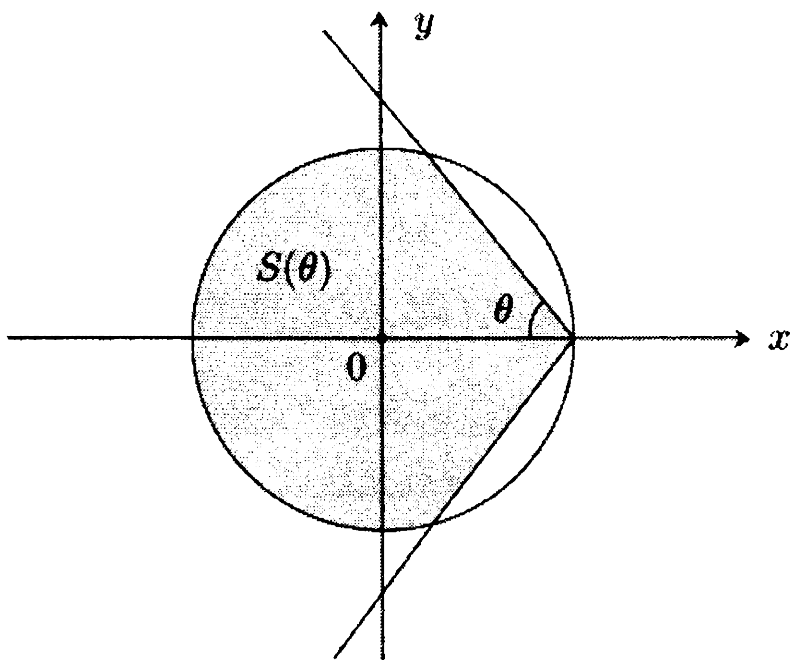


图 Ⅱ-4　扇形 $S(\theta)$

定理 7.1 是一类称为 Abel 型命题的原型. 它们具有如下特征：倘若一个序列 (或函数) 足够正则, 那么其值的一些平均亦具有一定的正则性. 比如 Cesàro 的蕴涵关系:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{0\leqslant m\leqslant n}a_m=a$$

就是一个 Abel 型定理. 令 $b_n:=\sum_{0\leqslant m\leqslant n}a_m$ (从而 $f(z)=\sum_{m\geqslant 0}a_mz^m=(1-z)\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n$), 定理 7.1 也可写成

$$\lim_{n\to+\infty}b_n=b\Longrightarrow\lim_{z\to 1,\,z\in S(\vartheta)}(1-z)\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n=b.$$

Abel 型定理的逆命题一般不成立. 比如, 当 $z\to 1$ 时幂级数

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^nz^n=\frac{1}{1+z}$$

的和趋于 $\frac{1}{2}$, 然而级数在 $z=1$ 处发散. 我们将那些给出了该逆命题成立的充分条件 (称为 Tauber 型条件) 的命题称为 Tauber 型定理. 这方面的第一个成果是奥地利数学家 Alfred Tauber (1897) 得到的, 见 §7.2.

用一个关于 Dirichlet 级数的 Abel 型定理来结束本节.

定理 7.2 令 $F(s) := \sum_{n\geqslant 1} a_n/n^s$ 为 Dirichlet 级数, 在 $\sigma > a$ 上收敛. 倘若存在两个常数 $c, \omega, \omega > -1$, 使得

$$\sum_{n\leqslant x} a_n = \left\{\frac{c}{\Gamma(\omega+1)} + o(1)\right\} x^a (\ln x)^\omega \qquad (x\to\infty),$$

那么

$$F(\sigma) = \frac{ca+o(1)}{(\sigma-a)^{\omega+1}} \qquad (\sigma\to a+).$$

证明 令 $A(t) := \sum_{n\leqslant \mathrm{e}^t} a_n$ 及

$$G(h) := \int_{0-}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+h)t}\,\mathrm{d}A(t) \qquad (h>0).$$

由于

$$\frac{c}{\Gamma(\omega+1)}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+h)t} t^\omega\,\mathrm{d}\{\mathrm{e}^{at}\} = \frac{ca}{\Gamma(\omega+1)}\int_0^{+\infty} t^\omega \mathrm{e}^{-ht}\,\mathrm{d}t = \frac{ca}{h^{\omega+1}},$$

故有

$$\begin{aligned} G(h) - \frac{ca}{h^{\omega+1}} &= (a+h)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+h)t} A(t)\,\mathrm{d}t - \frac{ca}{h^{\omega+1}} \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+h)t}\left\{(a+h)A(t) - \frac{ac}{\Gamma(\omega+1)}\mathrm{e}^{at}t^\omega\right\}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

由假设, 存在函数 $\varepsilon(t)$ 满足 $\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=0$, 且使得大括号中的表达式形如

$$\varepsilon(t)\mathrm{e}^{at}t^\omega + O(h\mathrm{e}^{at}t^\omega).$$

这便推出

$$G(h) - \frac{ca}{h^{\omega+1}} = o\left(\frac{1}{h^{\omega+1}}\right) \qquad (h\to 0+). \qquad \square$$

§7.2 Tauber 定理

原始形式下的 Tauber (1897) 定理即是 Abel 定理的逆命题.

定理 7.3 (Tauber)　令 $f(z) := \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 为收敛半径为 1 的幂级数. 假设当 $z \to 1$ 时 $f(z)$ 收敛于区间 $[0,1[$ 中的某数 ℓ. 在附加条件

$$\text{(T)} \qquad \sum_{n\leqslant x} n a_n = o(x) \qquad (x\to\infty)$$

下, 级数 $\sum a_n$ 收敛, 其和等于 ℓ.

证明　令

$$A(x) := \sum_{n\leqslant x} a_n, \quad \alpha(x) := \int_0^x t\,\mathrm{d}A(t) \qquad (x>0),$$

$$\text{(7.2)} \qquad G(u) := \frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}, \quad g(u) := -G'(u) = \frac{(1+u)\mathrm{e}^{-u}-1}{u^2} \qquad (u>0)$$

$$H(u) := \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}, \quad h(u) := -H'(u) = \frac{(1+u)\mathrm{e}^{-u}}{u^2} \qquad (u>0).$$

有

$$\begin{aligned}
f\left(\mathrm{e}^{-1/x}\right) - A(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x G(t/x)t\,\mathrm{d}A(t) + \frac{1}{x}\int_x^\infty H(t/x)t\,\mathrm{d}A(t) \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x \int_{t/x}^\infty g(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha(t) + \frac{1}{x}\int_x^\infty \int_{t/x}^\infty h(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha(t) \\
&= \frac{1}{x}\int_0^\infty g(u)\,\mathrm{d}u \int_0^{\min(1,u)x} \mathrm{d}\alpha(t) + \frac{1}{x}\int_1^\infty h(u)\,\mathrm{d}u \int_x^{ux} \mathrm{d}\alpha(t) \\
&= \int_0^1 g(u)\frac{\alpha(ux)}{x}\,\mathrm{d}u - \frac{\alpha(x)}{x} + \int_1^\infty h(u)\frac{\alpha(ux)}{x}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

由于 $\alpha(x)/x$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上有界, 对 x 一致地有 $\alpha(ux)/x \ll u$. 而当 u 固定而 $x\to\infty$ 时, $\alpha(ux)/x$ 趋于 0, 同时 $ug(u)$ 和 $uh(u)$ 又分别在 $[0,1]$ 和 $[1,\infty[$ 上可积, 由控制收敛定理得

$$\text{(7.4)} \qquad f\left(\mathrm{e}^{-1/x}\right) - A(x) = o(1) \qquad (x\to\infty).$$

这便证明了 Tauber 定理.　□

注意到条件 (T) 实际上是 $\sum a_n$ 收敛的必要条件. 事实上, 使用证明中引进的记号, 由 Abel 求和法, 得

$$\text{(7.5)} \qquad \frac{\alpha(x)}{x} = A(x) - \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x \{A(x)-A(t)\}\,\mathrm{d}t.$$

从而 $A(x)\to\ell$ 即推出 $\alpha(x) = o(x)$.

至此可以如下叙述积分形式下更一般的 Tauber 型定理.

定理 7.4 令 $\omega\in\mathbb{R}^+$ 和 $A:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 为在任意有限区间上有界变差的函数. 假设 Laplace–Stieltjes 积分

$$F(\sigma):=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}A(t)$$

在 $\sigma>0$ 上收敛, 并满足 $F(\sigma)=o(1/\sigma^\omega)$ $(\sigma\to 0+)$, 那么以下命题等价:

(i) $A(x)-A(0)=o(x^\omega)\qquad(x\to\infty)$,

(ii) $\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{d}A(t)=o(x^{\omega+1})\qquad(x\to\infty)$.

证明 通过用标准的取极限计算过程所证明的计算式 (7.3) 可将 $F(\sigma)-A(1/\sigma)+A(0)$ 表示成 (7.2) 中定义的量 $\alpha(x)$ 的函数. 用 Lebesgue 控制收敛定理即得题设结论. □

注 定理 7.3 即是 $\omega=0$ 时的定理 7.4: 改变 $A(0)$ 的值便得到假设 $F(\sigma)=o(1)$.

考察定理 7.4 的叙述, 可以推广并明确 Tauber 型定理的概念. 给定 $\mathbb{R}^+\times S$ 上的实变函数 $\varphi(t,s)$, 其中 $S\subseteq\mathbb{C}$, 当如下积分收敛时, 定义其为在任意有限区间上有界变差的函数 A 的 φ-变换

$$F(s):=\int_0^\infty \varphi(t,s)\,\mathrm{d}A(t). \tag{7.6}$$

假设下述 Abel 型定理对于 S 闭包中的点 s_0 成立: 倘若 $\lim_{t\to\infty}A(t)=\ell$, 那么积分 (7.6) 对任意 $s\in S$ 收敛, 且

$$\lim_{s\to s_0,\,s\in S}F(s)=\ell. \tag{7.7}$$

在此情形下, 所谓 Tauber 型定理, 是指给出从 (7.7) 可推出 $\lim_{t\to\infty}A(t)=\ell$ 的充分条件的定理.

也可将形容词"Tauber 型"用在那些在形如 (7.7) 的假设下给出 $A(t)$ 在无穷远点附近的渐近性质的结论 (比如说某些 ψ-变换有极限), 可见 Bingham, Goldie 和 Teugels (1987) 第四章.

目前关于 Tauber 型定理的标准参考文献是 Korevaar (2004) 的概论.

§7.3 Hardy–Littlewood 和 Karamata 定理

显然定理 7.3 的 Tauber 型条件 (T) 是假设

$$a_n=o(1/n)\qquad(n\to\infty)$$

的推论. Hardy 和 Littlewood 于 1913 年证明了单向的条件

$$a_n\geqslant -K/n\qquad(n\geqslant 1)$$

就足够了, 其中 K 是任意常数. 下面 Karamata (1931) 的定理给出该结论一个简单的新证.

定理 7.5 (Karamata) 设 $A(t)$ 为单调上升函数, 使得积分

$$F(\sigma) := \int_0^\infty e^{-\sigma t}\, dA(t) \tag{7.8}$$

对任意 $\sigma > 0$ 收敛. 假设存在两个实数 $c \geqslant 0, \omega > 0$, 使得

$$F(\sigma) = \frac{c + o(1)}{\sigma^\omega} \qquad (\sigma \to 0+),$$

那么

$$A(x) = \frac{\{c + o(1)\}x^\omega}{\Gamma(\omega + 1)} \qquad (x \to +\infty).$$

证明 不失一般性, 可设 $A(0) = 0$. 对任意固定的整数 $n \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned} F\big((n+1)\sigma\big) &= \int_0^\infty e^{-n\sigma t} e^{-\sigma t}\, dA(t) = \frac{\{c + o(1)\}}{\Gamma(\omega)\sigma^\omega} \frac{\Gamma(\omega)}{(n+1)^\omega} \\ &= \frac{\{c + o(1)\}}{\Gamma(\omega)\sigma^\omega} \int_0^\infty e^{-nt} e^{-t} t^{\omega - 1}\, dt \qquad (\sigma \to 0+). \end{aligned}$$

从而对每个固定的多项式 P 有

$$\int_0^\infty \frac{P(e^{-\sigma t})}{e^{\sigma t}}\, dA(t) = \frac{\{c + o(1)\}}{\Gamma(\omega)\sigma^\omega} \int_0^\infty P(e^{-t}) \frac{t^{\omega - 1}}{e^t}\, dt \qquad (\sigma \to 0+). \tag{7.9}$$

将证明若将 P 换成如下在 $[0,1]$ 上定义的函数 χ:

$$\chi(e^{-t}) = \begin{cases} e^t, & 若\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & 若\ t > 1, \end{cases}$$

并令 σ 在 $1/\sigma$ 不是 A 的不连续点的限制下趋于 0 时上述关系仍成立. 暂先承认之, 得

$$\begin{aligned} A\Big(\frac{1}{\sigma}\Big) &= \int_0^\infty \frac{\chi(e^{-\sigma t})}{e^{\sigma t}}\, dA(t) = \frac{\{c + o(1)\}}{\Gamma(\omega)\sigma^\omega} \int_0^\infty \chi(e^{-u}) \frac{u^{\omega - 1}}{e^u}\, du \\ &= \frac{\{c + o(1)\}}{\Gamma(\omega)\sigma^\omega} \int_0^1 u^{\omega - 1}\, du = \frac{c + o(1)}{\Gamma(\omega + 1)\sigma^\omega}. \end{aligned}$$

由 A 的单调上升性假设, 即便对 σ 的值不加限制, 该渐近关系仍成立, 于是便得结论.

为证明 (7.9) 对 χ 成立, 自然要用多项式逼近 χ. 考虑 $[0,1]$ 上的函数 $H(t)$, 定义为

$$H(t) := \frac{\chi(t) - t}{t(1-t)} \quad (0 < t < 1), \quad H(0) = -1, \quad H(1) = 2. \tag{7.10}$$

它在 $t=1/\mathrm{e}$ 有唯一的不连续点. 对每个 $\varepsilon>0$, 存在连续函数 f 和 g, 满足[1]

$$(7.11)\qquad \begin{cases} f(t)\leqslant H(t)\leqslant g(t), & 若\ 0\leqslant t\leqslant 1,\\ g(t)-f(t)\leqslant \varepsilon, & 若\ |t-1/\mathrm{e}|>\varepsilon,\\ g(t)-f(t)\leqslant 12, & 若\ |t-1/\mathrm{e}|\leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

由 Weierstrass 逼近定理, 存在多项式 p 和 q, 使得

$$(7.12)\qquad \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|p(t)-f(t)|\leqslant\varepsilon,\qquad \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|q(t)-g(t)|\leqslant\varepsilon.$$

令

$$P(t):=t+t(1-t)\big(p(t)-\varepsilon\big),\qquad Q(t):=t+t(1-t)\big(q(t)+\varepsilon\big),$$

由前述知

$$(7.13)\qquad P(t)\leqslant\chi(t)\leqslant Q(t)\qquad(0\leqslant t\leqslant 1),$$

且对 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ 有

$$\int_0^1\frac{Q(t)-P(t)}{t(1-t)}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\{q(t)-p(t)\}\,\mathrm{d}t+2\varepsilon.$$

由 (7.11) 和 (7.12) 易知最后一个积分不超过 27ε. 在上述计算中改变 ε 的值后知存在两个多项式 P 和 Q 满足 (7.13) 及

$$(7.14)\qquad \int_0^1\frac{Q(t)-P(t)}{t(1-t)}\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon.$$

令 σ 绕过 $A(1/t)$ 的不连续点趋于 $0+$, 容易证明函数 χ 满足 (7.9). 事实上, 有

$$\begin{aligned}A(1/\sigma)&=\int_0^\infty\frac{\chi(\mathrm{e}^{-\sigma t})}{\mathrm{e}^{-\sigma t}}\,\mathrm{d}A(t)\\&\leqslant\int_0^\infty\frac{Q(\mathrm{e}^{-\sigma t})}{\mathrm{e}^{-\sigma t}}\,\mathrm{d}A(t)=\frac{\{c+o(1)\}}{\Gamma(\omega)\sigma^\omega}\int_0^\infty Q(\mathrm{e}^{-t})\frac{t^{\omega-1}}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

类似地,

$$A(1/\sigma)\geqslant\frac{\{c+o(1)\}}{\Gamma(\omega)\sigma^\omega}\int_0^\infty P(\mathrm{e}^{-t})\frac{t^{\omega-1}}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t.$$

这样由 (7.14), 得

$$\int_0^\infty\frac{Q}{P}(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t}t^{\omega-1}\,\mathrm{d}t\ \substack{\leqslant\\ \geqslant}\ \int_0^\infty\chi(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t}t^{\omega-1}\,\mathrm{d}t\pm R,$$

[1] 数字 12 只用来盖过 H 在 $t=1/\mathrm{e}$ 点的变差.

其中

$$R := \int_0^\infty \{Q(\mathrm{e}^{-t}) - P(\mathrm{e}^{-t})\} \frac{t^{\omega-1}}{\mathrm{e}^t} \,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \left\{ \frac{Q(t)-P(t)}{t(1-t)} \right\} t(1-t) \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{\omega-1} \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon M,$$

$M := \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} t(1-t)\{\ln(1/t)\}^{\omega-1}$ 与 σ 和 ε 无关. 依次令 σ 和 ε 趋于 0, 便得要求的公式. □

注 当 $\omega = 0$ 时, 定理 7.5 的结论以如下形式仍成立

$$A(x) - A(0) \to c \qquad (x \to \infty).$$

显然这由分部积分公式

$$F(\sigma) = -A(0) + \sigma \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t} A(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \big\{ A(t/\sigma) - A(0) \big\} \,\mathrm{d}t$$

可得. 由于 A 单调上升, 对每个 t, $A(t/\sigma)$ 趋于一个有限或无限的极限 $\alpha := \sup A(t)$. 由 Lebesgue 控制收敛定理, 有

$$c = \lim F(\sigma) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \{\alpha - A(0)\} \,\mathrm{d}t = \alpha - A(0).$$

为从 Hardy–Littlewood 定理得到 Karamata 定理, 需要下述 Landau (1906, 1929) 引理. 该引理还自有其意义.

定理 7.6 (Landau) *令 f 为 $\mathbb{R}^+$ 上的二阶可导函数, α 为任意实数, M 为正常数. 若*

(a) $f(x) = o(x^\alpha) \qquad (x \to +\infty,$ 相应地, $0+)$,

(b) $f''(x) \leqslant M x^{\alpha-2} \qquad (x > 0)$,

那么

$$f'(x) = o(x^{\alpha-1}) \qquad (x \to +\infty, \text{ 相应地}, 0+).$$

证明 令 δ 为固定的实数, $0 < \delta \leqslant \frac{1}{2}$. Taylor 公式推出对任意 $x > 0$, 存在实数 $\vartheta_\pm = \vartheta_\pm(x, \delta) \in]0, 1[$, 使得

$$f(x \pm \delta x) - f(x) = \pm \delta x f'(x) + \tfrac{1}{2} \delta^2 x^2 f''\big(x(1 \pm \vartheta_\pm \delta)\big),$$

其中二阶导数不超过

$$M x^{\alpha-2} \{(1+\delta)^{\alpha-2} + (1-\delta)^{\alpha-2}\} \leqslant K x^{\alpha-2},$$

K 与 δ 无关. 于是由 (a) 有

$$o(x^\alpha) \leqslant \pm \delta x f'(x) + K \delta^2 x^\alpha \qquad (x \to +\infty, \text{ 相应地}, 0+),$$

两边除以 δx^α 并令 x 趋于 $+\infty$ 或 $0+$, 得

$$\lim \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix}\, x^{1-\alpha} f'(x) \lesseqgtr \pm K\delta.$$

由于 δ 可任意小, 结论成立. □

现在可证明比 Hardy–Littlewood 定理更一般的结论.

给定 $\omega \geqslant 0$, 用 $\mathcal{V}^*(\mathbb{R}^+)$ 表示在任意有限区间上有界变差且 Laplace–Stieltjes 变换 (7.8) 在 $\sigma > 0$ 上收敛的函数 $A: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 组成的函数类, 并用 $\mathcal{K}(\omega)$ 表示对于某适当的常数 c (未必为正) 同时满足

$$F(\sigma) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}A(t) = \frac{c + o(1)}{\sigma^\omega} \quad (\sigma \to 0+) \tag{7.15}$$

和

$$A(x) - A(0) = \frac{\{c + o(1)\}x^\omega}{\Gamma(\omega+1)} \quad (x \to \infty) \tag{7.16}$$

的函数组成的子类. 注意到仅当 $\omega = 0$ 时 (7.16) 中的 $A(0)$ 项是有意义的.

定理 7.7 (广义 Hardy–Littlewood–Karamata 定理) *令 $\omega \geqslant 0$ 及 $A \in \mathcal{V}^*(\mathbb{R}^+)$. 倘若存在 $c \in \mathbb{R}$, 使得 (7.15) 成立, 以及 $B \in \mathcal{K}(\omega+1)$, 使得测度 $t\,\mathrm{d}A(t) + \mathrm{d}B(t)$ 为正, 那么 $A \in \mathcal{K}(\omega)$.*

证明 当 $\omega = 0$ 时通过改变 $A(0)$, 或当 $\omega > 0$ 时通过将 $A(x)$ 换成 $A(x) - cx^\omega/\Gamma(\omega+1)$, 可设 $c = 0$. 另外, 对 $0 < \sigma < 1$, 下式对于适当的常数 K 成立:

$$\begin{aligned} F''(\sigma) &= \int_0^\infty t^2 \mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}A(t) \\ &\geqslant -\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}B(t) = \int_0^\infty \{1 - \sigma t\}B(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{-K}{\sigma^{\omega+2}}, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式源自 $B \in \mathcal{K}(\omega+1)$ 的事实. 由定理 7.6, 得

$$F'(\sigma) = -\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}A(t) = o(1/\sigma^{\omega+1}) \qquad (\sigma \to 0+).$$

再次利用 $B \in \mathcal{K}(\omega+1)$ 的条件知, 对适当的常数 b, 有

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t}\{t\,\mathrm{d}A(t) + \mathrm{d}B(t)\} = \frac{b + o(1)}{\sigma^{\omega+1}}.$$

由 Karamata 定理 7.5 于是推出

$$\int_0^x \{t\,\mathrm{d}A(t) + \mathrm{d}B(t)\} = \frac{\{b + o(1)\}x^{\omega+1}}{\Gamma(\omega+2)} = \int_0^x \mathrm{d}B(t) + o\big(x^{\omega+1}\big).$$

要求的结论由定理 7.4 而得. □

推论 7.8 (Hardy–Littlewood) 令 $f(z) := \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 为收敛半径为 1 的实系数幂级数, 对适当的常数 K 满足

$$na_n \geqslant -K \qquad (n \geqslant 0). \tag{7.17}$$

倘若

$$\lim_{z\to 1-} f(z) = \ell, \tag{7.18}$$

那么 $\sum_{n\geqslant 0} a_n = \ell$.

证明 应用定理 7.7 于 $A(x) := \sum_{n\leqslant x} a_n$, $B(x) := K\lfloor x\rfloor$ 及 $\omega = 0$ 即可. □

在 Dirichlet 级数的框架下, 得如下结论.

推论 7.9 (Hardy–Littlewood–Karamata) 设 $F(s) := \sum_{n\geqslant 1} a_n/n^s$ 是在 $\sigma > 1$ 上收敛的 Dirichlet 级数. 假设存在实数 c, K, ω ($\omega \geqslant 0$), 使得

$$a_n \geqslant -K(\ln n)^{\omega-1} \qquad (n \geqslant 2) \tag{7.19}$$

及

$$F(\sigma) = \frac{c + o(1)}{(\sigma - 1)^{\omega}} \qquad (\sigma \to 1+). \tag{7.20}$$

那么

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{a_n}{n} = \frac{\{c + o(1)\}}{\Gamma(\omega + 1)} (\ln x)^{\omega} \qquad (x \to +\infty). \tag{7.21}$$

注 更一般地, 条件 (7.19) 可换成 $a_n \geqslant -b_n \quad (n \geqslant n_0)$, 其中 b_n 是对适当的常数 c 和同一个 ω 同时满足 (7.20) 和 (7.21) 的某 Dirichlet 级数的通项. 比如

$$a_n \geqslant -K_1(\ln n)^{\omega-1} - K_2\tau(n)^{\alpha} \qquad (n \geqslant 2) \tag{7.22}$$

就是一类这样的条件, 其中 $\alpha := \ln\omega/\ln 2$.

§7.4 Karamata 定理的余项

20 世纪 50 年代间, Tauber 理论曾沿着实效形式, 也就是显式余项公式的方向发展. 这里给出 Karamata 定理 7.5 的一个实效形式. 这是 Freud (1952) 的结果.

定理 7.10 (Karamata–Freud) 令 $A(t)$ 为单调递增函数, 使得积分

$$F(\sigma) := \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}A(t)$$

对任意 $\sigma > 0$ 收敛. 假设存在两个实常数 $c \geqslant 0$, $\omega > 0$ 以及单调递增函数 $\psi(t)$, 使得

$$\psi(t) \to +\infty, \quad \text{对足够大的 } t,\ \psi(t)/t^{\omega} \text{ 单调上升}, \tag{7.23}$$

且

$$F(\sigma) = \Big\{c + O\Big(\frac{1}{\psi(1/\sigma)}\Big)\Big\}\sigma^{-\omega} \qquad (\sigma \to 0+), \tag{7.24}$$

那么

$$A(x) = \Big\{c + O\Big(\frac{1}{\ln\psi(x)}\Big)\Big\}\frac{x^{\omega}}{\Gamma(\omega+1)} \qquad (x \to \infty). \tag{7.25}$$

须注意到, 倘若不加条件, (7.25) 的余项不能改进. 下述 Karamata (1952) 的反例说明了这一点. 考虑单调递增函数

$$A(x) := \int_0^{x} \big(1 + \cos\{(\ln t)^2\}\big)\,\mathrm{d}t.$$

一方面有

$$A(x) = x + \Omega_{\pm}\Big(\frac{x}{\ln x}\Big). \tag{7.26}$$

这由简单的分部积分可得:

$$\begin{aligned}\int_2^{x} \cos\big\{(\ln t)^2\big\}\,\mathrm{d}t &= \int_2^{x} \frac{t}{2\ln t}\,\mathrm{d}\sin\big\{(\ln t)^2\big\}\\ &= \Big[\frac{t}{2\ln t}\sin\big\{(\ln t)^2\big\}\Big]_2^{x} - \int_2^{x}\Big(1 - \frac{1}{\ln t}\Big)\frac{\sin\{(\ln t)^2\}}{2\ln t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{x}{\ln x}\Big\{\frac{1}{2}\sin\big\{(\ln x)^2\big\} + O\Big(\frac{1}{\ln x}\Big)\Big\},\end{aligned}$$

其中最后一个积分的估计仍由分部积分而得.

另一方面, 将看到有

$$F(\sigma) = \frac{1}{\sigma} + O(1) \qquad (\sigma \to 0+). \tag{7.27}$$

显然 $F(\sigma) = \frac{1}{\sigma} + \Re e\, J(\sigma) + O(1)$, 其中

$$J(\sigma) := \int_1^{\infty} \exp\big\{-\sigma t + \mathrm{i}(\ln t)^2\big\}\,\mathrm{d}t.$$

将 $[1,+\infty[$ 上的积分换成圆弧 $\Gamma := \{e^{i\vartheta} : 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/4\}$ 及半直线 $\Delta := \{re^{i\pi/4} : r \geqslant 1\}$ 上的复积分来估计 $J(\sigma)$. 由上界估计

$$(7.28)\quad \left|\exp\left\{-\sigma z + i(\log z)^2\right\}\right| \leqslant R^{-2\vartheta}e^{-\sigma R\cos\vartheta} \quad \left(z = Re^{i\vartheta},\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/4\right)$$

知, 对任意 $\sigma > 0$ 来说这样的变换都是可行的. 而 Γ 上的积分显然有界, 并且对 $\vartheta = \pi/4 > \frac{1}{2}$ 用上界估计 (7.28) 可证明 Δ 上的积分绝对收敛, 并有与 $\sigma > 0$ 无关的上界. 这推出了 (7.27).

定理 7.10 证明的方法是具体化 Karamata 定理证明中函数 χ 的多项式逼近. 其精确度用 L^1 范数衡量. 并且有必要控制系数的大小. 定义多项式 $P(x) := \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$ 的长度 $\ell(P)$ 为

$$\ell(P) := \sum_{0 \leqslant m \leqslant n} |a_m|.$$

将证明以下的单边估计.

定理 7.11 *设 $f(t)$ 为 $[0,1]$ 上的有界变差函数. 存在不依赖于 f 的常数 A_1, A_2, 使得对任意整数 $n \geqslant 1$ 存在次数不超过 n 的常数 p 和 q, 满足*

$$(7.29)\quad \begin{cases} p(t) \leqslant f(t) \leqslant q(t), & \text{若 } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \displaystyle\int_0^1 \big(q(t) - p(t)\big)\,dt \leqslant A_1/n, & \\ \ell(p) + \ell(q) \leqslant A_2^n. & \end{cases}$$

暂时承认该结果, 看如何得出定理 7.10.

由第二个假设 (7.23) 知关系 (7.24) 推出对任意整数 $m \geqslant 1$ 有

$$\int_0^\infty e^{-m\sigma t}e^{-\sigma t}\,dA(t) = \frac{1}{\sigma^\omega}\left\{\frac{c}{\Gamma(\omega)}\int_0^\infty e^{-mt}\frac{t^{\omega-1}}{e^t}\,dt + O\Big(\frac{1}{\psi(1/\sigma)}\Big)\right\}.$$

由线性知对任意多项式 P 有

$$(7.30)\quad \int_0^\infty \frac{P(e^{-\sigma t})}{e^{\sigma t}}\,dA(t) = \frac{1}{\sigma^\omega}\left\{\frac{c}{\Gamma(\omega)}\int_0^\infty \frac{P(e^{-t})}{e^t}t^{\omega-1}\,dt + O\Big(\frac{\ell(P)}{\psi(1/\sigma)}\Big)\right\}.$$

今对 (7.10) 中定义的函数 H 用定理 7.11 并令 $P(t) := t + t(1-t)p(t)$, $Q(t) := t + t(1-t)q(t)$. 对任意 $[0,1]$ 中的 t 有 $P(t) \leqslant \chi(t) \leqslant Q(t)$ 且由 (7.30) 知当 $1/\sigma$ 不是 A 的不连续点时有

$$A(1/\sigma) \lesseqgtr \frac{1}{\sigma^\omega}\left\{\frac{c}{\Gamma(\omega+1)} \pm R(\sigma)\right\},$$

其中

$$\begin{aligned} R(\sigma) &\ll \int_0^\infty \{Q(e^{-t}) - P(e^{-t})\}e^{-t}t^{\omega-1}\,dt + \frac{A_2^n}{\psi(1/\sigma)} \\ &= \int_0^1 \{q(t) - p(t)\}t(1-t)\Big(\ln\frac{1}{t}\Big)^{\omega-1}\,dt + \frac{A_2^n}{\psi(1/\sigma)} \ll \frac{A_1}{n} + \frac{A_2^n}{\psi(1/\sigma)}. \end{aligned}$$

选取 $n := \lfloor \ln\psi(1/\sigma)/(2\ln A_2)\rfloor$ 便得估计 (7.25).

在定理 7.11 的证明中将用到如下关于定义于 $[-1,1]$ 上的 Tchébychev 多项式 $T_n(x)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ 的经典计算

$$T_n(\cos\vartheta)=\cos n\vartheta \qquad (\vartheta\in\mathbb{R}).$$

引理 7.12 对任意整数 $n\geqslant 1$, 有

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\sum_{0\leqslant m\leqslant n/2}(-1)^m\frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m}(2x)^{n-2m}. \tag{7.31}$$

特别地,

$$\ell(T_n)\leqslant n\bigl(1+\sqrt{2}\bigr)^n. \tag{7.32}$$

证明 证明的出发点是和差化积公式

$$\sin(n\pm 1)\vartheta=\sin n\vartheta\cos\vartheta\pm\cos n\vartheta\sin\vartheta,$$

从中得出

$$2\cos n\vartheta=\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}-\frac{\sin(n-1)\vartheta}{\sin\vartheta}. \tag{7.33}$$

令 $f_\vartheta(r):=|1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}|^2$ $(0\leqslant r<1)$. 一方面,

$$\begin{aligned}\frac{1}{f_\vartheta(r)}&=\frac{1}{(1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta})(1-r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta})}=\frac{1}{2\mathrm{i}r\sin\vartheta}\left\{\frac{1}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}}-\frac{1}{1-r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}}\right\}\\&=\sum_{n\geqslant 0}\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}r^n,\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\frac{1}{f_\vartheta(r)}&=\frac{1}{1-(2r\cos\vartheta-r^2)}=\sum_{j\geqslant 0}(2r\cos\vartheta-r^2)^j\\&=\sum_{j\geqslant 0}\sum_{0\leqslant k\leqslant j}\binom{j}{k}(2r\cos\vartheta)^k(-1)^{j-k}r^{2j-2k}\\&=\sum_{n\geqslant 0}r^n\sum_{0\leqslant \ell\leqslant n/2}(-1)^\ell\binom{n-\ell}{\ell}(2\cos\vartheta)^{n-2\ell},\end{aligned}$$

其中最后一个等式中用了变量替换 $\ell=j-k$. 从而

$$\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}=\sum_{0\leqslant \ell\leqslant n/2}(-1)^\ell\binom{n-\ell}{\ell}(2\cos\vartheta)^{n-2\ell}. \tag{7.34}$$

代入 (7.33) 并取 $x := \cos\vartheta$, 得

$$
\begin{aligned}
2\cos n\vartheta
&= \sum_{0\leqslant \ell\leqslant n/2}(-1)^{\ell}\binom{n-\ell}{\ell}(2x)^{n-2\ell} - \sum_{0\leqslant h\leqslant n/2-1}(-1)^{h}\binom{n-2-h}{h}(2x)^{n-2-2h}\\
&= \sum_{0\leqslant \ell\leqslant n/2}(-1)^{\ell}\binom{n-\ell}{\ell}(2x)^{n-2\ell} + \sum_{1\leqslant \ell\leqslant n/2}(-1)^{\ell}\binom{n-1-\ell}{\ell-1}(2x)^{n-2\ell},
\end{aligned}
$$

于是终得 (7.31).

对 $y := \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ 用不等式 $\binom{n-m}{m}y^m \leqslant (1+y)^{n-m}$ 便得 (7.32). □

定理 7.11 的证明 令 Y 为 Heaviside 函数, 其定义为

$$
Y(t) = \begin{cases} 0, & \text{若 } t<0,\\ 1, & \text{若 } t\geqslant 0. \end{cases}
$$

将证明存在绝对常数 B_1, B_2, 使得对每个 $n\geqslant 1$, 存在次数 $\leqslant n$ 的多项式 R, S, 满足

$$
\begin{cases}
R(t)\leqslant Y(t)\leqslant S(t), & \text{若 } -1\leqslant t\leqslant 1,\\
\displaystyle\int_{-1}^{1}\{S(t)-R(t)\}\,\mathrm{d}t \leqslant B_1/n,\\
\ell(R)+\ell(S)\leqslant B_2^n.
\end{cases}
\tag{7.35}
$$

由该特殊情形可得一般的结论. 事实上, 若 f_1 和 f_2 是两个单调递增函数, 使得 $f=f_1-f_2$, 那么 $[0,1]$ 上定义的函数

$$
\begin{aligned}
p(t) &:= f(0)+\int_0^1 R(t-\xi)\,\mathrm{d}f_1(\xi)-\int_0^1 S(t-\xi)\,\mathrm{d}f_2(\xi),\\
q(t) &:= f(0)+\int_0^1 S(t-\xi)\,\mathrm{d}f_1(\xi)-\int_0^1 R(t-\xi)\,\mathrm{d}f_2(\xi)
\end{aligned}
$$

相对于

$$
A_1 = B_1\int_0^1 \mathrm{d}(f_1+f_2)(\xi), \qquad A_2 = 1+2|f(0)|+2B_2\int_0^1 \mathrm{d}(f_1+f_2)(\xi)
$$

满足条件 (7.29).

R 和 S 的构造用到了 Tchébychev 多项式的性质 (如图 Ⅱ–5). 对 $r\geqslant 1$ 记 $x_\nu := \cos\big(\pi(\nu-\frac{1}{2})/r\big)$ $(1\leqslant\nu\leqslant r)$ 为 $T_r(x)$ 的零点并令 $m := \lfloor\frac{1}{2}(r+1)\rfloor$, 这样 $x_{m+1}<0\leqslant x_m$. 定义 $R(t)$ 为唯一的 $n=2r-2$ 次多项式, 满足

$$
R(x_\nu) = \begin{cases} 1, & \text{若 } 1\leqslant\nu\leqslant m-1,\\ 0, & \text{若 } m\leqslant\nu\leqslant r, \end{cases} \qquad R'(x_\nu)=0, \quad (\nu\neq m).
$$

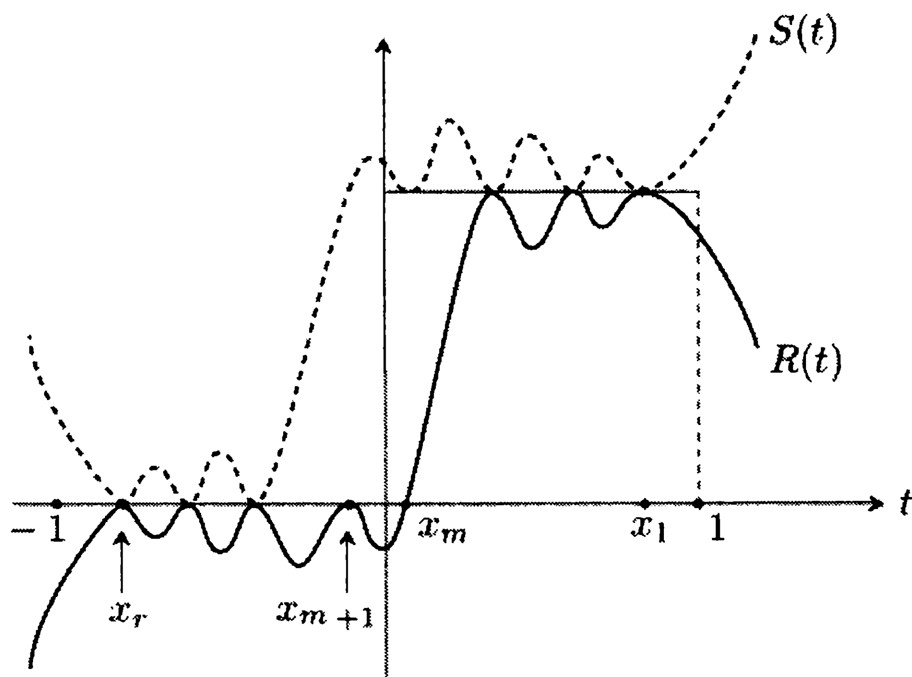


图 II–5 多项式 R 和 S

这样 $R'(t)$ 在 $(r-2)$ 个区间 $]x_{\nu+1},x_\nu[$ $(1\leqslant\nu\leqslant r,\ \nu\neq m-1)$ 的每一个中都至少取一次零值. 这显然给出了 $r-1+r-2=n-1$ 零点, 从而 $R'(t)$ 在 $x_m\leqslant t<x_{m-1}$ 上非零. 而由 $R(x_{m-1})=1>R(x_m)=0$ 得 $R'(x_m)>0$. 这说明 $R(t)$ 在每个 x_ν $(\nu\neq m)$ 处取局部极大值, 且在相邻两个极大值点之间取到局部极小值. 特别地, 有 $R(t)\leqslant Y(t)\quad(-1\leqslant t\leqslant 1)$.

对称地定义 $S(t)$, 满足方程

$$S(x_\nu)=\begin{cases}1, & 若\ \nu\leqslant m+1,\\ 0, & 若\ m+2\leqslant\nu\leqslant r,\end{cases}\qquad S'(x_\nu)=0\quad(\nu\neq m+1).$$

这可推出$S(t)\geqslant Y(t)\quad(-1\leqslant t\leqslant 1)$.

为得到 (7.35) 的第二个性质, 引进多项式

$$V_\nu(x):=T_r'(x_\nu)^{-2}\Big(\frac{T_r(x)}{x-x_\nu}\Big)^2\qquad(1\leqslant\nu\leqslant r).\tag{7.36}$$

有

$$V_\nu(x_j)=\begin{cases}1, & 若\ j=\nu,\\ 0, & 若\ j\neq\nu,\end{cases}\qquad V_\nu'(x_j)=0\quad(j\neq\nu).$$

n 次多项式 $W(x):=S(x)-R(x)-V_m(x)-V_{m+1}(x)$ 在所有 x_ν 处为零 $(1\leqslant\nu\leqslant r)$. 于是存在 $r-2$ 次多项式 $Z(x)$, 使得 $W(x)=T_r(x)Z(x)$. 从而

$$\int_{-1}^{1}W(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^\pi\cos ru\cdot Z(\cos u)\,\mathrm{d}u=0,$$

进而

$$\begin{aligned}(7.37)\qquad \int_0^1 \{S(t)-R(t)\}\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_{-1}^1 \frac{S(x)-R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \{V_m(\cos u)+V_{m+1}(\cos u)\}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

令 $\tau := \frac{\pi}{r}\left(m-\frac{1}{2}\right)$, 这样 $x_m=\cos\tau$. 有

$$T_r'(\cos\tau) = r\frac{\sin r\tau}{\sin\tau} = \pm\frac{r}{\sin\tau}.$$

代入 (7.36) 并取 $\nu=m$; 得

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} V_m(\cos u)\,\mathrm{d}u &= \left(\frac{\sin\tau}{r}\right)^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos ru}{\cos u-\cos\tau}\right)^2 \mathrm{d}u \\ &= \left(\frac{\sin\tau}{r}\right)^2 \int_0^{\pi} \left\{\frac{\sin\big(r(u-\tau)/2\big)}{\sin\big((u-\tau)/2\big)}\cdot\frac{\sin\big(r(u+\tau)/2\big)}{\sin\big((u+\tau)/2\big)}\right\}^2 \mathrm{d}u.\end{aligned}$$

可设 $r\geqslant 3$. 这样对 $[0,\pi]$ 中的 u, 有

$$\tfrac{1}{4}\pi(1-2/r) \leqslant \tfrac{1}{2}(u+\tau) \leqslant \tfrac{3}{4}\pi.$$

由 Fejér 核的经典表达式

$$\left(\frac{\sin(rv/2)}{\sin(v/2)}\right)^2 = r + 2\sum_{1\leqslant j<r} (r-j)\cos(jv)$$

知对 u 的积分

$$\ll \int_{-\pi}^{\pi} \left\{\frac{\sin\big(rv/2\big)}{\sin\big(v/2\big)}\right\}^2 \mathrm{d}v = 2\pi r,$$

于是便证明了

$$\int_0^{\pi} V_m(\cos u)\,\mathrm{d}u \ll 1/r \ll 1/n.$$

与之平行的计算提供了相对于 V_{m+1} 的积分同样的估计. 代入 (7.37) 便得第二个性质 (7.35).

剩下 R 和 S 长度的估计. 比如考虑 R 的情形, 有

$$R(x) = \sum_{0\leqslant j<m} M_j(x),$$

其中 $M_j(x)$ 是满足

$$M_j(x_\nu) = \begin{cases} 1, & 若\ \nu=j, \\ 0, & 若\ \nu\neq j, \end{cases} \qquad M_j'(x_\nu)=0 \quad (\nu\neq m)$$

的唯一的 n 次多项式. 于是只须估计 M_j 的长度. 有

$$M_j(x) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{u_j x + v_j}{x - x_m}\right)\left(\frac{T_r(x)}{x - x_j}\right)^2, \tag{7.38}$$

其中 u_j 和 v_j 由方程

$$M_j(x_j) = 1, \qquad M_j'(x_j) = 0$$

确定. 通过简单计算得

$$u_j = 1 - x_j x_m, \qquad v_j = 2x_j^2 x_m - x_j^3 - x_m.$$

特别地, $\max(|u_j|, |v_j|) \leqslant 2$. 由 (7.32), 有

$$T_r(x) = \vartheta_r \prod_{\nu=1}^{r} (x - x_\nu),$$

其中 $|\vartheta_r| \leqslant r(1+\sqrt{2})^r$. 要求的 $\ell(M_j)$ 的上界估计容易由表达式

$$M_j(x) = r^{-2}\vartheta_r (u_j x + v_j)(x - x_m) \prod_{\substack{1\leqslant\nu\leqslant r\\ \nu\neq j,\, m}} (x - x_\nu)^2$$

得到. 定理 7.11于是得证. □

§7.5 Ikehara 定理

用 Dirichlet 级数的语言, 可将 Hardy–Littlewood–Karamata 定理看成是*极限下的* Tauber *型定理*, 意为联系 $\sigma > 1$ 时 $\sum_{n\geqslant 1} a_n/n^\sigma$ 的性质与 $\sum_{n\leqslant x} a_n/n$ 的性质之间的纽带. 它对于级数在虚数上的值不作任何假设, 从而不能用来证明素数定理, 本章注记中对此将作进一步说明.

本节则讲述另一种 Tauber 型定理. 它从 Dirichlet 级数在实部 $\sigma > 1$ 的虚数点 $s = \sigma + i\tau$ 处值的假设出发得出和函数的性质. 概括地讲, 就是从半平面 $\sigma > 1$ 到 $s = 0$ 的过渡. 这种假设与结论之间的跳跃性促使我们将这类结果称为*超越* Tauber *型定理*.

Ikehara (1931) 定理②便属这一类型. 以下将提出一个命题, 以此从两方面加以改进: 一方面放松了条件, 考虑了 $s = 0$ 有形如 $s^{-\omega-1}$ $(\omega > -1)$ 的奇点的情形, 这基本上是 Ingham (1935) 和 Delange (1954) 的工作, 如今已很经典; 另一方面则给出了实效的结论以及显式余项, 这似乎还未见诸于文献, 但用 Ganelius (1971) 的方法易得.

② 考虑到证明中用到了 Wiener 的 Tauber 型定理, 在文献中通常将它称为 Wiener–Ikehara 定理.

定理 7.13 ("实效"Ikehara–Ingham 定理) 令 $A(t)$ 为单调递增函数, 使得积分

$$F(s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}A(t) \tag{7.39}$$

对于 $\sigma > a > 0$ 收敛. 假设存在常数 $c \geqslant 0, \omega > -1$, 使得函数

$$G(s) := \frac{F(s+a)}{s+a} - \frac{c}{s^{\omega+1}} \qquad (\sigma > 0) \tag{7.40}$$

对于每个固定的 $T > 0$ 满足

$$\eta(\sigma, T) := \sigma^\omega \int_{-T}^{T} |G(2\sigma + \mathrm{i}\tau) - G(\sigma + \mathrm{i}\tau)|\,\mathrm{d}\tau = o(1) \qquad (\sigma \to 0_+), \tag{7.41}$$

那么

$$A(x) = \left\{\frac{c}{\Gamma(\omega+1)} + O\big(\varrho(x)\big)\right\}\mathrm{e}^{ax}x^\omega \qquad (x \geqslant 1), \tag{7.42}$$

其中

$$\varrho(x) := \inf_{T \geqslant 32(a+1)} \left\{\frac{1}{T} + \eta\Big(\frac{1}{x}, T\Big) + \frac{1}{(Tx)^{\omega+1}}\right\}.$$

(7.42) 中隐含的常数仅依赖于 a, c 和 ω. 一种可能的选择是

$$52 + 1652c(a+1)(\omega+2) + 69c\big(1 + \mathrm{e}^{1-\omega}(\omega+1)^{\omega+2}\big)/\Gamma(\omega+1).$$

Ganelius 的方法基于 Bohr (1935) 不等式

$$\|f\|_\infty \ll \|f'\|_\infty / T \tag{7.43}$$

的一个局部形式. 它对于任意 $\mathbb{R}$ 上可积且 Fourier 变换 $\widehat{f}(\tau)$ 在 $|\tau| \leqslant T$ 上为零的函数 f 成立, 条件是两边的项均有限. 这里只介绍 Ganelius 结果一个略弱的形式, 对我们来说已够用了. 证明的思想非常接近于经典的 Berry–Esseen 不等式, 可见 Feller (1971).

定理 7.14 (Ganelius) 令 g 为 $\mathbb{R}$ 上的有界可积函数. 假设存在正实数 T, 使得

$$\sup_{x \leqslant y \leqslant x+1/T} \{g(y) - g(x)\} \leqslant K < \infty, \tag{7.44}$$

$$\widehat{g}(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau x} g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (|\tau| \leqslant T), \tag{7.45}$$

那么

$$\|g\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \leqslant 16K. \tag{7.46}$$

注 这里不寻求优化 (7.46) 中的常数 16.

证明 不妨设 $T=1$：一般情形通过考虑 $g(x/T)$ 可得. 由条件 (7.45) 推出

$$\widehat{g}(\tau)\widehat{\chi}(\tau)=0 \qquad (\tau\in\mathbb{R}) \tag{7.47}$$

对所有可积且 Fourier 变换的支集包含于 $[-1,1]$ 的函数 χ 成立. 选取

$$\chi(t)=\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\Big)^2,$$

这样 $\widehat{\chi}(\tau)=\max(1-|\tau|,0)$. 由关系 (7.47) 推出

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\chi(t)\,\mathrm{d}t=0 \qquad (x\in\mathbb{R}). \tag{7.48}$$

利用 $\chi(t)$ 在 $t=0$ 处有 “峰点”的事实可得要求的不等式. 更确切地说, 将利用不等式

$$I:=\int_{|t|>5}\chi(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{4}{\pi}\int_5^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\frac{4}{5\pi}. \tag{7.49}$$

令 ε $(0<\varepsilon<1)$ 为固定的实数并选取 $\vartheta=\pm1$, 使得

$$\|g\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{R}}\{\vartheta g(x)\}.$$

于是存在 $x_0=x_0(\varepsilon)$ 使得 $\vartheta g(x_0)\geqslant(1-\varepsilon)\|g\|_\infty$. 对 $x=x_0-5\vartheta$ 用 (7.48) 并利用 (7.49), 得

$$\begin{aligned}
0&=\vartheta\int_{-\infty}^{+\infty} g(x_0-t-5\vartheta)\chi(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\vartheta\int_{-5}^{5} g(x_0)\chi(t)\,\mathrm{d}t-\vartheta\int_{-5}^{5}\{g(x_0)-g(x_0-t-5\vartheta)\}\chi(t)\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\vartheta\int_{|t|>5} g(x_0-t-5\vartheta)\chi(t)\,\mathrm{d}t\\
&\geqslant(1-\varepsilon)(1-I)\|g\|_\infty-10K(1-I)-I\|g\|_\infty,
\end{aligned}$$

其中用到了对所有使得 $|t|\leqslant5$ 的 t 有

$$\vartheta\{g(x_0)-g(x_0-t-5\vartheta)\}\leqslant\sup_{x<y\leqslant x+10}\{g(y)-g(x)\}\leqslant10K$$

的事实. 于是得到

$$\{(1-\varepsilon)(1-I)-I\}\|g\|_\infty\leqslant10K(1-I).$$

令 ε 趋于 0, 得

$$\|g\|_\infty \leqslant \frac{10K(1-I)}{1-2I} \leqslant 16K,$$

此即是命题结论. □

倘若照抄 Ganelius 的做法来应用定理 7.14 便得到一个实效的 Tauber 型定理, 但其条件相当不寻常, 不能完全推广 Ikehara–Ingham 定理. 我们则采用略为不同的方法. 注意到从定理 7.14 容易推出一个结论, 它既包含 Berry–Esseen 不等式 (见 §7.6) 又包含定理 7.13.

定理 7.15 *设 g 是 $\mathbb{R}$ 上的有界可积函数. 在条件 (7.44) 下, 有*

$$\|g\|_\infty \leqslant 16K + 6\int_{-T}^{T} |\widehat{g}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau.$$

证明 令 $\varepsilon > 0$. 应用定理 7.14 于 $g-f$, 其中 f 是 g 与可积函数

$$\alpha(t) := \frac{2}{\pi\varepsilon t^2}\sin\left(\varepsilon t/2\right)\sin\big((2T+\varepsilon)t/2\big)$$

的卷积. α 的 Fourier 变换是梯形函数

$$\widehat{\alpha}(\tau) = \begin{cases} 1, & 若\ |\tau| \leqslant T, \\ (T+\varepsilon-|\tau|)/\varepsilon, & 若\ T < |\tau| \leqslant T+\varepsilon, \\ 0, & 若\ |\tau| > T+\varepsilon. \end{cases}$$

由 $\widehat{f} = \widehat{g}\,\widehat{\alpha}$ 的支集是紧集知

$$\|f\|_\infty \leqslant \frac{1}{2\pi}\|\widehat{f}\|_1 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-T-\varepsilon}^{T+\varepsilon} |\widehat{g}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau. \tag{7.50}$$

从而

$$\sup_{x\leqslant y\leqslant x+1/T} \big\{g(y)-f(y)-\big(g(x)-f(x)\big)\big\} \leqslant K + 2\|f\|_\infty,$$

故由定理 7.14 可得

$$\|g\|_\infty \leqslant \|g-f\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant 16K + 33\|f\|_\infty.$$

由于 $33/2\pi \leqslant 6$, 令 ε 趋于 0 便得要求的结论. □

定理 7.13 的证明 不失一般性, 可设 $A(0_+) = 0$ 并在 $t \leqslant 0$上用 0 来延拓 $A(t)$. 首先应用定理 7.15 于函数

$$g_\sigma(t) := A(t)\mathrm{e}^{-(a+\sigma)t}(1-\mathrm{e}^{-\sigma t}).$$

该函数依赖于正参数 σ, 其 Fourier 变换为

$$\widehat{g}_\sigma(\tau) = G(\sigma + \mathrm{i}\tau) - G(2\sigma + \mathrm{i}\tau) + c\big\{(\sigma + \mathrm{i}\tau)^{-\omega-1} - (2\sigma + \mathrm{i}\tau)^{-\omega-1}\big\}.$$

最后一项的模不超过

$$c(\omega+1)\left|\int_{\sigma+\mathrm{i}\tau}^{2\sigma+\mathrm{i}\tau} \frac{\mathrm{d}s}{s^{\omega+2}}\right| \leqslant \frac{c(\omega+1)\sigma}{|\sigma+\mathrm{i}\tau|^{\omega+2}}.$$

考虑到 (7.41), 有

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T} |\widehat{g}_\sigma(\tau)|\,\mathrm{d}\tau &\leqslant \frac{1}{\sigma^\omega}\left\{\eta(\sigma,T) + c(\omega+1)\sigma^{\omega+1}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{d}\tau}{\max(\sigma,|\tau|)^{\omega+2}}\right\}\\ &\leqslant \frac{\eta(\sigma,T)+2c(\omega+2)}{\sigma^\omega}.\end{aligned}$$

其次, 由 A 的单调性和正性推出对 $x>0$, $y\geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}g_\sigma(x+y) - g_\sigma(x) &\geqslant A(x)\mathrm{e}^{-(a+\sigma)x}(1-\mathrm{e}^{-\sigma x})(\mathrm{e}^{-(a+\sigma)y}-1)\\ &\geqslant -(a+\sigma)\|g_\sigma\|_\infty y.\end{aligned} \tag{7.51}$$

当 $x\leqslant 0$ 时该不等式仍成立, 这是因为此时有 $g_\sigma(x)=0$. 应用定理 7.15 于 $-g_\sigma$, 其中 $K=(a+\sigma)\|g_\sigma\|_\infty/T$, 可知对于 $0<\sigma\leqslant 1$ 有

$$\|g_\sigma\|_\infty \leqslant \frac{6}{\sigma^\omega}\{\eta(\sigma,T)+2c(\omega+2)\} + \frac{16}{T}(a+1)\|g_\sigma\|_\infty.$$

选取 $T=T_a:=32(a+1)$, 得

$$\|g_\sigma\|_\infty \leqslant M_1(\sigma)\sigma^{-\omega} \qquad (0<\sigma\leqslant 1), \tag{7.52}$$

其中 $M_1(\sigma) := 12\big\{\eta(\sigma,T_a)+2c(\omega+2)\big\}$.

令

$$B(t) := \begin{cases}\dfrac{c}{\Gamma(\omega+1)}\mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^{-t})t^\omega, & 若\ t>0,\\ 0, & 若\ t\leqslant 0.\end{cases}$$

证明的第二步仍用到定理 7.15, 但这次是对函数

$$G_\sigma(t) := g_\sigma(t) - \sigma^{-\omega}B(\sigma t) = \left\{A(t)\mathrm{e}^{-at} - \frac{c}{\Gamma(\omega+1)}t^\omega\right\}\mathrm{e}^{-\sigma t}(1-\mathrm{e}^{-\sigma t})$$

来使用它. 该函数的 Fourier 变换等于

$$\widehat{G}_\sigma(\tau) = G(\sigma+\mathrm{i}\tau) - G(2\sigma+\mathrm{i}\tau).$$

对任意 $t>0$, 有

$$B'(t)=\frac{c}{\Gamma(\omega+1)}\mathrm{e}^{-t}t^{\omega-1}\{2t\mathrm{e}^{-t}-t+\omega(1-\mathrm{e}^{-t})\}$$
$$\leqslant\frac{c(\omega+1)}{\Gamma(\omega+1)}\mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^{-t})t^{\omega-1}\leqslant\frac{c(\omega+1)}{\Gamma(\omega+1)}\mathrm{e}^{-t}t^{\omega}.$$

另外, B 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 从而等于其导数 (在 $t=0$ 处可用 0 值来延拓) 的积分. 从中得出, 一方面, 对 $x<0$, $x+y\geqslant 0$, 有

$$B(x+y)-B(x)\leqslant\int_0^y\frac{c(\omega+1)}{\Gamma(\omega+1)}\mathrm{e}^{-t}t^{\omega}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{c}{\Gamma(\omega+1)}y^{\omega+1};$$

另一方面, 对 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, 有

$$B(x+y)-B(x)\leqslant\frac{c(\omega+1)}{\Gamma(\omega+1)}\mathrm{e}^{-x}\int_x^{x+y}t^{\omega}\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\frac{c}{\Gamma(\omega+1)}\mathrm{e}^{-x}\Big\{\vartheta(\omega)(\omega+1)(x+y)^{\omega}y+\big(1-\vartheta(\omega)\big)y^{\omega+1}\Big\},$$

其中当 $\omega\geqslant 0$ 时 $\vartheta(\omega)=1$, 当 $-1<\omega<0$ 时 $\vartheta(\omega)=0$. 在 $\omega<0$ 的情形下用了经典的 Minkowski 定理

$$(x+y)^{\omega+1}-x^{\omega+1}\leqslant y^{\omega+1}\qquad(-1<\omega<0).$$

通过简单的计算易得对 $x\in\mathbb{R}$, $0\leqslant y\leqslant 1/T\leqslant 1$, 及 $0<\sigma\leqslant 1$ 有

$$B(\sigma x+\sigma y)-B(\sigma x)\leqslant D\Big\{\frac{\sigma}{T}+\Big(\frac{\sigma}{T}\Big)^{\omega+1}\Big\},$$

其中

$$D:=\frac{c}{\Gamma(\omega+1)}\big(1+\mathrm{e}^{1-\omega}(\omega+1)^{\omega+2}\big).$$

事实上, 有 $D\Gamma(\omega+1)\geqslant c\max\{1,\vartheta(\omega)(\omega+1)\mathrm{e}\sup_{t\geqslant 0}\mathrm{e}^{-t}t^{\omega}\}$.

由 (7.51) 和 (7.52) 知, 在相同的条件下有

$$G_\sigma(x+y)-G_\sigma(x)\geqslant-\Big\{\frac{(a+\sigma)\|g_\sigma\|_\infty}{T}+\frac{B(\sigma x+\sigma y)-B(\sigma x)}{\sigma^{\omega}}\Big\}$$
$$\geqslant-\frac{1}{\sigma^{\omega}}\Big\{\frac{M_2(\sigma)}{T}+D\Big(\frac{\sigma}{T}\Big)^{\omega+1}\Big\},$$

其中 $M_2(\sigma):=(a+1)M_1(\sigma)+D=12(a+1)\eta(\sigma,T_a)+24c(a+1)(\omega+2)+D$. 应用定理 7.15 于 $-G_\sigma$ 得对 $T\geqslant T_a$ 有

$$|G_\sigma(x)|\leqslant\frac{1}{\sigma^{\omega}}\Big\{\frac{16M_2(\sigma)}{T}+6\eta(\sigma,T)+16D\Big(\frac{\sigma}{T}\Big)^{\omega+1}\Big\}$$
$$\leqslant\frac{1}{\sigma^{\omega}}\Big\{\frac{384c(a+1)(\omega+2)+16D}{T}+12\eta(\sigma,T)+16D\Big(\frac{\sigma}{T}\Big)^{\omega+1}\Big\}$$
$$\leqslant\frac{M}{\sigma^{\omega}}\Big\{\frac{1}{T}+\eta(\sigma,T)+\Big(\frac{\sigma}{T}\Big)^{\omega+1}\Big\},$$

其中

$$\begin{aligned} M &:= \max\left\{384c(a+1)(\omega+2)+16D,\, 12\right\} \\ &\leqslant 12+384c(a+1)(\omega+2)+16c\left(1+\mathrm{e}^{1-\omega}(\omega+1)^{\omega+2}\right)/\Gamma(\omega+1). \end{aligned}$$

选取 $\sigma = 1/x$ 便得结论. (7.42) 中隐含的常数不超过 $\mathrm{e}M/(1-1/\mathrm{e})$. □

从 Ikehara 定理出发仅假设在 $\sigma = 1$ 上 $\zeta(s) \neq 0$ 便可推出素数定理. 它不需要 $1/\zeta(s)$ 的上界估计, 见习题 224. 注意: 由定理 7.13, 任何 $\zeta'(s)/\zeta(s)$ 或 $1/\zeta(s)$ 显式的上界估计均可推出素数定理相应的实效形式, 特别地, 见习题 225 及习题 226.

§7.6 Berry–Esseen 不等式

上节提到, 由定理 7.15 可推出 Berry–Esseen 概率不等式, 这里证明之. 按通常习惯, 所谓分布函数, 是指单调递增且右连续的实变实值函数 F, 满足

$$F(-\infty) = 0, \qquad F(+\infty) = 1. \tag{7.53}$$

F 的特征函数定义为其 Fourier–Stieltjes 变换

$$f(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau x}\, \mathrm{d}F(x).$$

定理 7.16 (Berry–Esseen) *设 F, G 为两个分布函数, 其特征函数分别为 f, g. 假设 G 可微且 G' 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 那么对任意 $T > 0$ 有*

$$\|F-G\|_\infty \leqslant 16\frac{\|G'\|_\infty}{T} + 6\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(\tau)-g(\tau)}{\tau}\right| \mathrm{d}\tau. \tag{7.54}$$

证明 令 $H := F - G$ 并对每个正参数 ε 引进函数

$$H_\varepsilon(x) := -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\varepsilon t}\, \mathrm{d}H(x-t) = \mathrm{e}^{-\varepsilon x}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\varepsilon t}\, \mathrm{d}H(t). \tag{7.55}$$

容易验证 H_ε 可积, 且其 Fourier 变换等于

$$\widehat{H}_\varepsilon(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau x} H_\varepsilon(x)\, \mathrm{d}x = \frac{f(-\tau)-g(-\tau)}{\varepsilon + \mathrm{i}\tau}.$$

由分部积分, (7.55) 第二个等式推出

$$H_\varepsilon(x) = H(x) - \varepsilon \mathrm{e}^{-\varepsilon x}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\varepsilon t} H(t)\, \mathrm{d}t. \tag{7.56}$$

由于 $\|H\|_\infty \leqslant 1$ 及 $H(-\infty)=0$, 容易得出对每个固定的 x 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} H_\varepsilon(x) = H(x).$$

令 $\alpha := \|G'\|_\infty$. 显然有

$$H(x+y)-H(x) \geqslant -\alpha y \qquad (x\in\mathbb{R},\ y>0)$$

及

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big\{\mathrm{e}^{-\varepsilon x}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{\varepsilon t}H(t)\,\mathrm{d}t\Big\} = -\varepsilon\mathrm{e}^{-\varepsilon x}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{\varepsilon t}H(t)\,\mathrm{d}t + H(x) \leqslant 2.$$

代入 (7.56), 得

$$H_\varepsilon(x+y)-H_\varepsilon(x) \geqslant -\frac{(\alpha+2\varepsilon)}{T} \qquad \Big(x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant y\leqslant \frac{1}{T}\Big).$$

应用定理 7.15 于 $-H_\varepsilon$ 及 $K := \dfrac{\alpha+2\varepsilon}{T}$, 得

$$|H_\varepsilon(x)| \leqslant 16\frac{(\alpha+2\varepsilon)}{T} + 6\int_{-T}^{T}\Big|\frac{f(\tau)-g(\tau)}{\tau}\Big|\,\mathrm{d}\tau \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

令 ε 趋于 0 便推出 (7.54).　□

注　(i) 仅当 $|f-g|$ 相对于测度 $\mathrm{d}\tau/\tau$ 可积时不等式 (7.54) 给出一个有限的上界. 其一个充分条件是 f 和 g 属于使 $|1-\varphi(\tau)|/|\tau|$ 在原点附近可积的函数 φ 构成的空间 E. 不难验证, 一个特征函数 φ 在 E 中当且仅当其原函数 H 满足 $\int_{\mathbb{R}}\ln^+|z|\,\mathrm{d}H(z)<\infty$.

(ii) 通常 Berry–Esseen 不等式中的常数在应用中并不重要. Feller (1971) 提出了数值 $24/\pi$ 和 $1/\pi$, 其后分别被改进为 π 和 0.163 18, 见Vaaler (1985) 定理 13.

§7.7　全纯性作为 Tauber 型条件

本节从定理 7.14 的一个推广开始讨论. 这基本上是 Ganelius (1971) 的结果.

定理 7.17　令 g 为 $\mathbb{R}$ 上有界可积函数, C 为正常数, 且 $\psi:\mathbb{R}\to[1,\infty[$ 为单调上升函数, 使得当 $x\leqslant 0$ 时 $\psi(x)=1$, 当 $x\geqslant 0$ 时 $\psi(2x)\leqslant C\psi(x)$. 假设对适当的实数 $T>0$ 有

(i) $\displaystyle\sup_{0\leqslant y\leqslant 1/T}\{g(x+y)-g(x)\} \leqslant K/\psi(x) \qquad (x\in\mathbb{R})$,

(ii) $\widehat{g}\in\mathcal{C}^\infty([-T,T])$,

那么存在整数 $N = N(C,K)$, 仅依赖于 C, K, T 的常数 A 以及 $M := \sup\limits_{n\leqslant N} \|\widehat{g}^{(n)}\|_{[-T,T]}$, 使得

$$|g(x)| \leqslant A/\psi(x) \qquad (x\in\mathbb{R}). \tag{7.57}$$

证明 不失一般性, 可设 $T=1$. 显然只须对 $x \geqslant x_0(C)$ 证明 (7.57).

先证 $|\tau|\leqslant 1$ 上 $\widehat{g}(\tau)=0$ 的情形. 注意到根据定理 7.14 可将 $\|g\|_\infty$ 放大为 $16K$. 令 χ 为 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ 中的非负速降函数, 使得其 Fourier 变换的支集包含于 $[-1,1]$ 且 $\widehat{\chi}(0)=1$.③ 特别地, 对任意整数 n 有 $\chi(x) \ll_n 1/(1+|x|^n)$, 从而对适当的常数 B 有 $\chi(x)\leqslant B/\{(1+x^2)\psi(|x|)\}$.

另外, 存在整数 $R>0$, 使得

$$I_R := \int_{|t|>R} \chi(t)\,\mathrm{d}t < \frac{1}{2C+1}.$$

令 $x\geqslant 4R$ 及 $\vartheta := \operatorname{sgn} g(x)$, 有 $g*\chi=0$, 从而

$$\begin{aligned}\vartheta g(x)&\int_{-R}^{R}\chi(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \vartheta\int_{-R}^{R}\{g(x)-g(x-t-R\vartheta)\}\chi(t)\,\mathrm{d}t - \vartheta\int_{|t|>R} g(x-t-R\vartheta)\chi(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}(1-I_R)|g(x)| &\leqslant \frac{2RK(1-I_R)}{\psi(x-2R)} + \int_{|t|>R}|g(x-t-R\vartheta)|\chi(t)\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{A_1(1-I_R)}{\psi(x)} + \int_{|t|>R}|g(x-t-R\vartheta)|\chi(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中 $A_1 := 2CRK$. 在积分中, 倘若 $|t+R\vartheta|\leqslant x/2$, 便将 $|g(x-t-R\vartheta)|$ 放大为 $\sup\limits_{y>x/2}|g(y)|$, 否则将之放大为 $16K$. 注意到 $I_R/(1-I_R)\leqslant 1/2C$, 得

$$\begin{aligned}|g(x)| &\leqslant \frac{A_1}{\psi(x)} + \frac{16K}{1-I_R}\int_{|t+R\vartheta|>x/2}\chi(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2C}\sup_{y>x/2}|g(y)|\\ &\leqslant \frac{A_1}{\psi(x)} + \frac{16C^2BK}{(1-I_R)\psi(x)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + \frac{1}{2C}\sup_{y>x/2}|g(y)|\\ &\leqslant \frac{A_2}{\psi(x)} + \frac{1}{2C}\sup_{y>x/2}|g(y)|,\end{aligned}$$

③ 一个可能的选择是 $\chi(x) := \{\widehat{\sigma}(x)\}^2/\int_{\mathbb{R}}\{\widehat{\sigma}(t)\}^2\,\mathrm{d}t$, 其中

$$\sigma(t) := \exp\{-1/(1-4t^2)\}\mathbf{1}_{]-1/2,1/2[}(t) \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

其中 $A_2 = A_2(C, K)$. 如是往复, 得对任意整数 $J \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}|g(x)| &\leqslant \sum_{0\leqslant j\leqslant J} \frac{A_2}{(2C)^j\psi(x/2^j)} + \frac{1}{2^J C^J} \sup_{y>x/2^J} |g(y)| \\ &\leqslant \sum_{0\leqslant j\leqslant J} \frac{A_2 C^j}{2^j C^j \psi(x)} + \frac{16K}{2^J C^J}.\end{aligned}$$

由于 $C \geqslant 1$, 令 J 趋于无穷, 便得

$$|g(x)| \leqslant A_3/\psi(x),$$

其中 $A_3 := 2A_2$.

现在考虑一般情形, $\widehat{g}(\tau)$ 不必再在 $[-1,1]$ 上为零. 引进函数 $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ 使得在 $|\tau| \leqslant \frac{1}{2}$ 上 $\widehat{\alpha}(\tau) = 1$, 在 $|\tau| \geqslant 1$ 上 $\widehat{\alpha}(\tau) = 0$. 令

$$f(x) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau x} \widehat{\alpha}(\tau) \widehat{g}(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

连续使用分部积分, 得 $f(x) \ll_{M,N} 1/(1 + |x|^N)$, 其中 $M = M_N$ 的定义见命题叙述. 于是

$$|f(x)| \leqslant A_4/\psi(x), \tag{7.58}$$

其中 A_4 仅依赖于 C 和 M_N, $N = N(C)$ 是某适当的选择. 由于 $|\tau| \leqslant \frac{1}{2}$ 上 $\widehat{f}(\tau) - \widehat{g}(\tau) = 0$, 应用证明第一部分的结果, 得

$$|f(x) - g(x)| \leqslant A_5/\psi(x).$$

结合 (7.58) 知, 命题得证. □

上述定理给出如下 Korevaar (1954b) 一个结果的简单证明, 该结果是 Fatou (1906) 一个定理的细化.

定理 7.18 (Fatou-Korevaar) 令 $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 为 $|z| < 1$ 上收敛的幂级数, 在 $z = 1$ 处可全纯延拓. 倘若存在函数 ψ 满足定理 7.17 的假设, 并使得

$$a_n \geqslant -1/\psi(n) \qquad (n \geqslant 0), \tag{7.59}$$

那么 $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ 收敛到 $f(1)$ 且

$$\sum_{n\leqslant x} a_n = f(1) + O\Big(\frac{1}{\psi(x)}\Big) \qquad (x \to \infty).$$

证明 设 $f(z)$ 在 $|z-1|\leqslant r$ 上可全纯延拓, $0<\varepsilon<\ln\{1/(1-r)\}$. 令

$$g_\varepsilon(x):=\sum_{n\leqslant x}a_n\mathrm{e}^{-\varepsilon n}-f(\mathrm{e}^{-\varepsilon})\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x),$$

这样

$$\widehat{g}_\varepsilon(\tau)=-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau x}\sum_{n>x}a_n\mathrm{e}^{-\varepsilon n}\,\mathrm{d}x=\frac{f(\mathrm{e}^{-\varepsilon-\mathrm{i}\tau})-f(\mathrm{e}^{-\varepsilon})}{\mathrm{i}\tau}.$$

于是对 $\varepsilon>0$ 及 $|\tau|\leqslant T$ (T 足够小) 有 $\widehat{g}_\varepsilon\in\mathcal{C}^\infty([-T,T])$ 且 $\widehat{g}_\varepsilon$ 有与 ε 无关的上界. 另外, 由于

$$g_\varepsilon(x+y)-g_\varepsilon(x)=\sum_{x<n\leqslant x+y}\mathrm{e}^{-\varepsilon n}a_n-f(\mathrm{e}^{-\varepsilon})\mathbf{1}_{]x,x+y]}(0)\geqslant-\frac{1+y+M}{\psi(x)},$$

其中 $M:=\sup\limits_{|z-1|\leqslant r}|f(z)|$, 应用定理 7.17 便得到

$$g_\varepsilon(x)\ll 1/\psi(x),$$

其中隐含的常数与 ε 无关. 令 ε 趋于 0 便得到定理的结论. □

于是得到关于 Dirichlet 级数的类似于 Riesz (1909) 定理的一个实效形式.

定理 7.19 *令 $F(s):=\sum_{n\geqslant1}a_n/n^s$ 为在 $\sigma>1$ 上收敛的 Dirichlet 级数, 在 $s=1$ 上可全纯延拓. 倘若存在满足定理 7.17 条件的函数 ψ, 使得 $a_n\geqslant-1/\psi(\ln n)$ $(n\geqslant2)$, 那么*

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{a_n}{n}=F(1)+O\Big(\frac{1}{\psi(\ln x)}\Big)\qquad(x\to\infty).\tag{7.60}$$

证明 只须对足够小的 $\delta>0$ 考虑函数

$$g_\delta(x):=\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\sum_{n>\mathrm{e}^x}\frac{a_n}{n^{1+\delta}}.$$

证明与定理 7.18 类似, 细节略去. □

正如 Landau (1910) 所指出的, 可将 Tauber 型条件换成均值不等式, 但必须是双边的. 于是得到定理 2.9 的一个实效形式.

定理 7.20 *在假设*

$$\sum_{m\leqslant n}a_m\ll n/\psi(\ln n)\qquad(n\geqslant2)$$

下, 定理 7.19 的结论亦成立.

证明 令 $\varphi_n(s) := n^{-s} - (n+1)^{-s} - sn^{-s-1}$ ($s \in \mathbb{C}$). 这样

$$|\varphi_n(s)| \leqslant |s(s+1)|/n^{\sigma+2} \qquad (\sigma > 0).$$

令 $A_n := \sum_{m \leqslant n} a_m$. 于是 $A_n \ll n/\psi(\ln n)$ ($n \geqslant 2$). 容易验证, 对任意整数 $N \geqslant 1$ 及任意 $s \in \mathbb{C}$, 有

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{a_n}{n^s} - s \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{A_n}{n^{s+1}} = \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} A_n \varphi_n(s) + \frac{A_N}{(N+1)^s}. \tag{7.61}$$

令 $N \to \infty$, 从中推出

$$G(s) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{A_n}{n^{s+1}} = \frac{F(s)}{s} - \frac{1}{s} \sum_{n \geqslant 1} A_n \varphi_n(s) \qquad (\sigma > 1).$$

第二个级数在 $\sigma > 0$ 上全纯, 所以 $G(s)$ 在 $\sigma = 1$ 处可全纯延拓. 于是可对 $G(s)$ 应用定理 7.19, 得

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{A_n}{n^2} = G(1) + O\left(\frac{1}{\psi(\ln N)}\right).$$

代入 $s = 1$ 时的 (7.61), 得定理结论. □

§7.8 算术 Tauber 型定理

素数定理初等证明的尝试促使数学家们考虑一个更广泛的问题. 设 f, g 是数论函数, 满足关系 $f = g * \mathbf{1}$. 令

$$F(x) := \sum_{n \leqslant x} f(n), \quad G(x) := \sum_{n \leqslant x} g(n),$$

希望在

$$F(x) = ax + o(x) \quad (x \to \infty) \tag{7.62}$$

的条件下得到关于 g 的结果. 标志性的情形是 $g = \mu$, $f = \delta$, 此时 $a = 0$. 易知关系 $G(x) = o(x)$ 与素数定理等价, 见第一部分定理 3.8. 然而, 这里我们的目的不是寻求素数定理的另一个初等证明. 以下将自由地使用素数定理.

定理 7.21 (Ingham, 1945) *在条件 (7.62) 下, 有*

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{g(n)}{n} = \frac{G(x)}{x} + a + o(1) \qquad (x \to \infty). \tag{7.63}$$

证明 有 $F(x)=\sum_{n\leqslant x}g(n)\lfloor x/n\rfloor$. 于是改变 $g(1)$ 的值后可设 $a=0$. 另外 $G(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)F(x/n)$. 从而

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{g(n)}{n}-\frac{G(x)}{x}&=\int_{1-}^{x}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}G(u)=\int_{1}^{x}\frac{G(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u\\&=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\int_{n}^{x}F(u/n)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\int_{1}^{x/n}F(v)\frac{\mathrm{d}v}{v^2}\\&=\int_{1}^{x}F(v)\sum_{n\leqslant x/v}\frac{\mu(n)}{n}\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=o\Big(\int_{1}^{x}\frac{\mathrm{d}v}{v\{\ln(2x/v)\}^2}\Big)=o(1).\end{aligned}$$

□

定理 7.22 (Landau, 1910) 设 g 为实数论函数, 且对任意 $n\geqslant 1$ 满足 $g(n)\geqslant -K$, 那么由关系 (7.63) 推出

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{g(n)}{n}=a. \tag{7.64}$$

证明 改变 $g(1)$ 的值后可设 $a=0$. 于是

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{g(n)}{n}-\frac{G(x)}{x}=\int_{1}^{x}\frac{G(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u=o(1). \tag{7.65}$$

若对 $c>0$, $G(N)>cN$ 对于无穷多个 N 成立, 那么对足够小的 ε 及 $N<u\leqslant(1+\varepsilon)N$ 有 $G(u)>cN-K(u-N+1)>\frac{1}{2}cN$. 由此推出

$$\int_{N}^{(1+\varepsilon)N}\frac{G(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u>\tfrac{1}{2}c\varepsilon/(1+\varepsilon)^2,$$

这与 (7.65) 矛盾. 对 $-G$ 作同样的推理, 得 $G(N)=o(N)$. □

联合定理 7.21 和定理 7.22 即得蕴涵关系 (7.62)⇒(7.64) 所需的关于 g 的一个 Tauber 型条件.

推论 7.23 (Ingham, 1945) 倘若 (7.62) 成立且 $\inf_n g(n)>-\infty$, 那么 (7.64) 成立.

从 Ingham 的方法亦可得出如下结果.

定理 7.24 (Skałba, 1998) 倘若 (7.62) 成立且 $f(n)\ll 1$, 那么 $G(x)=o(x)$ 且 (7.64) 成立.

证明 不失一般性, 可设 $a=0$. 由双曲律 (第一部分定理 3.1) 知对每个固定的 $y\geqslant 2$ 有

$$G(x)=\sum_{m\leqslant y}\mu(m)F(x/m)+\sum_{n\leqslant x/y}f(n)M(x/n)-F(x/y)M(y). \tag{7.66}$$

在和式中将 $M(z)$ 放大为 $\ll z/(\ln z)^2$, $f(n)$ 换成 $O(1)$, 即得 $\limsup_{x\to\infty}|G(x)|/x \ll 1/\ln y$, 从而 $G(x)=o(x)$. 代入 (7.63) 便得要求的结论. □

推论 7.25 (Skałba, 1998) *若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是 Riemann 可积 2π-周期函数, 那么*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,\mathrm{d}u=\sum_{n\geqslant 1}\frac{g(n)}{n}.$$

证明　由于 $\langle n/2\pi\rangle$ 模 1 均匀分布, 由 Weyl 判别法, 积分是 $f(n)=f(2\pi\langle n/2\pi\rangle)$的平均值. □

如同 Skałba (1998) 论文中所提及的, Drmota 证明了定理 7.24 的逆命题.

定理 7.26 (Drmota, 1998) *若 f 是实的, 且满足 $\inf_n f(n)>-\infty$, 并且 (7.64) 成立, 那么关系 (7.62) 亦成立.*

证明　对每个 $y>0$ 均有

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{g(n)}{\mathrm{e}^{ny}-1}=\sum_{n\geqslant 1}f(n)\mathrm{e}^{-ny}.$$

左边是 $g(n)/n$ 的 Lambert 级数. 由于 Lambert 变换是正则的 (见下文), 当 $y\to 0+$ 时该函数为 $\{a+o(1)\}/y$. Karamata 的 Tauber 型定理 (定理 7.5) 于是蕴涵 (7.62). □

下证要求的 Lambert 变换的性质. 令

$$\varphi(y):=y/(\mathrm{e}^y-1).$$

引理 7.27 (Lambert 变换的正则性) *若 $\sum_n a_n=a$, 那么*

$$\sum_n a_n\varphi(ny)=a+o(1)\qquad (y\to 0+).$$

证明　可设 $a=0$. 令 $A_n:=\sum_{m\leqslant n}a_m$. 那么 $A_n=o(1)$ 且

$$\sum_n a_n\varphi(ny)=\sum_n A_n\{\varphi(ny)-\varphi(ny+y)\}.$$

而 φ 在 $\mathbb{R}^+$ 上单调下降. 于是对每个固定的 N 有

$$\Big|\sum_n A_n\{\varphi(ny)-\varphi(ny+y)\}\Big|\leqslant\sum_{n\leqslant N}|A_n|\{\varphi(ny)-\varphi(ny+y)\}+\varphi(Ny)\sup_{n>N}|A_n|.$$

从而

$$\limsup_{y\to 0+}\Big|\sum_n A_n\{\varphi(ny)-\varphi(ny+y)\}\Big|\leqslant\sup_{n>N}|A_n|.$$

令 N 趋于无穷即得结论. □

注记

§7.1 Abel 定理中的条件 $z \in S(\vartheta)$ 是必需的. 下述是 B. de Mathan 的反例. 令 $\alpha_k := \exp(i/k) \quad (k = 1, 2, \ldots)$. 函数

$$f(z) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{\log(1 - z/\alpha_k)}{2^k}$$

在 $|z| < 1$ 上全纯, 这是因为级数在该开圆盘中任意紧集上一致收敛. 由于

$$\lim_{z \to \alpha_k} |f(z)| = \infty \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

当 $z \to 1$ 时 $f(z)$ 无极限. 而 $f(z)$ 的 Taylor 级数是

$$-\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n} \sum_{k \geqslant 1} \frac{\alpha_k^{-n}}{2^k}.$$

由 Abel 判别法, 该级数在 $z = 1$ 处收敛. 事实上, 部分和一致有界：

$$\left| \sum_{1 \leqslant n \leqslant m} \sum_{k \geqslant 1} \frac{\overline{\alpha}_k^n}{2^k} \right| = \left| \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{2^k} \sum_{1 \leqslant n \leqslant m} \overline{\alpha}_k^n \right|$$
$$\leqslant \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{2^k} \left| \frac{1 - \overline{\alpha}_k^m}{1 - \overline{\alpha}_k} \right| \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{2^{k-1} |1 - \mathrm{e}^{-i/k}|} < \infty.$$

§7.3 Karamata 定理可这样推广：考虑如下更一般的假设

$$F(\sigma) = \{c + o(1)\} \sigma^{-\omega} L(1/\sigma) \qquad (\sigma \to 0+),$$

其中 $L(t)$ 是缓升函数, 即对任意固定的 $k > 0$ 满足

$$L(kt) \sim L(t) \qquad (t \to \infty)$$

的函数. 将 x^ω 换成 $x^\omega L(x)$ 后定理 7.5 的结论成立, 见 Hardy (1949) 定理 108.

§7.4 定理 7.11 是 Freud (1952) 的结果. 又见 Freud 和 Ganelius (1957). 这里给出的独立的证明基本上是 Korevaar (1954a) 的结果. Ingham (1965) 给出了 Karamata–Freud 定理的一个直接证明, 不明显地用多项式 L^1 逼近引理, 而直接使用了 Karamata 证明中的峰函数.

§7.5 关于 Bohr 不等式 (7.43) 的进展见 Hörmander (1954) 的文章.

如习题 255 所指出的, 定理 7.13 对任意 $\varepsilon > 0$ 提供了素数定理阶为 $\ll x/(\ln x)^{2-\varepsilon}$ 的余项估计. 用 Wiener–Ikehara 优雅的方法, Rieger (1983) 得到了阶为

$$\ll x \exp\left\{ -c(\ln x)^{1/25} \right\}$$

的余项估计.

正如 Diamond (1988) 在其书评中所注, 严格地讲, Hardy–Littlewood–Karamata 定理不能导出素数定理的证明的说法并不准确. 利用 Riemann ζ-函数的一些解析性质, 比如函数方程, 乘积公式, 阶的有限性, 在 $\sigma=1$ 上无零点以及虚部不超过 T 的非显然零点数的估计 $N(T)\ll T^A$, 等等, Littlewood 于 1971 年说明了确实可用 Hardy–Littlewood–Karamata 定理得出素数定理一个简短的证明. 然而由于所有关于 $\sigma=1$ 上 $\zeta(s)\neq 0$ 的证明均给出了不弱于

$$|\zeta(s)|\gg\big\{\ln(3+|\tau|)\big\}^{-A}\qquad(\sigma\geqslant 1)\tag{7.67}$$

的估计, 这样的过程看起来不十分具有理论意义. 在假设 (7.67) 下, 只有 Perron 公式可以得出素数定理, 此时并不需要 Tauber 方法, 见 §4.2. Ikehara 定理的独到之处是在最少的假设 (即 $\sigma=1$ 上 $\zeta(s)\neq 0$) 下, 不用其他解析性质而得出结论.

Delange (1954) 将 Ikehara 定理推广到混合奇性, 即主项中容许单项式及对数的情形.

定理 7.28 (Delange) *令 $F(s):=\sum_{n\geqslant 1}a_n/n^s$ 为非负系数 Dirichlet 级数, 在 $\sigma>a>0$ 上收敛, 在直线 $\sigma=a$ 上除 $s=a$ 之外的点处收敛, 并假设在 $s=a$ 的邻域及 $\sigma>a$ 上有*

$$F(s)=\frac{1}{(s-a)^{\omega+1}}\sum_{0\leqslant j\leqslant q}g_j(s)\Big\{\log\Big(\frac{1}{s-a}\Big)\Big\}^j+g(s),$$

其中 ω 是任意实数, $g_j(s)$ 和 $g(s)$ 在 $s=a$ 处全纯, $g_q(a)$ 非零.

(i) 倘若 ω 不是负整数, 当 x 趋于无穷时有

$$A(x):=\sum_{n\leqslant x}a_n\sim\frac{g_q(a)}{a\Gamma(\omega+1)}x^a(\ln x)^\omega(\ln_2 x)^q;$$

(ii) 倘若 $\omega=-m-1$, m 是 $\geqslant 0$ 的整数且 $q\geqslant 1$, 那么当 x 趋于无穷时有

$$A(x)\sim(-1)^m m!\frac{qg_q(a)}{a}\frac{x^a(\ln_2 x)^{q-1}}{(\ln x)^{m+1}}.$$

§7.6 本节中给出了 Berry–Esseen 不等式的经典形式, 其中假设了两个分布函数之一是绝对连续的. 同样的方法可得到一般的结论, 其表述用到凝聚函数

$$Q_G(\ell):=\sup_z\{G(z+\ell)-G(z)\}\qquad(\ell>0).\tag{7.68}$$

Elliott (1980, 引理 1.47) 证明了上界估计

$$\|F-G\|_\infty \ll Q_G\left(\frac{1}{T}\right)+\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(\tau)-g(\tau)}{\tau}\right|\mathrm{d}\tau \tag{7.69}$$

对任意 T 对于 F 和 G 一致成立.

Stef 和 Tenenbaum (2001) 证明了与 Berry–Esseen 不等式类似的一个结果, 对分布函数的双边 Laplace 变换

$$\widehat{F}(u):=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-uz}\,\mathrm{d}F(z)$$

成立. 这推广了 Alladi (1987) 的结果.

定理 7.29 (Stef 和 Tenenbaum, 2001) 设 F, G 为两个分布函数, $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 是单调递增函数, 满足条件

$$h(u)\gg u^4 \qquad (u\geqslant 0). \tag{7.70}$$

令 ε, κ, L 为实数, 满足$0<\varepsilon<1/\{3+h(2)\}$, $0<\kappa\leqslant L$, 并使得

(i) $\big|\widehat{F}(u)-\widehat{G}(u)\big|\leqslant\varepsilon \qquad (0\leqslant u\leqslant\kappa)$,

(ii) $\widehat{F}(u)+\widehat{G}(u)\ll h\big(|u|\big)<\infty \qquad (-L\leqslant u\leqslant L)$,

那么

$$\|F-G\|_\infty \ll Q_G\Big(\frac{\ln L}{L}+\frac{\ln W}{W}\Big), \tag{7.71}$$

其中 W 是方程 $h(W)=1/\varepsilon$ 的解. (7.71) 中的常数至多依赖 κ 以及(7.70) 和 (ii) 中隐含的常数.

在 G 绝对连续且有有限密度函数的特殊情形下, 得到如下推论.

推论 7.30 (Stef 和 Tenenbaum) 保留定理 7.29 的条件, 并另外假设

(iii) G 绝对连续且 $G'\in L^\infty(\mathbb{R})$,

(iv) $\exists\vartheta\geqslant 1$, 使得 $\ln h(u)\ll 1+u^\vartheta$ $(0\leqslant u\leqslant L)$,

那么

$$\|F-G\|_\infty \ll \left(\frac{\ln L}{L}+\frac{\ln|\ln\varepsilon|}{|\ln\varepsilon|^{1/\vartheta}}\right)\|G'\|_\infty, \tag{7.72}$$

其中隐含的常数至多依赖于 κ 以及 (ii) 和 (iv) 中隐含的常数.

正如 Stef 和 Tenenbaum 文中所证明的, 至少当 $\vartheta=2k/(2k-1)$ $(k\in\mathbb{N}^*)$ 时 (7.27) 中 $|\ln\varepsilon|$ 的指数是最优的.

§7.7 第一章中提到的 Newman 定理是全纯性用作 Tauber 型条件的另一个例子. 以下给出其一个积分形式, 是 Korevaar (1982) 和 Zagier (1997) 的结果.

定理 7.31 (Newman, 1980; Korevaar, 1982; Zagier, 1997) 设 f 是 $\mathbb{R}^+$ 上局部可积的有界函数, 其原本在 $\Re e\, z > 0$ 上定义的 Laplace 变换

$$F(z) := \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tz}\,\mathrm{d}t$$

可解析延拓到半平面 $\Re e\, z \geqslant 0$ 上, 那么

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = F(0).$$

证明 令 $F_T(z) := \displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-tz}\,\mathrm{d}t$. 显然它是 z 的整函数. 需要证明当 $T \to \infty$ 时 $F_T(0)$ 趋于 $F(0)$. 令 $R > 0$ 为参数, 后面将让它趋于无穷. 令 L 为区域

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R,\, \Re e\, z \geqslant -\delta\}$$

的边界, 其中 $\delta > 0$ (作为 R 的函数) 足够小, 使得 F 在 $\mathcal{D}$ 上全纯. 于是由 Cauchy 积分公式得

$$F(0) - F_T(0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_L \{F(z) - F_T(z)\}\mathrm{e}^{zT}\Big(1 + \frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{\mathrm{d}z}{z}. \tag{7.73}$$

令 C 为半圆 $L \cap \{z : \Re e\, z > 0\}$ 的边界, $M := \|f\|_\infty$. 由于

$$|F(z) - F_T(z)| = \Big|\int_T^\infty f(t)\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant M\mathrm{e}^{-T\Re e\, z}/\Re e\, z \qquad (\Re e\, z > 0)$$

且

$$\Big|\mathrm{e}^{zT}\Big(1 + \frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{1}{z}\Big| = \mathrm{e}^{T\Re e\, z}\frac{2|\Re e\, z|}{R^2} \qquad (|z| = R), \tag{7.74}$$

可知在 C 上 (7.73) 中被积函数的绝对值不超过 $2M/R^2$, 这推出 C 对 (7.73) 中积分的贡献至多为 M/R. 将分别考虑 F 和 F_T 来估计 $B := L\backslash C$ 上积分的上界. 由于 F_T 是整函数, 可将 B 换成半圆 $C' := \{z \in \mathbb{C} : |z| = R,\, \Re e\, z < 0\}$ 的边界. 由于

$$|F_T(z)| = \Big|\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant M\int_{-\infty}^T \mathrm{e}^{-\Re e\, zt}\,\mathrm{d}t = \frac{M\mathrm{e}^{-\Re e\, zT}}{|\Re e\, z|} \qquad (\Re e\, z < 0),$$

由 (7.74) 知

$$\Big|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_B F_T(z)\mathrm{e}^{zT}\Big(1 + \frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{\mathrm{d}z}{z}\Big| \leqslant \frac{M}{R}.$$

最后, 对每个固定的 $R > 0$, 由 Lebesgue 定理知

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_B F(z)\mathrm{e}^{zT}\Big(1 + \frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{\mathrm{d}z}{z} = 0,$$

从而

$$\limsup_{T\to\infty} |F(0) - F_T(0)| \leqslant 2M/R.$$

令 R 趋于无穷便得要求的结论. □

§7.8 Landau 实际上证明了比定理 7.22 更广的形式: 若 $\sum_{n\leqslant 1} g(n)/n = a$ 为 k 阶 Cesàro 平均且 $g(n) \geqslant -K \quad (n \geqslant 1)$, 那么 (7.64) 成立, 见 Hardy (1949) 定理 64.

定理 7.24 的证明与 Skałba 的不同, 后者中虽然提到了推论 7.23, 但其实并没有用到它.

Erdős 和 Ingham (1964) 研究了算术 Tauber 型定理深刻的推广.

习题

219. 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $b \in \mathbb{R}$. 令 $s_n := \sum_{0\leqslant m\leqslant n} a_m \quad (n \geqslant 0)$.

(a) 用 $a_0, \ldots, a_N$ 来表示 $b_N := (1/N)\sum_{0\leqslant n\leqslant N} s_n$. 在

$$\lim_{N\to\infty} b_N = b \tag{7.75}$$

的假设下推出级数 $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ 收敛到 b 且 $\sum_{0\leqslant n\leqslant N} na_n = o(N)$ $(N \to \infty)$ 的一个充要条件.

(b) 假定 (7.75) 成立.

i) 将 s_n 表示为 b_n 和 b_{n-1} 的函数. 证明级数 $S(z) := \sum_{n\geqslant 0} s_n z^n$ 和 $A(z) := \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 在开单位圆盘上收敛.

ii) 证明 $S(x) = (1-x)\sum_{n\geqslant 0} nb_n x^n$ 对于 $0 < x < 1$ 成立. 推出 $\lim_{x\to 1-}(1-x)S(x) = b$. 可记 $b_n = b + \varepsilon_n \quad (n \geqslant 0)$, 其中 ε_n 趋于 0, 估计 $E(x) := |\sum_{n\geqslant 0} \varepsilon_n n x^n|$ 的上界.

iii) 对 $0 < x < 1$, 将 $(1-x)S(x)$ 表示成 $A(x)$ 的函数.

(c) 令 $K \in \mathbb{R}$. 为使 (7.75) 蕴涵级数 $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ 收敛到 b, Tauber 型条件 $\inf_{n\in\mathbb{N}} na_n > -K$ 是否充分?

220. 从定理 7.10 推出估计④

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \ll \frac{\ln x}{\ln_2 x} \qquad (x \to \infty).$$

221. 令 $a_n := \sum_{d|n}(-1)^d 2^{\omega(n/d)}$, 其中 $\omega(m)$ 表示 m 的相异素因子个数. 确定 $\sigma \to 1_+$ 时 $\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-\sigma}$ 的渐近性质. 由 Karamata–Freud 定理推出

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{a_n}{n} \ll \frac{(\ln x)^3}{\ln_2 x} \qquad (x \to \infty).$$

④ 注意到显然该估计比第一部分 (3.15) 要弱得多, 但它只用到关于 Möbius 函数的 Dirichlet 级数 $1/\zeta(s)$ 的一小部分信息.

用 Selberg–Delange 方法证明

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{a_n}{n}\sim C(\ln x)^2,$$

其中 $C:=-(3\ln 2)/\pi^2$.

222. 令 $\{a_p\}$ 为素指标有界序列. 证明若当 $\sigma\to 1_+$ 时 $\sum a_p p^{-\sigma}$ 收敛, 那么级数 $\sum a_p/p$ 亦收敛. 证明对于整指标序列该结论不对.

223. 令 A 为正常数, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为复序列, 对任意 $n\geqslant 1$ 满足 $|b_n|\leqslant A\tau(n)$ 及

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{b_n}{n^\sigma}=o\Big(\frac{1}{(\sigma-1)^2}\Big)\qquad(\sigma\to 1_+). \tag{7.76}$$

1. 是否必有 $\sum_{n\leqslant x}b_n/n=o\big((\ln x)^2\big)\quad(x\to\infty)$?
2. 是否必有$\sum_{n\leqslant x}b_n=o(x\ln x)\quad(x\to\infty)$?
3. 令 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为有界复序列, 使得

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^\sigma}=o\Big(\frac{1}{\sigma-1}\Big)\qquad(\sigma\to 1_+).$$

今假设 $b_n:=\sum_{d|n}a_d$. 证明 (7.76). 对序列 $n\mapsto b_n$ 结构的附加假设是否使对问题 (a) 和 (b) 的回答有所改变?

224. 令 $Z(s):=\zeta'(s)/\{s\zeta(s)\}$. 证明 $\forall\tau\neq 0$, $\zeta(1+\mathrm{i}\tau)\neq 0$ 的假设蕴涵了对任意固定的 T 有

$$\lim_{\sigma\to 0_+}\int_{-T}^{T}\Big|Z(1+2\sigma+\mathrm{i}\tau)-Z(1+\sigma+\mathrm{i}\tau)-\frac{1}{2\sigma+\mathrm{i}\tau}+\frac{1}{\sigma+\mathrm{i}\tau}\Big|\mathrm{d}\tau=0.$$

利用 Ikehara 定理, 由之推出素数定理.

225. 利用 §4.2 中证明的基本上界估计

$$\zeta^{(k)}(s)\ll(\ln|\tau|)^{k+1},\qquad \zeta(s)^{-1}\ll(\ln|\tau|)^7\quad(|\tau|\geqslant 2,\ \sigma\geqslant 1),$$

来证明习题 224 中的积分对于 $T\geqslant 2$, $\sigma>0$ 来说 $\ll\sigma(\ln T)^{19}$. 利用定理 7.13 推出实效估计

$$\psi(x):=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)=x+O\Big(x\frac{(\ln_2 x)^{19}}{\ln x}\Big).$$

226. 用习题 225 的方法证明上界估计

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\ll x\frac{(\ln_2 x)^{17}}{\ln x}.$$

[提示: 利用 Dirichlet 级数 $\zeta(s)+1/\zeta(s)$.]

227. Berry–Esseen 定理. 设 X 是零期望且方差为 1 的实随机变量, 具有有限的三阶矩 ϱ. 令 $F(x) := \operatorname{Prob}(X \leqslant x) \quad (x \in \mathbb{R})$ 及

$$\varphi(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau x}\,\mathrm{d}F(x) \qquad (\tau \in \mathbb{R}).$$

最后, 用 $F_n(x)$ 表示 $(1/\sqrt{n})\sum_{j=1}^{n} X_j$ 的分布函数, 其中 X_j 是相互独立的随机变量, 与 X 同分布.

(a) 证明 $\varrho \geqslant 1$.

(b) 利用不等式

$$\Big|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \sum_{0\leqslant j\leqslant m} \frac{1}{j!}(\mathrm{i}y)^j\Big| \leqslant \frac{1}{(m+1)!}|y|^{m+1} \qquad (y \in \mathbb{R},\ m \geqslant 0)$$

以及 $|\ln(1-y)+y| \leqslant |y|^2 \quad (|y| \leqslant \frac{1}{2})$ 证明

$$|\varphi(\tau)-1| \leqslant \tfrac{1}{2}\tau^2, \quad \big|\varphi(\tau)-1+\tfrac{1}{2}\tau^2\big| \leqslant \tfrac{1}{6}\varrho|\tau|^3 \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$
$$\Big|\ln\varphi(\tau)+\tfrac{1}{2}\tau^2\Big| \leqslant \tfrac{1}{4}\tau^4 + \tfrac{1}{6}\varrho|\tau|^3 \quad (|\tau| \leqslant 1).$$

(c) 证明对 $n \geqslant 1$ 有

$$\Big|\varphi\Big(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\Big)^n - \mathrm{e}^{-\tau^2/2}\Big| \ll \mathrm{e}^{-\tau^2/4}\Big\{\varrho\frac{|\tau|^3}{\sqrt{n}} + \frac{\tau^4}{n}\Big\} \qquad (\varrho|\tau| \leqslant \sqrt{n}).$$

(d) 由上推出

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|F_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant C\frac{\varrho}{\sqrt{n}},$$

其中 C 是适当的绝对常数.[⑤]

228. Wirsing (1956) 的一个想法. 设 $\mathcal{P}$ 为素数类, ϑ 为素因子均在 $\mathcal{P}$ 中的整数之集的示性函数. 令 $T(x) := \sum_{n\leqslant x}\vartheta(n)$. 假定存在常数 $\delta > 0$ 和 $K > 0$, 使得当 $x \to +\infty$ 时,

$$\text{i)}\quad \sum_{p\leqslant x}\vartheta(p) \sim \frac{\delta x}{\ln x}, \qquad \text{ii)}\quad \prod_{p\leqslant x}\Big(1+\frac{\vartheta(p)}{p-1}\Big) \sim K(\ln x)^{\delta}.$$

(a) 证明当 $x \to \infty$ 时, 有

$$\text{iii)}\quad \sum_{n\leqslant x}\vartheta(n)\ln n \sim \delta x\sum_{m\leqslant x}\frac{\vartheta(m)}{m}, \qquad \text{iv)}\quad T(x) \sim \frac{\delta x}{\ln x}\sum_{m\leqslant x}\frac{\vartheta(m)}{m}.$$

⑤ Feller (1970) 证明了 $C = 3$ 可以.

(b) 证明仅从关系 i) 便可推出, 当 $\sigma \to 0_+$ 时

$$\sum_{p\leqslant \exp(1/\sigma)} \frac{\vartheta(p)}{p}(1-p^{-\sigma}) - \sum_{p>\exp(1/\sigma)} \frac{\vartheta(p)}{p^{1+\sigma}} = \gamma\delta + o(1).$$

从中得出

$$\sum_{m\geqslant 1} \frac{\vartheta(m)}{m^{1+\sigma}} \sim \mathrm{e}^{-\gamma\delta} \prod_{p\leqslant \exp(1/\sigma)} \left(1-\frac{\vartheta(p)}{p}\right)^{-1} \qquad (\sigma \to 0+).$$

(c) 证明在 i) 和 ii) 的假设下有

$$T(x) \sim \frac{\delta K \mathrm{e}^{-\gamma\delta}}{\Gamma(\delta+1)} x(\ln x)^{\delta-1} \qquad (x \to \infty).$$

229. Ingham 定理 (推论7.23) 的一个逆命题. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界复数列, 使得 $\sum_{n\geqslant 1} a_n/n = a$.

(a) 证明对任意固定的 $y > 1$, 有

$$\sum_{N/y<n\leqslant N} a_n \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor = \sum_{m\leqslant y} \int_0^{N/m} \sum_{\max(t,N/y)<n\leqslant N/m} \frac{a_n}{n}\,\mathrm{d}t = o(N).$$

(b) 推出

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} a_n \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor = a. \tag{7.77}$$

(c) 应用: 设 $\vartheta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. 令 $\tau^*(n,\vartheta) := \sum_{d|n} \mathrm{e}(d\vartheta)$. 证明当 N 趋于无穷时,

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} \tau^*(n,\vartheta)$$

收敛于有限的极限, 并计算之.

230. (a) 证明当 $\sigma \to 0_+$ 时 $\sum_{n\geqslant 0} n\mathrm{e}^{-n^2\sigma} \sim 1/(2\sigma)$.

(b) 推出 Hardy–Littlewood 定理的如下变体: 设 $K \in \mathbb{R}$ 及 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为实数列, 满足 $na_n \geqslant -K$ $(n \geqslant 1)$ 且

$$F(\sigma) := \sum_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{e}^{-\sigma n^2} = s + o(1) \qquad (\sigma \to 0_+),$$

那么级数 $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ 收敛到 s.

(c) 证明 $\lim_{\sigma\to 0+} \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \mathrm{e}^{-\sigma n^2} = \frac{1}{2}$. 从中还能得到什么结论?

231. 设 $g(n) := \sum_{d|n} \mu(d)\mathrm{e}^{in/d}$ $\quad (n \geqslant 1)$. 证明级数 $\sum_{n\geqslant 1} g(n)/n$ 收敛并计算其极限.

第八章　算术数列中的素数分布

§8.1　简介, Dirichlet 特征

§8.1.1　定义

令 a 和 q 为互素的两个整数. 从先验上没有道理说只有有限多个素数满足 $p \equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)$. 既然没有与之相反的迹象, 甚至有理由猜测素数在 $\varphi(q)$ 个可能含无穷多个素数的剩余类中是均匀分布的. 令

$$\pi(x;a,q) := \big|\{p \leqslant x\ :\ p \equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)\}\big|,$$ [①]

考虑到素数定理, 这样的等分布假说自然导出如下猜想

$$\pi(x;a,q) \sim \frac{x}{\varphi(q)\ln x} \qquad (x \to \infty).$$

该问题的研究与素数分布规律的研究相平行, 自有其引人入胜的历史. 它最终于 1896 年被 La Vallée-Poussin 综合其素数定理证明的方法 (如第四章中所见, 很大程度上基于 Riemann 的想法) 以及 Dirichlet 于 19 世纪上半叶创造的独特工具而证明.

这个方向上的第一步便是严格证明在每个适当的算术数列 $a\,(\mathrm{mod}\,q)$ 中均有无穷多个素数, 其中 $(a,q)=1$.

$a=3$, $q=4$ 以及 $a=5$, $q=6$ 的情形分别在习题 34 和习题 35 中讨论, 可用 Euclide 定理证明的一个显然推广而得.

① 文献中常将该常数记作 $\pi(x;q,a)$. 这里特意保持 a 和 q 在同余式 $n \equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)$ 中的顺序.

$p \equiv 1 \pmod 4$ 的情形较为微妙, 但正如习题 38 中所见, 用类似的技巧仍可得.

可以想象, 这种预设存在某个整系数多项式, 其在整点上的值被无穷多个素数整除的方法可以适用于任何适当的算术数列. 这其实并不然: Ram Murty 于 1988 年证明了任何对形如 $a+mq$ 的素数无限性的 "Euclide" 式证明成立的充要条件是 $a^2 \equiv 1 \pmod q$.[②]

这个问题的一般解答是 Dirichlet 于 1837 年提出的[③]. 他的出发点是 Euler 对素数集无限性的证明, 容易看出, 从中还可得出级数 $\sum_p 1/p$ 是发散的.

Dirichlet 的确证明了

$$\sum_{p\equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)} \frac{1}{p} = \infty$$

对所有满足 $(a,q)=1$ 的 a, q 成立. 他的证明的显著特点是用到了模 q 特征标, 亦即从 $\mathrm{mod}\, q$ 可逆剩余类群 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ 到模为 1 的复数乘法群的同态.

在此并不讨论有限交换群特征标的一般理论. 只对用到的主要性质作简略介绍.

设 G 是有限交换群. 令 $\widehat{G}$ 为所有同态 $\chi: G \to \mathbb{C}^*$ (称为群 G 的特征标)构成的乘法群.

令

$$G \cong \prod_{1\leqslant j\leqslant k} G_j$$

为 G 的循环群乘积分解. 令 $n_j := |G_j|$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$, 这样 $n := |G| = \prod_{1\leqslant j\leqslant k} n_j$. 若 γ_j $(1\leqslant j\leqslant k)$ 是 G_j 的一个生成元, G 中的每个元素 γ 可唯一地分解为乘积

$$\gamma = \prod_{1\leqslant j\leqslant k} \gamma_j^{r_j} \qquad \big(1 \leqslant r_j \leqslant n_j \, (1\leqslant j\leqslant k)\big). \tag{8.1}$$

于是对每个 G 的特征标 χ, 有

$$\chi(\gamma) = \prod_{1\leqslant j\leqslant k} \chi(\gamma_j)^{r_j}.$$

故而 χ 的信息与 $\chi(\gamma_j)$ $(1\leqslant j\leqslant k)$ 的信息等价. 而且由 γ_j 的阶恰为 n_j 的事实推出 $\chi(\gamma_j)$ 是 n_j 阶单位根. 反过来, 对任意 $\zeta_j = \mathrm{e}\big(h_j/n_j\big)$ $(1\leqslant j\leqslant k)$,

② 也见 Murty 和 Thain (2006).

③ 严格地讲, Dirichlet 的证明仅在 q 是素数的情形是完整的. 一般情形用到 Dirichlet 的类数公式, 直至 1839/1840 年才被证明.

$1 \leqslant h_j \leqslant n_j$ 的选择, 映射 $\chi: G \to \mathbb{C}$,

$$\chi(\gamma) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} \zeta_j^{r_j}$$

是 G 的特征标, 其中 γ 如 (8.1). 而且形如这样的乘积特征标两两不同. 所以 $\widehat{G}$ 对于通常的映射乘积构成 n 阶交换群.

下列简单的性质是交换群特征标概念的基本特性之一. 令 χ_0 为平凡特征标, 其定义为: 对任意 $\gamma \in G$, $\chi_0(\gamma) = 1$.

定理 8.1 对任意 n 阶交换群 G, 有

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(\gamma) = \begin{cases} n, & \text{若 } \gamma = 1, \\ 0, & \text{若 } \gamma \neq 1, \end{cases} \qquad (\gamma \in G), \tag{8.2}$$

$$\sum_{\gamma \in G} \chi(\gamma) = \begin{cases} n, & \text{若 } \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{若 } \chi \neq \chi_0 \end{cases} \qquad (\chi \in \widehat{G}). \tag{8.3}$$

证明 两个关系的证明类似, 只证前者.

令 S 为 (8.2) 的左边. 倘若 $\gamma = 1$, 对任意 χ 有 $\chi(\gamma) = 1$. 故 $S = |\widehat{G}| = n$. 若 $\gamma \neq 1$, 存在某特征标 χ_1 使得 $\chi_1(\gamma) \neq 1$. 设 γ 如 (8.1). 重排因子后可设 $r_1 \neq n_1$. 映射 $\chi_1(\gamma_1) = \mathrm{e}(1/n_1)$, $\chi_1(\gamma_j) = 1$ $(2 \leqslant j \leqslant k)$ 便具有要求的性质. 注意到当 χ 遍历 $\widehat{G}$ 时$\chi\chi_1$ 亦然, 故得

$$\chi_1(\gamma)S = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi_1(\gamma)\chi(\gamma) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} (\chi\chi_1)(\gamma) = S,$$

从而 $S = 0$.

由上文知 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ 恰有 $\varphi(q)$ 个特征标. 将 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ 分解成循环群的乘积可将它们具体表示出来. 由中国剩余定理, 对任意整数 $q \geqslant 1$, 有

$$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \cong \prod_{p^\nu \| q} (\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})^*. \tag{8.4}$$

事实上, 若记 q_j $(1 \leqslant j \leqslant \omega(q))$ 为恰整除 q 的素数的幂, 并对每个 j 记 a_j 为使得

$$a_j \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, q_j), \qquad a_j \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q_i) \quad (i \neq j)$$

的唯一的 $\mathrm{mod}\, q$ 整数, 那么任意整数 m 满足同余关系

$$m \equiv \sum_j a_j m_j \,(\mathrm{mod}\, q),$$

其中 m_j 是 $m \pmod{q_j}$ 的余数. 由于对任意 j, $(m,q)=1$ 等价于 $(m_j,q_j)=1$, 可知 (8.4) 左边在右边的投影良定义且是满射, 故 (8.4) 成立.

当 $p>2$ 时, $(\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})^*$ 是循环群, 见习题 232 和习题 233; 而当 $p=2$ 时, 群 $(\mathbb{Z}/2^\nu\mathbb{Z})^*$ 的结构应分三种情况考虑: 若 $\nu=1$, 是平凡群; 若 $\nu=2$, 则是 2 阶(循环)群; 倘若 $\nu\geqslant 3$, 则是 2 阶群与 $2^{\nu-2}$ 阶循环群的乘积. 为验证最后这一结论, 先注意到用归纳法易证

$$5^{2^{m-2}}=1+2^m h_m \qquad (m\geqslant 2), \tag{8.5}$$

其中 h_m 是奇数. 对 $m=\nu$ 应用此关系得 5 模 2^ν 的阶整除 $2^{\nu-2}$. 而选取 $m=\nu-1$ 便知该阶不整除 $2^{\nu-3}$, 从而它即是 $2^{\nu-2}$. 注意到 5 不是模 8 平方剩余, 这便排除了 $(\mathbb{Z}/2^\nu\mathbb{Z})^*$ 是循环群的可能性, 命题于是成立. □

现在可具体确定 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ 的特征标. 将 q 分解成素因子的乘积

$$q=2^\nu\prod_{1\leqslant j\leqslant k}p_j^{\nu_j},\quad 2<p_1<\cdots<p_k,\quad \nu\geqslant 0,\quad \nu_j>0\quad (1\leqslant j\leqslant k).$$

对每个指标 j, 令 g_j 为模 $p_j^{\nu_j}$ 的原根, 即 $(\mathbb{Z}/p_j^{\nu_j}\mathbb{Z})^*$ 的一个生成元. 对每个使得 $(m,q)=1$ 的整数 m, 可唯一地定义 $\varepsilon(m)$, $\eta(m)$, $\mu_j(m)$ $(1\leqslant j\leqslant k)$, 满足

$$\begin{aligned}
&m\equiv(-1)^{\varepsilon(m)}5^{\eta(m)} \pmod{2^\nu},\quad \varepsilon(m)=0 \text{ 或 } 1,\quad 0\leqslant\eta(m)<2^{\nu-2},\\
&m\equiv g_j^{\mu_j(m)} \pmod{p_j^{\nu_j}},\quad 0\leqslant\mu_j(m)<\varphi(p_j^{\nu_j})\quad(1\leqslant j\leqslant k).
\end{aligned}$$

若 $\nu=0$ 或 1, 约定 $\varepsilon(m)=0$.

在此记号下, $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ 的特征标是该群上定义为

$$\chi(m)=\mathrm{e}\left(\frac{\lambda\varepsilon(m)}{2}+\frac{\lambda'\eta(m)}{2^{\nu-2}}+\sum_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{\lambda_j\mu_j(m)}{\varphi(p_j^{\nu_j})}\right)\quad(m\in(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*) \tag{8.6}$$

的 $\varphi(q)$ 个函数, 其中 λ, λ', λ_j 是满足

$$\lambda=0 \text{ 或 } 1,\quad 0\leqslant\lambda'<2^{\nu-2},\quad 0\leqslant\lambda_j<\varphi(p_j^{\nu_j})\quad(1\leqslant j\leqslant k)$$

的任意参数.

定义 8.2 所谓模 q Dirichlet 特征是指依下式定义而延拓群 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ 上某特征标 χ 的数论函数:

$$\chi(n)=\begin{cases}\chi(m), & \text{若 } n\equiv m \pmod q,\ 1\leqslant m\leqslant q,\ (m,q)=1,\\ 0, & \text{若 } (n,q)>1.\end{cases} \tag{8.7}$$

例 (i) 模 3 唯一的非平凡特征是

$$\chi_3(m) := \frac{\mathrm{e}(m/3) - \mathrm{e}(-m/3)}{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \begin{cases} 1, & 若\ m \equiv 1 \pmod 3, \\ -1, & 若\ m \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

(ii) 设 χ_4 是模 4 唯一的非平凡特征. 必有 $\chi_4(1) = 1$, $\chi_4(-1) = -1$, 故 $\chi_4(2n+1) = (-1)^n$ 对任意 $n \geqslant 0$ 成立.

(iii) 由于 2 是模 5 原根, 有$m \equiv 2^{\mu_2(m)} \pmod 5$, 其中 μ_2 是 $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$ 上的函数, 定义为

$$\mu_2(1) = 4, \quad \mu_2(2) = 1, \quad \mu_2(3) = 3, \quad \mu_2(4) = 2.$$

选取 $\lambda_2 = 2$, 定义一个模 5 Dirichlet 特征为

$$\chi(n) = (-1)^{\mu_2(n)} = \begin{cases} 1, & 若\ n \equiv \pm 1 \pmod 5, \\ -1, & 若\ n \equiv \pm 2 \pmod 5. \end{cases}$$

注意: 若 $n \equiv 0 \pmod 5$, $\chi(n) = 0$. 这是模 5 唯一的非平凡实特征. 容易证明它等于 Legendre 符号. 一般地, 模某个奇数 q 的 Jacobi 符号具有形如下式的特征:

$$\chi(n) = \left(\frac{n}{q}\right) := \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} \left(\frac{n}{p_j}\right)^{\nu_j} = (-1)^{\sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \nu_j \mu_j(n)} \qquad \big(n \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*\big).$$

$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ 上特征标是群同态的性质体现为 Dirichlet 特征是完全乘性函数的事实. 通过定理 8.1 可得到如下基本关系. 通常, 用 χ_0 表示单位特征标的延拓, 即

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1, & 若\ (n, q) = 1, \\ 0, & 若\ (n, q) > 1, \end{cases} \tag{8.8}$$

称为主特征.

定理 8.3 (正交性) (a) 对任意整数 $n, m \geqslant 1$, 有

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod q} \chi(n)\overline{\chi(m)} = \begin{cases} 1, & 若\ n \equiv m \pmod q\ 且\ (m, q) = 1, \\ 0, & 若以上不然. \end{cases} \tag{8.9}$$

(b) 对任意模 q Dirichlet 特征 χ, χ', 有

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{1 \leqslant n \leqslant q} \chi(n)\overline{\chi'(n)} = \begin{cases} 1, & 若\ \chi = \chi', \\ 0, & 若以上不然. \end{cases} \tag{8.10}$$

§8.1.2 本原特征

某些结果对一类特殊的特征来说具有较简单的形式, 这类特征称为本原特征.

定义 8.4 若模 q Dirichlet 特征 χ 使得不存在模 $q_1 < q$ 的特征 χ_1 对于任意与 q 互素的整数 n 均满足 $\chi(n) = \chi_1(n)$, 则称之为本原特征.

当这样的 χ_1 存在时则说 χ_1 诱导 χ. 此时显然有

$$(m,q) = (n,q) = 1 \text{ 且 } m \equiv n \pmod{q_1} \Longrightarrow \chi(m) = \chi(n). \tag{8.11}$$

反过来, 若 q_1 满足 (8.11), 容易用中国剩余定理证明, 对所有满足 $(n,q_1) = 1$ 的整数 n, 存在整数 t 使得 $(n + tq_1, q) = 1$. ④ 于是可令 $\chi_1(n) := \chi(n + tq_1)$. 如上文所指出的, 该定义与 t 的选择无关. 这样便定义了一个模 q_1 Dirichlet 特征 χ_1: χ_1 模 q_1 周期地构造, 且当 $(mn, q_1) = 1$ 时, 对适当的整数 s 和 t, 有

$$\chi_1(mn) = \chi((m + sq_1)(n + tq_1)) = \chi(m + sq_1)\chi(n + tq_1) = \chi_1(n)\chi_1(m).$$

显然 χ_1 诱导 χ.

于是便证明了, 特征 χ 本原的充要条件是 q 为满足 (8.11) 的最小整数 q_1.

若 χ_1 是模 $q_1 < q$ 特征, 诱导 χ, 且 q_1 最小, 那么 $q_1 \mid q$. 这是因为, 若 (8.11) 对 q_1 成立, 那么对 (q, q_1) 亦然.

性质 8.5 每个非本原模 q Dirichlet 特征 χ 被一个某模 q 的非平凡因子 q_1 的本原特征 χ_1所诱导. 当 $(n, q_1) = 1$ 时有 $\chi_1(n) := \chi(n + tq_1)$, 其中 t 是使得 $(n + tq_1, q) = 1$的任意整数.

证明 设 χ 为模 q 非本原特征, $q_1 < q$ 为满足 (8.11) 的最小整数. 前面已验证如上定义的映射 χ_1 是诱导 χ 的 Dirichlet 特征. 有 $\chi_1(1) = \chi(1) = 1$, 故 χ_1 不总为零. 另外, χ_1 必为本原特征, 这是因为若由 $(m, q_1) = (n, q_1) = 1$ 和 $m \equiv n \pmod{q_2}$ 推出 $\chi_1(m) = \chi_1(n)$, 那么 q_2 满足 (8.11), 从而由 q_1 的极小性知 $q_2 \geqslant q_1$.

现证唯一性. 若 χ_2 是诱导 χ 的模 q_2 本原特征, 那么 q_2 满足 (8.11), 从而由 q_1 的极小性知 $q_2 = q_1$. 设 n 使得 $(n, q_1) = 1$, 那么对适当的整数 t 有 $(n + tq_1, q) = 1$. 从而 $\chi_2(n) = \chi_2(n + tq_1) = \chi(n + tq_1) = \chi_1(n)$. 这样 $\chi_1 = \chi_2$. □

通常称诱导特征的本原特征的模为该特征的导子, 这也等于诱导它的特征的最小模.

---

④ 事实上, 由于 $(n, q_1) = 1$, $n + tq_1$ 总与 q_1 的任意素因子 p 互素; 而且 q_1 模 p 可逆, 可取 $n + tq_1$ 使之与 q 的不整除 q_1 的任意素因子 p 互素.

§8.1.3 Gauss 和

定义 8.6 设 χ 为模 q Dirichlet 特征. 将数论函数

$$G(n,\chi) := \sum_{1\leqslant m\leqslant q} \chi(m)\mathrm{e}(mn/q) \qquad (n\geqslant 1)$$

称为相应于 χ 的 Gauss 和.

定理 8.7 设 χ 是模 q 本原特征. 那么

$$G(n,\chi) = \overline{\chi(n)}G(1,\chi) \qquad (n\geqslant 1). \tag{8.12}$$

证明 若 $\chi=\chi_0$, 那么由本原性条件推出 $q=1$, 结论是平凡的. 故在下文中可设 χ 不是主特征.

若 $(n,q)=1$, 那么

$$\overline{\chi(n)}G(1,\chi) = \sum_{1\leqslant m\leqslant q} \overline{\chi(n)}\chi(m)\mathrm{e}(m/q) = \sum_{1\leqslant h\leqslant q} \overline{\chi(n)}\chi(nh)\mathrm{e}(nh/q) = G(n,\chi),$$

这是由于当 h 取遍 $[1,q]$ 时 nh 遍历模 q 剩余类. 另外, 当 χ 非本原时该式仍成立.

当 $(n,q)>1$ 时, 须证 $G(n,\chi)=0$. 令 $d=(n,q)$, $n=dn_1$, $q=dq_1$. 这样 $(n_1,q_1)=1$. 可设 $q_1>1$: 在相反的情形下有 $q\mid n$, 从而

$$G(n,\chi) = \sum_{1\leqslant m\leqslant q} \chi(m) = 0.$$

须证明关系

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant q} \chi(m)\mathrm{e}(mn_1/q_1) = 0. \tag{8.13}$$

将每个整数 $m\in[1,q]$ 分解为 $m=uq_1+v$ 的形式, 其中 $0\leqslant u<d$, $1\leqslant v\leqslant q_1$. 这样 $\mathrm{e}(mn_1/q_1)=\mathrm{e}(vn_1/q_1)$, 且 (8.13) 的左边等于

$$\sum_{1\leqslant v\leqslant q_1} \mathrm{e}(vn_1/q_1) \sum_{0\leqslant u<d} \chi(uq_1+v).$$

将证明内部的和式 (记作$S(v)$) 恒零. 有

$$S(v+q_1) = \sum_{1\leqslant u\leqslant d} \chi(uq_1+v) = \sum_{0\leqslant u<d} \chi(uq_1+v) - \chi(v) + \chi(q+v) = S(v),$$

故 S 是 q_1-周期的. 令 c 使得 $(c,q)=1$, $c\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, q_1)$. 这样

$$\chi(c)S(v) = \sum_{0\leqslant u<d} \chi(cuq_1+cv) = \sum_{0\leqslant w<d} \chi(wq_1+cv).$$

这是因为当 u 遍历 $\{0,1,\ldots,d-1\}$ 时, $w=cu$ 遍历模 d 的所有剩余类. 从而

$$\chi(c)S(v)=S(cv)=S(v), \tag{8.14}$$

其中用到 $cv\equiv v\,(\mathrm{mod}\,q_1)$ 的事实以及 S 的 q_1-周期性. 而 χ 是本原的, 关系 (8.11) 对 q_1 不成立. 故可找到整数 c_1 和 c_2 使得

$$(c_1c_2,q)=1,\qquad \chi(c_1)\neq\chi(c_2),\qquad c_1\equiv c_2\,(\mathrm{mod}\,q_1).$$

对 $c\equiv c_1\bar{c}_2\,(\mathrm{mod}\,q)$ 的选择, 有 $\chi(c)\neq 1$. 由 (8.14), 这推出 $S(v)=0$. □

定理 8.8 对所有模 q 本原 Dirichlet 特征, 有

$$|G(1,\chi)|=\sqrt{q}. \tag{8.15}$$

证明 对任意整数 n, 有

$$|\chi(n)|^2\,|G(1,\chi)|^2=|G(n,\chi)|^2=\sum_{1\leqslant m,h\leqslant q}\chi(m)\overline{\chi(h)}\mathrm{e}((m-h)n/q).$$

对 $1\leqslant n\leqslant q$ 求和. 左边等于 $\varphi(q)|G(1,\chi)|^2$. 右边容易用交换和号来计算：内部对 n 的和式除 $q\mid(m-h)$ 外为零, 否则为 q. 从而

$$\varphi(q)|G(1,\chi)|^2=q\sum_{1\leqslant m\leqslant q}|\chi(m)|^2=q\varphi(q).$$ □

下列性质可用来计算非本原特征 Gauss 和的模, 证明留作练习.

性质 8.9 令 χ 为模 q 非本原 Dirichlet 特征, χ_1 为诱导它的模 q_1 本原特征, 那么在 $r=q/q_1$ 的记号下有

$$G(1,\chi)=\begin{cases}\mu(r)\chi_1(r)G(1,\chi_1), & 若\ (q_1,r)=1,\\ 0, & 若\ (q_1,r)>1.\end{cases}$$

§8.1.4 界

在关于算术数列中素数分布的许多问题中, 对于数量

$$K(x):=\sum_{n\leqslant x}\chi(n) \tag{8.16}$$

个体或均值的上界估计十分关键. $\chi=\chi_0$ 的情形属于筛法论的范畴. 比如, 对任意固定的 $\varepsilon>0$,

$$K(x)\ll\langle x/q\rangle\varphi(q)$$

对 $x \geqslant P^+(q)^\varepsilon$ 成立. 当 $\chi \neq \chi_0$ 时, 由周期性, 关系 (8.10) 应用于 $\chi' = \chi_0$ 推出

$$H(\chi) := \max_{x \geqslant 1} |K(x)| \leqslant \tfrac{1}{2}. \tag{8.17}$$

如下定理分别独立地由 G. Pólya 和 I.M. Vinogradov 于 1918 年证明, 它可观地改进了不等式 (8.17).

定理 8.10 (Pólya–Vinogradov) 设 χ 为模 $q \geqslant 2$ 非主 Dirichlet 特征, 有

$$H(\chi) \leqslant 2\sqrt{q}\ln q. \tag{8.18}$$

证明 先设 χ 本原. 通常记 $G(\chi) := G(1,\chi)$, 由 (8.12) 得

$$\chi(n) = \frac{1}{G(\overline{\chi})} \sum_{1 \leqslant m \leqslant q} \overline{\chi(m)} \mathrm{e}(mn/q). \tag{8.19}$$

从而

$$K(x) = \sum_{n \leqslant x} \chi(n) = \frac{1}{G(\overline{\chi})} \sum_{1 \leqslant m \leqslant q} \overline{\chi(m)} \sum_{n \leqslant x} \mathrm{e}(mn/q).$$

令 $N := \lfloor x \rfloor$. 内部和式的模等于

$$|\sin(\pi N m/q)/\sin(\pi m/q)| \leqslant 1/|\sin(\pi m/q)|.$$

由于 $\chi(q) = 0$, 得

$$|K(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{1 \leqslant m < q} \frac{1}{|\sin(\pi m/q)|} \leqslant 2\sqrt{q} \sum_{1 \leqslant m \leqslant (q-1)/2} \frac{1}{2m} < \sqrt{q}\ln q,$$

其中用到了上界估计

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant t} \frac{1}{m} < \ln(2t+1) \qquad (t > 0),$$

对 $k := \lfloor t \rfloor$ 归纳易证.

若 χ 非本原, 它由某本原模 q_1 特征 χ_1 诱导, q_1 整除 q. 于是用 $K_1(y)$ 来记 χ_1 的和函数后便得

$$K(x) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,q)=1}} \chi(n) = \sum_{n \leqslant x} \chi(n) \sum_{d \mid (n,q)} \mu(d) = \sum_{d \mid q} \mu(d)\chi_1(d)K_1(x/d),$$

从而得到

$$H(\chi) \leqslant \sqrt{q_1}\ln q_1 \left| \sum_{d \mid q} \mu(d)\chi_1(d) \right|.$$

由于 $\chi_1(d)=0$ 对 $(d,q_1)>1$ 成立, 对 d 和式的模不超过

$$\sum_{t|q/q_1}\mu(t)^2=2^{\omega(q/q_1)}\leqslant\tau(q/q_1)\leqslant 2\sqrt{q/q_1}.$$

这便推出 (8.18). □

注 从上述证明实际上可得出

$$\max_{x,y}|K(x)-K(y)|\leqslant 2\sqrt{q}\ln q_1\leqslant 2\sqrt{q}\ln q. \tag{8.20}$$

容易证明 Pólya–Vinogradov 上界估计离最优值并不远.

定理 8.11 对任意模 q 本原 Dirichlet 特征 χ, 有

$$H(\chi)\geqslant\tfrac{1}{4}\sqrt{q}. \tag{8.21}$$

证明 事实上, 有

$$G(\chi)=-\frac{2\pi i}{q}\int_0^q K(x)e(x/q)\,dx=-\frac{2\pi i}{q}\int_0^q K(q-x)e(-x/q)\,dx.$$

而

$$\begin{aligned}K(q-x)&=\sum_{1\leqslant n\leqslant q-x}\chi(n)=\sum_{x\leqslant m<q}\chi(q-m)\\&=\sum_{x\leqslant m<q}\chi(-m)=-\chi(-1)\sum_{1\leqslant m<x}\chi(m),\end{aligned}$$

从而除对至多有限个 x 值外, $K(q-x)=-\chi(-1)K(x)$ 均成立. 由之,

$$G(\chi)=-\frac{2\pi i}{q}\int_0^q K(x)\tfrac{1}{2}\{e(x/q)-\chi(-1)e(-x/q)\}\,dx,$$

故

$$\sqrt{q}=|G(\chi)|\leqslant H(\chi)\frac{2\pi}{q}\int_0^q\tfrac{1}{2}\big|e(x/q)\pm e(-x/q)\big|\,dx=H(\chi)\int_0^{2\pi}|\varphi(u)|\,du,$$

其中 $\varphi=\sin$ 或 $\cos$. 这便推出 (8.21). □

§8.2 *L* 级数, 算术数列的素数定理

§8.2.1 *L* 级数及素数的算术数列

对每个特征 χ, 定义其 Dirichlet L 级数为

$$L(s,\chi):=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\chi(n)}{n^s}\qquad(\sigma>1). \tag{8.22}$$

该级数 Euler 乘积展开为

$$L(s,\chi)=\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\qquad(\sigma>1). \tag{8.23}$$

特别地, 当 $\sigma>1$ 时 $L(s,\chi)\neq 0$. 当 $\chi=\chi_0$ 时, 上式还可写成

$$L(s,\chi_0)=\prod_{p|q}(1-p^{-s})\zeta(s). \tag{8.24}$$

这定义了 $L(s,\chi_0)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的亚纯延拓, 在 $s=1$ 处有唯一的极点, 留数为 $\varphi(q)/q$. 当 $\chi\neq\chi_0$ 时, 由 (8.17), 和函数 $K(x)$ 有界, 且 Abel 求和法推出级数 $L(s,\chi)$ 对 $\sigma>0$ 收敛, 这实际上确定了其收敛坐标.

联合正交性关系, Euler 乘积展开 (8.23) 可用来定位算术数列中的素数. 如同 Riemann ζ-函数的情形, 要用到对数导数.

定理 8.12 对任意整数 a,q, $(a,q)=1$, 有

$$\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}}\frac{\Lambda(n)}{n^s}=\frac{-1}{\varphi(q)}\sum_\chi\overline{\chi(a)}\frac{L'}{L}(s,\chi)\qquad(\sigma>1), \tag{8.25}$$

其中对 χ 的求和遍历 $\varphi(q)$ 个模 q Dirichlet 特征.

证明 由 (8.23), 对任意 χ 有

$$\frac{-L'}{L}(s,\chi)=\sum_p\frac{\chi(p)\ln p}{p^s-\chi(p)}=\sum_p\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{\chi(p^\nu)\ln p}{p^{\nu s}}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}.$$

由 $m=a$ 时的 (8.9), 在 (8.25) 右边交换和号便得结论. □

Dirichlet 级数 (8.25) 是

$$\psi(x;a,q):=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}}\Lambda(n) \tag{8.26}$$

的 Mellin–Stieltjes 变换. 正如经典 Tchébychev 函数 $\psi(x)=\psi(x;1,1)$ 的情形那样, 用分部积分可将 $\psi(x;a,q)$ 与相应的算术数列中素数的计数函数

$$\pi(x;a,q):=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}}1 \tag{8.27}$$

的渐近性质相关联.

本章开头提到的 Dirichlet 定理说明了, 对任意 $(a,q)=1$, 当 x 趋于无穷时 (8.27) 亦趋于无穷. 实际上 Dirichlet 得到了更为精确的结论, 推出在某种

意义下素数是均匀地分布在可能的 $\varphi(q)$ 个剩余类中的. 他证明了

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}} \frac{1}{p} \sim \frac{\ln_2 x}{\varphi(q)} \qquad (x\to\infty). \tag{8.28}$$

由 Hardy–Littlewood–Karamata 定理 (推论 7.9), 该估计由假设

$$L(1,\chi)\neq 0 \qquad (\chi\neq\chi_0) \tag{8.29}$$

立得. 事实上, 由 (8.25) 和 (8.29) 知对固定的 a 和 q 有

$$\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} = \frac{-L'(\sigma,\chi_0)}{\varphi(q)L(\sigma,\chi_0)} + O_q(1) \qquad (\sigma>1), \tag{8.30}$$

而且, 由 (8.24), 在同样的条件下有

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - \sum_{p\mid q}\frac{\ln p}{p^\sigma-1} = \frac{1}{\sigma-1} + O_q(1). \tag{8.31}$$

应用 Karamata–Freud 的定理 7.10, 甚至可得到带余项的形式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{\ln x}{\varphi(q)} + O_q\Big(\frac{\ln x}{\ln_2 x}\Big). \tag{8.32}$$

故由 Abel 求和法得到 (8.28) 的一个实效版本, 即

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}} \frac{1}{p} = \frac{\ln_2 x}{\varphi(q)} + O_q(\ln_3 x) \qquad (x\to\infty). \tag{8.33}$$

实际上, Mertens (1874) 证明了可从 $L(1,\chi)\neq 0$ 的事实得到 (8.33) 的一个改进.

定理 8.13 (Mertens) *若 $L(1,\chi)\neq 0$ 对任意模 q 非主特征成立, 那么对任意满足 $(a,q)=1$ 的 a 有*

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}} \frac{1}{p} = \frac{\ln_2 x}{\varphi(q)} + c(a,q) + O\Big(\frac{1}{\ln x}\Big) \qquad (x\to\infty), \tag{8.34}$$

其中

$$c(a,q) := \frac{1}{\varphi(q)}\Big\{\gamma - \sum_p \Big(\ln\Big(\frac{1}{1-1/p}\Big) - \frac{1}{p}\Big) + \sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi(a)}\sum_p\frac{\chi(p)}{p}\Big\}.$$

证明 从卷积关系 $\chi \ln = \chi(\Lambda * 1) = \chi\Lambda * \chi$ 推出

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\ln n}{n}=\sum_{m\leqslant x}\frac{\chi(m)\Lambda(m)}{m}\sum_{d\leqslant x/m}\frac{\chi(d)}{d}.$$

由 Abel 求和法知内部的和式等于 $L(1,\chi)+O(m/x)$. 从而

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi(n)\ln n}{n}&=L(1,\chi)\sum_{m\leqslant x}\frac{\chi(m)\Lambda(m)}{m}+O(1)\\&=L(1,\chi)\sum_{p\leqslant x}\frac{\chi(p)\ln p}{p}+O(1).\end{aligned}$$

由 Abel 判别法, 左边的项收敛. 从而在 $L(1,\chi)\neq 0$ 的假设下有

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\chi(p)\ln p}{p}\ll 1.$$

用 Abel 求和法可证明 $\sum_p \chi(p)/p$ 的收敛性以及渐近公式

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\chi(p)}{p}=\sum_{p}\frac{\chi(p)}{p}+O\Big(\frac{1}{\ln x}\Big)\qquad(x\to\infty).$$

对特征作线性组合即推出前述结论. □

注 若 $R(x)$ 表示 (8.34) 的余项, 那么有

$$\pi(x;a,q)=\frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)}+\int_2^x\{R(x)-R(t)\}\,\mathrm{d}t+O(1).$$

从而看到算术数列的素数定理等价于 $R(x)=o(1/\ln x)$: 充分性由上式立得, 必要性则归结于第一部分推论 3.9 (vi) 中用到的初等技巧.

§8.2.2 关于数 $L(1,\chi)$

前述中见到从 $\prod_{\chi\neq\chi_0}L(1,\chi)\neq 0$ 的假设可推出素数在各算术数列中形如 (8.34) 均匀分布. ⑤

反过来, 从关系 (8.34) 中立即得到, 当 $\chi\neq\chi_0$ 时有

$$\sum_{p}\frac{\chi(p)}{p}=\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\chi(a)c(a,q).$$

对该式用 Abel 求和法知, 当 $\sigma\to 1+$ 时,

$$F(\sigma,\chi):=\sum_p\frac{\chi(p)}{p^\sigma}=(\sigma-1)\int_1^\infty\sum_{p\leqslant x}\frac{\chi(p)}{p}\frac{\mathrm{d}x}{x^\sigma}$$

⑤ 该结论从 Hardy–Littlewood–Karamata 的 Tauber 型定理 7.7 亦可得, 比如见第 324 页习题 222.

收敛到有限极限. 由于

$$L(\sigma,\chi)=\mathrm{e}^{F(\sigma,\chi)}\prod_{p}\frac{\mathrm{e}^{-\chi(p)/p^{\sigma}}}{1-\chi(p)/p^{\sigma}},$$

其中对任意 $\sigma\geqslant 1$ 无穷乘积绝对一致收敛到非零有限值, 可得 $L(1,\chi)\neq 0$. 从而可形式地说 (8.34) 对于任意与 q 互素的 a 成立当且仅当 $\prod_{\chi\neq\chi_0}L(1,\chi)\neq 0$.

将见到当 χ 是实本原 Dirichlet 特征时 $L(1,\chi)$ 的值在理论中有特殊作用. 关系 (8.19) 将使我们能够给出该量的一个仅具有限项的表达式.

此时对实特征 χ, 有

$$G(\chi)=\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\chi(m)\mathrm{e}(m/q)=\chi(-1)\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\chi(m)\mathrm{e}(-m/q)=\chi(-1)\overline{G(\chi)}.$$

从而当 $\chi(-1)=1$ 时 $G(\chi)$ 为实数, 当 $\chi(-1)=-1$ 时则为虚数.

定理 8.14 设 χ 为模 $q>1$ 实本原 Dirichlet 特征. 有

$$L(1,\chi)=\begin{cases}\dfrac{-\mathrm{i}\pi}{qG(\chi)}\displaystyle\sum_{1\leqslant m<q}m\chi(m), & 若\ G(\chi)\in\mathrm{i}\mathbb{R},\\ \dfrac{-1}{G(\chi)}\displaystyle\sum_{1\leqslant m<q}\chi(m)\ln\{2\sin(\pi m/q)\}, & 若\ G(\chi)\in\mathbb{R}.\end{cases}\tag{8.35}$$

另外,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant m<q}m\chi(m)&=-\frac{1-\chi(-1)}{2\pi\mathrm{i}}qG(\chi)L(1,\chi)\\&=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{i}qG(\chi)}{\pi}L(1,\chi), & 若\ G(\chi)\in\mathrm{i}\mathbb{R},\\ 0, & 若\ G(\chi)\in\mathbb{R}.\end{cases}\end{aligned}\tag{8.36}$$

证明 将 (8.19) 乘以 $1/n$ 并对 $n\geqslant 1$ 求和, 得

$$\begin{aligned}L(1,\chi)&=\frac{1}{G(\chi)}\sum_{1\leqslant m<q}\chi(m)\log\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}(m/q)}\right)\\&=\frac{1}{G(\chi)}\sum_{1\leqslant m<q}\chi(m)\log\left(\frac{\mathrm{e}(-m/2q)}{-2\mathrm{i}\sin(\pi m/q)}\right)\\&=\frac{1}{G(\chi)}\sum_{1\leqslant m<q}\chi(m)\log\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\frac{1}{2}-m/q)}}{2\sin(\pi m/q)}\right),\end{aligned}$$

其中

$$G(\chi)L(1,\chi)=\mathrm{i}\pi\sum_{1\leqslant m<q}\chi(m)\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{q}\right)-\sum_{1\leqslant m<q}\chi(m)\ln\{2\sin(\pi m/q)\}.$$

这即推出要证的公式. □

此定理可用来对于形如题设的 χ 估计 L^2 范数

$$M_2(\chi)^2 := \frac{1}{q}\int_0^q |K(x)|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{8.37}$$

有 $M_2(\chi) \leqslant H(\chi)$. 将看到, 如果可以用均值的上界估计的话, 它确实比逐点估计更为有利.

推论 8.15　*设 χ 是模 $q>1$ 实本原 Dirichlet 特征. 有*

$$M_2(\chi)^2 \leqslant q\Big\{\frac{L(1,\chi)^2}{\pi^2}+\frac{1}{12}\Big\}. \tag{8.38}$$

证明　阶梯函数 $K(x)$ 是 q-周期的, 且在 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ 上连续, 从而有收敛的 Fourier 展式

$$K(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{K}(\nu)\mathrm{e}(\nu x/q) \qquad (x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}).$$

根据 (8.36), 有

$$\begin{aligned}\widehat{K}(0):&=\frac{1}{q}\int_0^q K(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{q}\sum_{1\leqslant m<q}(q-m)\chi(m)\\&=\frac{-1}{q}\sum_{1\leqslant m<q}m\chi(m)=\frac{1-\chi(-1)}{2\pi\mathrm{i}}G(\chi)L(1,\chi),\end{aligned}$$

同样, 对 $\nu\neq 0$, 有

$$\widehat{K}(\nu)=\frac{1}{q}\int_0^q K(x)\mathrm{e}(-\nu x/q)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi\nu}\sum_{1\leqslant m\leqslant q}\chi(m)\mathrm{e}(-\nu m/q)=\frac{\chi(-\nu)G(\chi)}{2\mathrm{i}\pi\nu}.$$

从而

$$\begin{aligned}M_2(\chi)^2&=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|\widehat{K}(\nu)|^2=\frac{\{1-\chi(-1)\}^2}{4\pi^2}qL(1,\chi)^2+\frac{q}{2\pi^2}\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{\chi(\nu)^2}{\nu^2}\\&\leqslant q\Big\{\frac{L(1,\chi)^2}{\pi^2}+\frac{1}{12}\Big\}.\end{aligned} \tag{8.39}$$

□

§8.2.3　Siegel–Walfisz 定理

若加强条件 (8.29) 而假定

$$L(1+\mathrm{i}\tau,\chi)\neq 0 \qquad (\tau\in\mathbb{R},\ \chi\neq\chi_0), \tag{8.40}$$

由 Ikehara 定理得到更精细的公式

$$\psi(x;a,q)\sim\frac{x}{\varphi(q)} \qquad (x\to\infty). \tag{8.41}$$

该结论就是通常意义下的“算术数列的素数定理”. 确定其对于 x, q 及 a 一致成立的版本是解析数论的中心问题之一.

为从 (8.40) 得到 (8.41), 只须应用定理 7.13 于 Dirichlet 级数 (8.25), 即

$$F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}\psi(\mathrm{e}^t; a, q).$$

由 (8.40), 每个函数 $L'(s,\chi)/L(s,\chi)$, $\chi \neq \chi_0$ 均可在 $\sigma \geqslant 1$ 上 (即包含该闭半平面的某开集上) 全纯延拓. 于是由 (8.24) 和(8.25) 知

$$G(s) := \frac{F(s+1)}{s+1} - \frac{1}{\varphi(q)s} \tag{8.42}$$

可连续延拓到 $\sigma \geqslant 0$ 上. 于是由 Ikehara 定理可得出 (8.41) 成立.

在下一节将看到 (8.40) 的确成立. 甚至将得到 $|L(1+\mathrm{i}\tau,\chi)|$ 的一个具体的下界估计. 从而可充分应用实效 Ikehara 定理 7.13. 从确定 (8.41) 的余项如何依赖于 x 和 q 开始, 我们得到如下结论.

定理 8.16 对任意常数 $A>0$, 且对

$$x \geqslant 3, \quad 1 \leqslant q \leqslant (\ln x)^A, \quad (a,q)=1,$$

一致地有

$$\psi(x;a,q) = \frac{x}{\varphi(q)} + O\Big(x\frac{(\ln_2 x)^{19/2}}{\ln x}\Big). \tag{8.43}$$

特别地, 对每个 $\varepsilon>0$, 渐近等价关系 (8.41) 在区域

$$x \geqslant 3, \qquad 1 \leqslant q \leqslant (\ln x)^{1-\varepsilon} \tag{8.44}$$

上一致成立.

对级数 $L(s,\chi)$ 更细致的研究得出其类似于 ζ-函数情形的一个无零点区域. 这对 q 的一致性尤为关键也特别困难, 另外它还导出著名的 Siegel 零点存在性的未解决问题, 后文中还将提及. 在 §8.7 中将证明如下断言, 它主要是加强了定理 8.16, 见 Siegel (1936).

定理 8.17 (Siegel–Walfisz) 在定理 8.16 的假设下, 有

$$\psi(x;a,q) = \frac{x}{\varphi(q)} + O\Big(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln x}}\Big), \tag{8.45}$$

其中 $c=c(A)$ 是正常数.

定理 8.17 略显不足之处是其非实效性: 目前对 $q \geqslant \ln x$ 不能给出 c 或 Landau 记号中常数的具体值. 实际上, 现有最好的实效结果用到 Pólya–Vinogradov 不等式, 只对 $q = o\big((\ln x)^2\big)$ 的情形给出 $\psi(x;a,q)$ 的渐近公式, 更

精确的表述见推论 8.31. 从这个角度看定理 8.16 中的实效估计具有相当的质量.

在证明定理 8.16 之前, 先作一个方法论上的评注. 对 $q=1$ 的情形, (8.43) 的余项明显比素数定理中即使不用 $\zeta(s)$ 在临界带域中的细致性质可得到的结论仍显粗略 (见§4.2). 这暗示了至少对足够小, 比如有界的 q 值可改进定理 8.16. 实际上, 由下节 $|L(1+i\tau,\chi)|$ 的下界估计可得到函数 L 的一个无零点区域. 在假设 (8.44) 下, 从中可得到余项 $\ll_A x/(\ln x)^A$ 对任意 $A>0$ 成立. 这在习题 237 中将详细说明. 在此则应用实效 Ikehara 定理: 一方面, 它容易导出 (8.41) 的一个成立域, 与复积分方法可得到的结果相当; 另一方面, 这是详细解说 Tauber 型定理在算术中应用的一个机会.

§8.3 $\sigma \geqslant 1$ 时 $|L(s,\chi)|$ 的下界估计, 定理 8.16 的证明

为简化记号, 令

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(q,\tau):=\ln(|\tau|+q+1) \qquad (q\geqslant 1,\ \tau\in\mathbb{R}). \tag{8.46}$$

定理 8.18 对 $k\geqslant 0$, $\chi\neq\chi_0$, 有

$$L^{(k)}(s,\chi)\ll_k \mathcal{L}^{k+1} \qquad (\sigma\geqslant 1). \tag{8.47}$$

证明 沿用 (8.16) 中的记号, 由 (8.17) 知有 $|K(t)|\leqslant \frac{1}{2}q$ $(t\geqslant 0)$. 不失一般性, 可设 $1\leqslant\sigma\leqslant 2$. 令 $x\geqslant 2$, $T=|\tau|+2$, 有

$$\begin{aligned}|L^{(k)}(s,\chi)| &= \Big|\sum_{n\geqslant 1}\frac{\chi(n)(\ln n)^k}{n^s}\Big| \leqslant \sum_{n\leqslant x}\frac{(\ln n)^k}{n}+\Big|\int_x^\infty \frac{(\ln t)^k}{t^s}\,\mathrm{d}K(t)\Big| \\ &\ll_k (\ln x)^{k+1}+\frac{(\ln x)^k|K(x)|}{x}+T\int_x^\infty \frac{|K(t)|(\ln t)^k}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &\ll_k (\ln x)^k\big\{\ln x+qT/x\big\}.\end{aligned}$$

选择 $x=qT$, 由该估计便得上界估计 (8.47). □

注意到容易确定 (8.47) 中隐含的常数. 为将来使用方便, 特指出由前述证明可得

$$|L'(\sigma,\chi)|\leqslant(1+\ln q)^2 \qquad (\chi\neq\chi_0,\ \sigma\geqslant 1). \tag{8.48}$$

定理 8.19 对任意 Dirichlet 特征 χ, 有

$$L(\sigma,\chi_0)^3|L(\sigma+i\tau,\chi)|^4\,|L(\sigma+2i\tau,\chi^2)|\geqslant 1 \qquad (\sigma>1,\ \tau\in\mathbb{R}). \tag{8.49}$$

证明 定理 3.11 证明中用不等式

$$V(\vartheta) = 3 + 4\cos\vartheta + \cos 2\vartheta \geqslant 0 \qquad (\vartheta \in \mathbb{R}) \tag{8.50}$$

来对 $|\zeta(1+\mathrm{i}\tau)|$ 作下界估计. 这里作类似的推理. 对每个特征 χ 定义一个取值于 $[0, 2\pi[$ 的函数 $\psi(n)$, 使得

$$\chi(n) = \chi_0(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(n)}.$$

对 $\sigma > 1$, 由 (8.17) 得

$$\log L(s,\chi) = \sum_p \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{\chi(p)^\nu}{\nu p^{\nu s}} = \sum_{p \nmid q} \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{\exp\{\mathrm{i}(\psi(p^\nu) - \nu\tau \ln p)\}}{\nu p^{\nu\sigma}},$$

取实部后得

$$\begin{aligned} 3\ln L(\sigma,\chi_0) + 4\ln|L(\sigma+\mathrm{i}\tau,\chi)| + \ln|L(\sigma+2\mathrm{i}\tau,\chi^2)| \\ = \sum_{p\nmid q}\sum_{\nu\geqslant 1} \frac{V(\psi(p^\nu) - \nu\tau\ln p)}{\nu p^{\nu\sigma}} \geqslant 0. \end{aligned}$$

取指数便得 (8.49). □

不等式 (8.50) 以及其他关于 $|L(1+\mathrm{i}\tau,\chi)|$ 下界估计的经典方法对实特征, 即满足

$$\chi^2 = \chi_0 \tag{8.51}$$

的特征 χ 有特殊功效. 在此情形下, 当 $\sigma \to 1+$, $\tau \to 0$ 时 $|L(\sigma+2\mathrm{i}\tau,\chi^2)|$ 趋于无穷, 这使得 (8.49) 显得变弱了. 显式表达式 (8.6) 说明了 χ 为实当且仅当

$$\lambda' = \begin{cases} 0, & 若\ \nu \leqslant 2, \\ 0,\ 2^{\nu-3}, & 若\ \nu \geqslant 3, \end{cases} \quad 且 \quad \lambda_j = 0\ 或\ \tfrac{1}{2}\varphi(p_j^{\nu_j}) \quad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

由当 $\nu \leqslant 1$ 时 $\varepsilon(m) = 0$ 得, 模 q 实特征数 $r(q)$ 满足公式

$$r(q) = \begin{cases} 2^{\omega(q)-1}, & 若\ q \equiv \pm 2 \pmod 8, \\ 2^{\omega(q)}, & 若\ q \equiv \pm 1, \pm 3, 4 \pmod 8, \\ 2^{\omega(q)+1}, & 若\ q \equiv 0 \pmod 8. \end{cases} \tag{8.52}$$

于是无论如何有 $r(q) \leqslant \tau(q)$.

定理 8.20 *倘若 $\chi^2 \neq \chi_0$, 那么*

$$L(\sigma+\mathrm{i}\tau,\chi)^{-1} \ll \mathcal{L}^7 \qquad (\sigma \geqslant 1). \tag{8.53}$$

证明 利用 §4.2 的方法. 令 $s=\sigma+\mathrm{i}\tau$, $s_0=s+\eta$, 其中 η 是满足 $0<\eta\leqslant 1/\mathcal{L}$ 的参数. 由 (8.47) 得

$$|L(s,\chi)-L(s_0,\chi)|\leqslant C_0\eta\mathcal{L}^2 \tag{8.54}$$

对某绝对常数 C_0 成立. 另外, 由于 $\chi^2\neq\chi_0$, 定理 8.18 推出

$$L(\sigma_0+2\mathrm{i}\tau,\chi^2)\ll\mathcal{L}\qquad(\sigma_0:=\sigma+\eta), \tag{8.55}$$

代入 (8.49), 得

$$|L(s_0,\chi)|^4\gg\prod_{p|q}(1-p^{-\sigma_0})^{-3}\zeta(\sigma_0)^{-3}\mathcal{L}^{-1}\gg\eta^3\mathcal{L}^{-1}. \tag{8.56}$$

由 (8.54) 知存在正常数 C_1, 使得

$$|L(s,\chi)|\geqslant C_1\eta^{3/4}\mathcal{L}^{-1/4}-C_0\eta\mathcal{L}^2=C_2\{C_1\cdot C_2^{-1/4}-C_0\}\mathcal{L}^{-7},$$

其中选取了 $\eta:=C_2/\mathcal{L}^9$. 当 C_2 足够小时, 大括号中的项为正, 于是便得到 (8.53). □

定理 8.21 若 $\chi^2=\chi_0$, $\chi\neq\chi_0$, 则

$$L(\sigma,\chi)\geqslant\frac{1}{9\sqrt{q}}\qquad(\sigma\geqslant 1). \tag{8.57}$$

证明 以下一些数值的计算留给读者. 注意到必有 $q\geqslant 3$. 不失一般性, 可设 $1\leqslant\sigma\leqslant 1+1/(8\sqrt{q})$. 否则便有

$$L(\sigma,\chi)=\prod_p\frac{1}{1-\chi(p)/p^\sigma}\geqslant\prod_p(1-p^{-\sigma})=\frac{1}{\zeta(\sigma)}\geqslant\frac{\sigma-1}{\sigma}>\frac{1}{9\sqrt{q}}.$$

同样可设 $L(1,\chi)\leqslant\pi/4$: 否则由 (8.48) 知

$$L(\sigma,\chi)\geqslant\tfrac14\pi-(\sigma-1)(1+\ln q)^2\geqslant\tfrac14\pi-\frac{(1+\ln q)^2}{8\sqrt{q}}\geqslant\tfrac14\pi-\tfrac12>\frac{1}{8\sqrt{q}}.$$

考虑乘性函数 $f_\sigma(n):=\sum_{d|n}\chi(d)d^{1-\sigma}$. 若 $\sigma>1$, 对每个素数 p 有

$$f_\sigma(p^\nu)=\frac{1-(\chi(p)p^{1-\sigma})^{\nu+1}}{1-\chi(p)p^{1-\sigma}}\geqslant\frac{1+(-1)^\nu p^{(1-\sigma)(\nu+1)}}{1+p^{1-\sigma}},$$

其中不等式由 $\chi(p)=\pm1$ 或 0 的事实而得. 特别地, 有

$$f_\sigma(p^\nu)\geqslant 0,\qquad f_\sigma(p^{2\nu})\geqslant p^{2\nu(1-\sigma)}\qquad(\nu\geqslant 1).$$

取极限后知当 $\sigma=1$ 时这些不等式仍成立. 这样

$$f_\sigma(n)\geqslant 0,\qquad f_\sigma(n^2)\geqslant n^{2(1-\sigma)}\qquad(n\geqslant 1,\ \sigma\geqslant 1).$$

引进参数 $\alpha > 0$, 并考虑表达式

$$F(\alpha,\sigma) := \sum_{n\geqslant 1} f_\sigma(n)\mathrm{e}^{-\alpha n}.$$

一方面, 有

$$\begin{aligned}F(\alpha,\sigma) &\geqslant \sum_{n\geqslant 1} n^{2(1-\sigma)}\mathrm{e}^{-\alpha n^2} \geqslant \int_1^\infty t^{2(1-\sigma)}\mathrm{e}^{-\alpha t^2}\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant \tfrac12\alpha^{\sigma-3/2}\Gamma(\tfrac32-\sigma) - \frac{1}{3-2\sigma} \geqslant \tfrac12\sqrt{\pi}\alpha^{\sigma-3/2} - \frac{1}{3-2\sigma}.\end{aligned} \tag{8.58}$$

另一方面, 由 f_σ 的定义知

$$F(\sigma,\alpha) = \sum_{m,\,d\geqslant 1}\chi(d)d^{1-\sigma}\mathrm{e}^{-\alpha md} = \sum_{d\geqslant 1}\chi(d)\frac{d^{1-\sigma}}{\mathrm{e}^{\alpha d}-1} = \frac{L(\sigma,\chi)}{\alpha} - \sum_{d\geqslant 1}\chi(d)h(d),$$

其中

$$g(t) := \frac1t - \frac{1}{\mathrm{e}^t-1},\quad h(t) := t^{1-\sigma}g(\alpha t).$$

容易验证 h 为正且在 $[1,+\infty[$ 上单调下降. 另外, h' 为负且在该区间上单调上升. 于是

$$\begin{aligned}F(\alpha,\sigma) - \frac{L(\sigma,\chi)}{\alpha} &= -\int_{1-}^\infty h(t)\,\mathrm{d}K(t) = \int_1^\infty K(t)h'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{q+1} K(t)\sum_{j\geqslant 0}h'(t+jq)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{q+1}|K(t)|\Big\{|h'(t)| + \frac1q\int_t^\infty |h'(v)|\,\mathrm{d}v\Big\}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{q+1}|K(t)|\Big\{-h'(t)+\frac{h(t)}{q}\Big\}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{M_2(\chi)}{\sqrt q}\sqrt{\int_1^{q+1}\big\{h(t)-qh'(t)\big\}^2\,\mathrm{d}t} \\ &\leqslant \sqrt{\tfrac{7}{48}\int_1^{q+1}\big\{h(t)-qh'(t)\big\}^2\,\mathrm{d}t},\end{aligned}$$

其中用了不等式 $M_2(\chi) \leqslant \sqrt{7q/48}$, 由前述的简化过程, 这从 (8.38) 中可得. 至此可知对 $t>0$ 有

$$g'(t) = \frac{t^2\mathrm{e}^t - (\mathrm{e}^t-1)^2}{t^2(\mathrm{e}^t-1)^2} = \frac{\mathrm{e}^t\{t^2-(2\operatorname{sh}t/2)^2\}}{t^2(\mathrm{e}^t-1)^2} \leqslant 0,$$

$$g''(t) = \frac{2}{t^3} - \frac{\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^t)}{(\mathrm{e}^t-1)^3} = \frac{2\{(\operatorname{sh}t/2)^3-(t/2)^3\operatorname{ch}t/2\}}{(t\operatorname{sh}t/2)^3} \geqslant 0,$$

其中最后的不等式由函数 $\varphi(u) := (\operatorname{sh}u)^3 - u^3\operatorname{ch}u$ 满足 $\varphi(0)=0$ 及 $\varphi'(u) = 3\operatorname{ch}u\{(\operatorname{sh}u)^2-u^2\} - u^3\operatorname{sh}u \geqslant u^3(u\operatorname{ch}u - \operatorname{sh}u) \geqslant 0$ 的事实而得. 另外有

$$g'(t) = -\sum_{k\geqslant 1}\frac{(2k-1)B_{2k}}{(2k)!}t^{2k-2}\qquad (|t|<2\pi),$$

其中 B_{2k} 是 Bernoulli 数. 特别地, g' 在点 0 连续, 并满足 $g'(0) = -\frac{1}{2}B_2 = -\frac{1}{12}$. 从而对 $1 \leqslant t \leqslant q+1$ 有

$$h(t) \leqslant g(0) = \tfrac{1}{2}, \quad |h'(t)| \leqslant \frac{(\sigma-1)g(0)}{t} + \alpha|g'(0)| = \frac{\sigma-1}{2t} + \frac{\alpha}{12}.$$

故

$$\int_1^{q+1} \left\{h(t) - qh'(t)\right\}^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_1^{q+1} \left\{\frac{q^2(\sigma-1)^2}{2t^2} + \frac{(\alpha q+6)^2}{72}\right\} \mathrm{d}t$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2}(\sigma-1)^2 q^2 + \tfrac{1}{72}(\alpha q+6)^2 q \leqslant \tfrac{1}{128}q + \tfrac{1}{72}q(\alpha q+6)^2.$$

令 $\alpha = \lambda/q$ 并代入开始的不等式, 将 $\frac{1}{128}$ 放大为 $\frac{1}{72}$, 得

$$L(\sigma,\chi) \geqslant \alpha F(\alpha,\sigma) - \frac{\lambda\sqrt{42\{1+(\lambda+6)^2\}}}{144\sqrt{q}}.$$

代入 (8.58) 后得

$$L(\sigma,\chi) \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\lambda}{q}}\left(\frac{\lambda}{q}\right)^{\sigma-1} - \frac{\lambda}{q(3-2\sigma)} - \frac{\lambda\sqrt{42\{1+(\lambda+6)^2\}}}{144\sqrt{q}}.$$

选取 $\lambda = \frac{1}{8}$ 并观察到 $(8q)^{1-\sigma} \geqslant (8q)^{-1/(8\sqrt{q})} > \frac{3}{4}$, 得

$$L(\sigma,\chi)\sqrt{q} \geqslant \frac{3\sqrt{2\pi}}{32} - \frac{1}{8\sqrt{3}-2} - \frac{\sqrt{42\cdot 39}}{1152} > \frac{1}{9}. \qquad \square$$

定理 8.22 *存在绝对常数 $c_0 > 0$, 使得对 $\chi^2 = \chi_0$, $\chi \neq \chi_0$, $\sigma \geqslant 1$ 有*

$$L(s,\chi)^{-1} \ll \begin{cases} \mathcal{L}^6(\mathcal{L} + 1/|\tau|), & 若\ |\tau| > c_0 q^{-1/2}(\ln 2q)^{-2}, \\ \sqrt{q}, & 若\ |\tau| \leqslant c_0 q^{-1/2}(\ln 2q)^{-2}. \end{cases} \tag{8.59}$$

证明 第二个估计由定理 8.18 和定理 8.21 立得. 事实上, 用 1 阶 Taylor 展式知对任意 τ, $|\tau| \leqslant 1$ 有

$$|L(s,\chi)| \geqslant L(\sigma,\chi) + O\big(\tau(\ln 2q)^2\big),$$

从而由 (8.57) 得需要的估计.

于是可设 $|\tau| \gg q^{-1/2}(\ln 2q)^{-2}$. 将用定理 8.20 的方法. 令 η 为正参数并令 $\sigma_0 = \sigma + \eta$, $s_0 = \sigma_0 + \mathrm{i}\tau$,, $s_1 = \sigma_0 + 2\mathrm{i}\tau$. 有

$$L(s_1,\chi_0) = \prod_{p|q}(1-p^{-s_1})\zeta(s_1) \ll \prod_{p|q}(1-p^{-\sigma_0})^{-1}(\mathcal{L} + 1/|\tau|).$$

由 (8.49) 得

$$L(s_0,\chi)^4 \gg \prod_{p|q}(1-p^{-\sigma_0})^{-2}\zeta(\sigma_0)^{-3}(\mathcal{L}+1/|\tau|)^{-1}.$$

鉴于 (8.47) 知存在两个绝对正常数 C_3 和 C_4, 使得

$$|L(s,\chi)| \geqslant C_3\eta^{3/4}(\mathcal{L}+1/|\tau|)^{-1/4} - C_4\eta\mathcal{L}^2.$$

选取 $\eta = C_5(\mathcal{L}+1/|\tau|)^{-1}\mathcal{L}^{-8}$ 及适当的 C_5, 得要求的下界估计. □

定理 8.16 的证明 应用定理 7.13 于级数 (8.25). 若 $G(s)$ 依 (8.42) 定义, 得

$$\psi(x;a,q) = \frac{x}{\varphi(q)} + O\Big(x\min_{T\geqslant 64}\Big\{\frac{1}{T}+\eta\Big(\frac{1}{\ln x},T\Big)\Big\}\Big), \tag{8.60}$$

其中

$$\eta(\sigma,T) := \int_{-T}^{T}\big|G(2\sigma+\mathrm{i}\tau)-G(\sigma+\mathrm{i}\tau)\big|\,\mathrm{d}\tau \quad (\sigma>0). \tag{8.61}$$

通过放大 $|G'(s)|$ 来估计该量, 有

$$G'(s) \ll \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi}|Z'(s,\chi)|, \tag{8.62}$$

其中

$$Z(s,\chi) := \begin{cases} \dfrac{-\zeta'(s+1)}{(s+1)\zeta(s+1)} - \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{(s+1)}\displaystyle\sum_{p|q}\frac{\ln p}{p^s}, & \text{若 } \chi=\chi_0, \\ \dfrac{-L'(s+1,\chi)}{(s+1)L(s+1,\chi)}, & \text{若 } \chi\neq\chi_0. \end{cases}$$

用 §4.2 中对 $\zeta(s)$ 的估计, 以及关于 $L(s,\chi)$, $\chi\neq\chi_0$ 的定理 8.18、定理 8.20、定理 8.22, 经过繁复的计算, 得对 $\sigma\geqslant 0$ 有

$$Z'(s,\chi) \ll \begin{cases} \mathcal{L}^{18}/|s+1|, & \text{若 } \chi^2\neq\chi_0 \text{ 或 } |\tau|>(\ln 2q)^{-1}, \\ \mathcal{L}^{16}/|\tau|^2, & \text{若 } \chi^2=\chi_0 \text{ 且 } c_0(\ln 2q)^{-2}q^{-1/2}<|\tau|\leqslant(\ln 2q)^{-1}, \\ \mathcal{L}^4 q, & \text{若 } \chi^2=\chi_0 \text{ 且 } |\tau|<c_0(\ln 2q)^{-2}q^{-1/2}. \end{cases}$$

先后代入 (8.62) 及 (8.61), 利用 (8.52) 得

$$\eta(\sigma,T) \ll \sigma\mathcal{L}(q,T)^{19}.$$

选取 $T=(\ln x)/(\ln_2 x)^{19/2}$, 由 (8.60) 得要证的关于 $\psi(x;a,q)$ 的公式. □

§8.4 $L(s,\chi)$ 的函数方程

定理 8.23 令 χ 为模 q 本原特征. 令 $\alpha = \alpha(\chi) := \frac{1}{2}\{1-\chi(-1)\}$. 那么函数 $L(s,\chi)$ 可亚纯延拓到全复平面上, 当 $\chi = \mathbf{1}$ 时, 其唯一的奇点是 $s=1$ 处留数为 1 的单极点. 另外, $L(s,\chi)$ 满足函数方程

$$\xi(s,\chi) = E(\chi)\xi(1-s,\overline{\chi}) \qquad (s\in\mathbb{C}),$$

其中

$$\xi(s,\chi) := \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{1}{2}(s+\alpha)}\Gamma\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)L(s,\chi), \qquad E(\chi) := \frac{G(1,\chi)}{\mathrm{i}^{\alpha}\sqrt{q}}.$$

注 当 χ 非本原时有

$$L(s,\chi) = L(s,\chi_1)\prod_{p|q,\, p\nmid q_1}(1-\chi_1(p)/p^s) \qquad (\sigma>1), \tag{8.63}$$

其中 χ_1 是诱导 χ 的本原特征. 从中可导出 $L(s,\chi)$ 延拓性质的一个显然推广.

证明 先证 $L(s,\chi)$ 可亚纯延拓到整个复平面. 对函数 $\zeta(s)$ 的方法不附加任何困难地适用于该情形. 这里只给出主要步骤.

令

$$W(t,\chi) := \sum_{n\geqslant 1}\chi(n)\mathrm{e}^{-nt} = \left(1-\mathrm{e}^{-qt}\right)^{-1}\sum_{1\leqslant a<q}\chi(a)\mathrm{e}^{-at} \qquad (t>0),$$

有

$$\Gamma(s)L(s,\chi) = \int_0^{\infty} t^{s-1}W(t,\chi)\,\mathrm{d}t \qquad (\sigma>1).$$

将积分路径的半直线换成 Hankel 围道 $\mathcal{C}_{\varrho}$ (见 §3.2), 其中 ϱ 是实参数, $0<\varrho<2\pi/q$.

由于函数 $z\mapsto z^{s-1}(1-\mathrm{e}^{-qz})^{-1}$ 在除去半直线 $[0,+\infty[$ 的水平带域 $|\Im m\, z|<2\pi$ 中全纯, 积分

$$I(s,\chi) := \int_{\mathcal{C}_{\varrho}} z^{s-1}W(z,\chi)\,\mathrm{d}z$$

与 $]0,2\pi/q[$ 中的 ϱ 值无关. 它对于每个 $s\in\mathbb{C}$ 绝对收敛, 且在任意紧集上绝对一致收敛, 故而是 s 的整函数. 有

$$I(s,\chi) = \oint_{|z|=\varrho} W(z,\chi)z^{s-1}\,\mathrm{d}z + (\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s}-1)\int_{\varrho}^{\infty} t^{s-1}W(t,\chi)\,\mathrm{d}t.$$

由上界估计 $|z^{s-1}(\mathrm{e}^z-1)^{-1}| \ll_s \varrho^{\sigma-2}$ $(|z|=\varrho\leqslant\pi)$, 令 ϱ 趋于 0, 得

$$I(s,\chi)=(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s}-1)\Gamma(s)L(s,\chi)\qquad(\sigma>1).$$

利用互补公式得表达式

$$L(s,\chi)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi s}}{2\pi\mathrm{i}}\Gamma(1-s)I(s,\chi). \tag{8.64}$$

这给出了其在全复平面上的延拓, $L(s,\chi)$ 可能的奇点是正整数. 由于当 $\chi\neq\chi_0$ 时 $L(s,\chi)$ 在 $\sigma>0$ 上收敛, 可知此时 $L(s,\chi)$ 可延拓为整函数. 公式 (8.24) 说明 $L(s,\chi_0)$ 的延拓在 $s=1$ 时有唯一的奇点, 是留数为 $\varphi(q)/q$ 的单极点. 当 χ 是本原主特征时, 该留数等于 1.

现证函数方程. 令 $\mathcal{H}_k:=\mathcal{C}_{\varrho_k}$ 为参数为 $\varrho_k:=(2k+1)\pi/q$, $k\geqslant1$ 的 Hankel 围道. 那么对 $1\leqslant a\leqslant q$, $z=\varrho_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$, 当 ϑ 遍历 $[0,2\pi]$ 时,

$$\frac{|\mathrm{e}^{-az}|}{|1-\mathrm{e}^{-qz}|}=\frac{\mathrm{e}^{(2k+1)(1-a/q)\pi\cos\vartheta}}{|\mathrm{e}^{(2k+1)\pi\cos\vartheta+\mathrm{i}(2k+1)\pi\sin\vartheta}-1|}$$

总有界, 于是有

$$\left|\int_{\mathcal{H}_k}W(z,s)z^{s-1}\,\mathrm{d}z\right|\ll_s k^{\sigma}. \tag{8.65}$$

令 ϱ 使得 $0<\varrho<2\pi/q$. 反向围道 $\mathcal{C}_\varrho-\mathcal{H}_k$ 围住了极点 $z_n=2n\pi\mathrm{i}/q$ $(n=\pm1,\pm2,\ldots,\pm k)$. 留数定理于是推出

$$\begin{aligned}I(s,\chi)&=\int_{\mathcal{C}_\varrho}z^{s-1}W(z,\chi)\,\mathrm{d}z\\&=\int_{\mathcal{H}_k}z^{s-1}W(z,\chi)\,\mathrm{d}z-\frac{2\pi\mathrm{i}}{q}\sum_{1\leqslant|n|\leqslant k}(z_n)^{s-1}\sum_{1\leqslant a\leqslant q}\chi(a)\mathrm{e}^{-az_n}\\&=\int_{\mathcal{H}_k}z^{s-1}W(z,\chi)\,\mathrm{d}z+\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{q}\right)^s\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi s}-\chi(-1)\}\sum_{1\leqslant n\leqslant k}G(n,\chi)n^{s-1}.\end{aligned}$$

有 $\chi(-1)=1-2\alpha=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}$. 由 (8.65), 令 k 趋于无穷知对每个半平面 $\sigma<0$ 中的 s 有

$$I(s,\chi)=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi s}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}\right)\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{q}\right)^s\sum_{n\geqslant1}G(n,\chi)n^{s-1}.$$

由定理 8.8, 当 χ 本原时 $G(n,\chi)=\overline{\chi}(n)G(1,\chi)$. 从而

$$I(s,\chi)=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi s}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}\right)\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{q}\right)^sG(1,\chi)L(1-s,\overline{\chi}).$$

代入 (8.64) 得函数方程的非对称形式

$$L(s,\chi)=E(\chi)\left(\frac{2\pi}{q}\right)^s\frac{\sqrt{q}}{\pi}\sin\left\{\frac{1}{2}\pi(s+\alpha)\right\}\Gamma(1-s)L(1-s,\overline{\chi}). \tag{8.66}$$

由解析延拓, 它对任意 s 成立. 用 Γ 函数的互补公式和复制公式, 从中得出形如命题表述中的函数方程. □

注 当 $\alpha=0$, 即 $\chi(-1)=1$ 时, $L(s,\chi)$ 的显然零点是 $-2k$ $(k\geqslant 0)$; 当 $\alpha=1$, 即 $\chi(-1)=-1$ 时则是 $-2k-1$ $(k\geqslant 0)$.

§8.5 Hadamard 乘积公式及无零点区域

保留定理 8.23 中 $\alpha=\alpha(\chi)$ 及 $E(\chi)$ 的记号. 下面利用与第三章中 ζ-函数情形类似的方法将

$$\xi(s,\chi):=\left(\frac{q}{\pi}\right)^{(s+\alpha)/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}(s+\alpha))L(s,\chi)$$

展成 Hadamard 乘积.

定理 8.24 *令 χ 为模 q 非主本原特征. 那么 $L(s,\chi)$ 在临界带域中有无穷多个零点 ϱ, 而且有*

$$\xi(s,\chi)=\mathrm{e}^{A+Bs}\prod_{\varrho}(1-s/\varrho)\mathrm{e}^{s/\varrho}\qquad(s\in\mathbb{C}),\tag{8.67}$$

其中零点计重数. 该无穷乘积绝对收敛, 且

$$A=A(\chi):=\log\left\{\Gamma\big(\tfrac{1}{2}(1+\alpha)\big)(q/\pi)^{(1+\alpha)/2}E(\chi)L(1,\overline{\chi})\right\},$$

$$B=B(\chi):=\frac{\xi'}{\xi}(0,\chi)=-\frac{\xi'}{\xi}(1,\overline{\chi}).$$

证明 证明与 $\zeta(s)$ 的情形类似, 只提纲挈领地介绍一下. 首先, 在 (8.16) 和 (8.17) 的记号下有

$$|L(s,\chi)|=\left|s\int_1^{\infty}\frac{K(x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant|s|H(\chi)\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}\leqslant 2H(\chi)|s|\qquad(\sigma\geqslant\tfrac{1}{2}).$$

这说明 $\xi(s,\chi)$ 是 1 阶整函数. 令

$$N(T,\chi):=\big|\{\varrho:L(\varrho,\chi)=0,\ |\Im m\,\varrho|\leqslant T\}\big|.$$

注意到此时零点不必对于原点对称分布. 接下来用复积分方法证明

$$\tfrac{1}{2}N(T,\chi)=\frac{T}{2\pi}\ln\frac{qT}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\ln qT)\quad(T\geqslant 2).\tag{8.68}$$

具体细节与 $\zeta(s)$ 的情形相同, 但考虑顶点为 $\frac{5}{2}\pm\mathrm{i}T$, $-\frac{3}{2}\pm\mathrm{i}T$ 的长方形 $\mathcal{R}$ 更为方便. 这可避开 $s=-1$处可能的显然零点. 这样, $\mathcal{R}$ 总恰围住一个 $L(s,\chi)$ 的显然零点, 要么是 0, 要么是 -1.

$N(T,\chi)$ 的估计推出零点处无穷乘积的收敛性, 正如 $\zeta(s)$ 的情形那样, 从中可得出 $\log\{\xi(s,\chi)/P(s,\chi)\}$ 是 s 的仿射函数. □

除可能的一个实零点外, 无零点区域基本与 ζ-函数相同. 该结果基本属于 Landau (1918), 在本原特征中的应用始于 Page (1935).

定理 8.25 (Landau–Page) *存在绝对常数 $c>0$ 使得区域*

$$\mathcal{D}_q := \{s\in\mathbb{C} : \sigma > 1 - c/\ln qT\} \qquad (T := |\tau|+2) \tag{8.69}$$

中至多含有 $\prod_{\chi(\mathrm{mod}\, q)} L(s,\chi)$ 的一个零点及

$$\prod_{q_1\leqslant q}\prod_{\substack{\chi\,(\mathrm{mod}\, q_1)\\ \chi\ \text{本原}}} L(s,\chi)$$

的一个零点. 在这两种情形中, 可能出现的零点都是实的单零点, 对应于一个实特征.

人们猜想该可能的例外零点 (通常称为 Siegel 零点) 并不存在. 在此方向上更强的猜想断言 L 函数所有的零点位于临界线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上, 即广义 Riemann 假设.

定理 8.25 的证明基本归结于如下引理, 它是乘积公式及 $L(s,\chi)$ 函数方程的一个推论. 这里保持 $L(s,\chi)$ 零点 $\varrho=\beta+\mathrm{i}\gamma$ 的记号约定.

引理 8.26 *存在绝对常数 c_0, 使得对任意模 q 非主特征 χ 有*

$$-\Re e\,\frac{L'}{L}(s,\chi) \leqslant c_0 \ln qT - \sum_{\varrho} \Re e\,\frac{1}{s-\varrho} \qquad (\sigma>1,\ T=|\tau|+2), \tag{8.70}$$

其中级数的通项非负.

证明 不失一般性, 可设 χ 本原. 这是因为, 若 χ_1 是诱导 χ 的本原特征, 由关系 (8.63) 推出

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi) - \frac{L'}{L}(s,\chi_1)\right| \leqslant \sum_{p|q} \frac{\ln p}{p^\sigma - 1} \leqslant \ln q \qquad (\sigma>1). \tag{8.71}$$

对乘积公式 (8.67) 求导, 得

$$\begin{aligned} &-\Re e\,\frac{L'}{L}(s,\chi)\\ &= \tfrac{1}{2}\ln\frac{q}{\pi} + \Re e\,\frac{\Gamma'}{2\Gamma}\left(\tfrac{1}{2}s+\tfrac{1}{2}\alpha\right) - \Re e\, B(\chi) - \Re e \sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right). \end{aligned} \tag{8.72}$$

由于假定了 χ 本原, 对函数方程 $\xi(s,\chi)=E(\chi)\xi(1-s,\overline{\chi})$ 取对数导数, 得

$$\frac{\xi'}{\xi}(s,\chi) = -\frac{\xi'}{\xi}(1-s,\overline{\chi}).$$

对 $s=0$, 由于 ϱ 遍历 $L(s,\chi)$ 的零点时 $\overline{\varrho}$ 遍历 $L(s,\overline{\chi})$ 的零点, 由乘积公式得

$$B(\chi)=-B(\overline{\chi})-\sum_{\varrho}\frac{1}{\overline{\varrho}}+\frac{1}{1-\overline{\varrho}};$$

而由公式

$$B(\chi)=-\frac{\xi'}{\xi}(1,\overline{\chi})=-\tfrac{1}{2}\ln(q/\pi)-\frac{\Gamma'}{2\Gamma}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\alpha)-\frac{L'}{L}(1,\overline{\chi})$$

易得 $B(\overline{\chi})=\overline{B(\chi)}$. 从而

$$2\Re e\,B(\chi)=-\Re e\sum_{\varrho}\frac{1}{\overline{\varrho}}+\frac{1}{1-\overline{\varrho}},$$

其中级数通项非负, 故可交换次序. 于是可将 $1-\overline{\varrho}$ 换成 ϱ, 得到

$$\Re e\,B(\chi)=-\tfrac{1}{2}\sum_{\varrho}\Re e\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\overline{\varrho}}\right)=-\sum_{\varrho}\Re e\,\frac{1}{\varrho}.$$

代入 (8.72), 得

$$-\Re e\,\frac{L'}{L}(s,\chi)=\tfrac{1}{2}\ln\frac{q}{\pi}+\tfrac{1}{2}\Re e\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}s+\tfrac{1}{2}\alpha)-\Re e\sum_{\varrho}\frac{1}{s-\varrho}.$$

由复 Stirling 公式蕴涵的估计 $\Gamma'(s)/\Gamma(s)\ll\ln T$, 从中得到上界估计 (8.70). □

定理 8.25 的证明 首先注意到用与 (8.49) 证明类似的思路可得

$$-3\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0)-4\Re e\,\frac{L'}{L}(s,\chi)-\Re e\,\frac{L'}{L}(s+\mathrm{i}\tau,\chi^2)\geqslant 0.\qquad(\sigma>1).\tag{8.73}$$

对左边三项作上界估计. 首先有

$$-3\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0)\leqslant-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\leqslant\frac{3}{\sigma-1}+c_1.\tag{8.74}$$

此处及证明余下的部分中记号 c_j $(j\geqslant 0)$ 表示绝对常数.

接下来, 若 $\varrho=\beta+\mathrm{i}\gamma$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点且 $\chi^2\neq\chi_0$, 从 (8.70) 中得出

$$\begin{aligned}&-4\Re e\,\frac{L'}{L}(\sigma+\mathrm{i}\gamma,\chi)\leqslant 4c_0\ln qT-\frac{4}{\sigma-\beta},\\&-\Re e\,\frac{L'}{L}(\sigma+2\mathrm{i}\gamma,\chi^2)\leqslant 2c_0\ln qT.\end{aligned}\qquad(\sigma>1)\tag{8.75}$$

于是有

$$\frac{4}{\sigma-\beta}\leqslant\frac{3}{\sigma-1}+c_2\ln qT,$$

对适当的 c_3 选取 $\sigma=1+c_3/\ln qT$, 得

$$\beta\leqslant 1-c_4/\ln qT.$$

只须证明 $\chi^2 = \chi_0$, 即 χ 为实的情形. 从细化 (8.75) 中第二个不等式开始讨论. 对 $\zeta(s)$ 的乘积公式取对数导数, 得

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{1}{s-1} - b + \frac{\Gamma'}{2\Gamma}(\tfrac{1}{2}s+1) - \sum_{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{s-\varrho}\right),$$

其中对 $\zeta(s)$ 非显然零点求和的通项 $\geqslant 0$. 于是有

$$-\Re e\,\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \leqslant \Re e\,\frac{1}{s-1} + c_5 \ln T.$$

从而

$$-\Re e\,\frac{L'}{L}(s+\mathrm{i}\tau, \chi^2) = -\Re e\,\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + O(\ln q) \leqslant \Re e\,\frac{1}{s-1} + c_6 \ln qT.$$

代入 (8.73) 并用 (8.75) 的第一个不等式, 得

$$\frac{4}{\sigma-\beta} \leqslant \frac{3}{\sigma-1} + \Re e\,\frac{1}{\sigma-1+2\mathrm{i}\gamma} + c_7 \ln qT.$$

选取 $\sigma = 1 + \delta/\ln qT$ 并假设 $|\gamma| \geqslant \delta/\ln qT$, 记 $\mathcal{L} = \ln qT$, 得

$$\frac{4}{\sigma-\beta} \leqslant \frac{3\mathcal{L}}{\delta} + \frac{\mathcal{L}}{5\delta} + c_7\mathcal{L}.$$

从而

$$\beta \leqslant 1 - \frac{(4-5c_7\delta)\delta}{(16+5c_7\delta)\mathcal{L}}.$$

选取适当的 δ 知这推出当常数 c_0 足够小时 $\varrho \notin \mathcal{D}_q$.

至此已证明了对于每个 $\delta > 0$, 存在常数 $c(\delta) > 0$, 使得当在 $\mathcal{D}_q$ 的定义中选取 $c = c(\delta)$ 时, 在下列条件之一下 $\mathcal{D}_q$ 不含 $L(s,\chi)$ 的一般零点 $\varrho = \beta + \mathrm{i}\gamma$:

(i) $\chi^2 \neq \chi_0$,

(ii) $\chi^2 = \chi_0$ 且 $|\gamma| \geqslant \delta/\ln q$.

现在证明当 χ 为实数且 δ 足够小时, $L(s,\chi)$ 在矩形 $1-\delta/\ln q \leqslant \beta \leqslant 1$, $|\gamma| \leqslant \delta/(2\ln q)$ 中至多有一个零点, 且该零点必为实数. 事实上, 若 $L(\varrho,\chi) = 0$, $\gamma \neq 0$, 由 (8.70), 有

$$-\Re e\,\frac{L'}{L}(\sigma,\chi) \leqslant c_0 \ln q - 2\Re e\,\frac{1}{\sigma-\varrho},$$

其中因子 2 来自当 χ 为实数时零点对于实轴对称分布的事实. 然而, 由于 $\zeta(s)L(s,\chi) = \sum_{n\geqslant 1} f(n)/n^s$, 其中 $f = \mathbf{1} * \chi \geqslant 0$,⑥ 又有

$$-\Re e\,\frac{L'}{L}(\sigma,\chi) \geqslant \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \geqslant -\frac{1}{\sigma-1} - c_1.$$

⑥ 见定理 8.21 的证明.

从而

$$\frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2} \leqslant \frac{1}{\sigma-1} + c_8 \ln q.$$

选取 $\sigma = 1 + 2\delta/\ln q$, 此时 $|\gamma| \leqslant \frac{1}{4}(\sigma-1) \leqslant \frac{1}{4}(\sigma-\beta)$, 可知当 δ 足够小时,

$$\frac{32}{17(\sigma-\beta)} \leqslant \left(\frac{1}{2\delta} + c_9\right)\ln q \leqslant \frac{9\ln q}{17\delta},$$

这样 $\sigma - \beta \geqslant \frac{32}{9}\delta/\ln q$, 于是 $1-\beta \geqslant \frac{14}{9}\delta/\ln q$, 矛盾!

显然同样的推理也适用于 $L(s,\chi)$ 在线段 $[1-\delta/\ln q, 1]$ 上有两个实零点或有双重零点的情形.

根据已得到的信息, 从如下 Landau (1918) 的结果容易得到命题中的两个断言.

引理 8.27 (Landau) 设 χ_1 和 χ_2 是两个相异的本原特征, 其对应的 L 函数有实零点 β_1 和 β_2. 那么

$$1 - \min(\beta_1, \beta_2) \geqslant c_{10}/\ln q_1 q_2.$$

暂先承认该引理. 由于当 χ_1 是诱导 χ 的本原特征时 $L(s,\chi)$ 和 $L(s,\chi_1)$ 在半平面 $\sigma > 0$ 中有共同的零点, 可知对适当的常数 $c > 0$, $\prod_{\chi(\bmod q)} L(s,\chi)$ 在 $\mathcal{D}_q$ 中至多有一个实零点. 第二个断言 (最初是 Page 的结果) 于是显然. □

引理 8.27 的证明 $\chi_1\chi_2$ 是模 q_1q_2 非主特征. 事实上, 在相反的情形下 $\chi_1(n) = \chi_2(n)$ 应对任意与 q_1q_2 互素的 n 成立, 故这两个本原特征诱导相同的模 q_1q_2 特征. 由 §8.1 中之所见, 这是不可能的.

今由引理 8.26, 对 $\sigma > 1$ 有

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1\chi_2) \leqslant c_0 \ln q_1 q_2$$

及

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_j) \leqslant c_0 \ln q_j - \frac{1}{\sigma - \beta_j} \qquad (j = 1, 2),$$

而

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - \frac{L'}{L}(\sigma,\chi_1) - \frac{L'}{L}(\sigma,\chi_2) - \frac{L'}{L}(\sigma,\chi_1\chi_2)$$
$$= \sum_{n\geqslant 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\{1+\chi_1(n)\}\{1+\chi_2(n)\} \geqslant 0,$$

故

$$\frac{1}{\sigma-\beta_1} + \frac{1}{\sigma-\beta_2} \leqslant \frac{1}{\sigma-1} + c_{11}\ln q_1 q_2.$$

选取 $\sigma = 1 + \delta/\ln q_1 q_2$, δ 足够小, 便得要证的结论. □

注 从 Landau 引理即可推出, 当取常数 c_{12} 足够小时, 使 $\prod_{\chi(\bmod q_j)} L(s,\chi)$ 有实零点 $\beta_j \geqslant 1-c_{12}/\ln q_j$ 的序列 q_j 满足 $q_{j+1} > q_j^2$. 事实上,

$$c_{12}/\ln q_j \geqslant 1-\min(\beta_j,\beta_{j+1}) \geqslant c_{11}/\ln q_j q_{j+1},$$

从而若 $c_{12} \leqslant \frac{1}{3}c_{11}$ 则 $q_j q_{j+1} \geqslant q_j^{c_{11}/c_{12}} \geqslant q_j^3$.

§8.6 $\psi(x;\chi)$ 的显式公式

令

$$\psi(x;\chi) := \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)\chi(n), \qquad \psi^*(x;\chi) := \frac{1}{2}\{\psi(x-;\chi)+\psi(x;\chi)\}.$$

于是有

$$\psi(x;a,q) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(\bmod q)} \overline{\chi(a)}\psi(x;\chi).$$

由 Landau–Page 定理 (定理 8.25), 当适当选择常数 c 时, (8.69) 中定义的 $\mathcal{D}_q$ 含有至多一个

$$\prod_{\chi\,(\bmod q)} L(s,\chi)$$

的零点, 且当该零点存在时它是实单零点, 对应于一个实特征. 用 χ_1 表示该特征, 并令

$$\vartheta(\chi) := \begin{cases} 1, & 若\ \chi=\chi_1, \\ 0, & 若\ \chi\neq\chi_1. \end{cases}$$

另外记 β_1 为 $L(s,\chi_1)$ 可能的例外零点. 由 $\mathcal{D}_q$ 的定义, 有

$$1-\beta_1 < c/\ln 2q.$$

在本章余下的部分, 约定当如上述意义下的例外零点不存在时与 χ_1 或 β_1 有关的量应视为零.

最后, 令

$$b(\chi) := \operatorname{Res}\Big(\frac{L'(s,\chi)}{sL(s,\chi)};0\Big). \tag{8.76}$$

定理 8.28 设 χ 为模 q 非主 Dirichlet 特征. 对于 $x\geqslant 2$ 有

$$\psi^*(x,\chi) = -{\sum_{\varrho}}'' \frac{x^{\varrho}}{\varrho} - (1-\alpha)\ln x - b(\chi) + \sum_{m\geqslant 1}\frac{x^{-2m+\alpha}}{2m-\alpha}, \tag{8.77}$$

其中双撇号表示对 $L(s,\chi)$ 非显然零点 ϱ 的求和应视为当 $T\to\infty$ 时 $\sum_{|\Im m\,\varrho|\leqslant T}$ 的极限.

另外, 对 $q\geqslant 2$, $2\leqslant T\leqslant x$, 有

$$\psi(x;\chi)=-\vartheta(\chi)\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}-\sum_{|\gamma|\leqslant T}{}^{*}\frac{x^{\varrho}}{\varrho}+R_q(x,T), \tag{8.78}$$

其中

$$R_q(x,T)\ll\frac{x(\ln qx)^2}{T}+x^{1/4},$$

星号表示当 $\vartheta(\chi)=1$ 时零点 β_1 和 $1-\beta_1$ 在和式中不计.

证明 先设 χ 本原. 用第一实效 Perron 公式 (定理 2.3) 并如引理 4.7 那样推理, 得

$$\psi(x;\chi)=\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\kappa-\mathrm{i}T}^{\kappa+\mathrm{i}T}\frac{L'}{L}(s,\chi)\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s+O\Big(\frac{x(\ln Tx)^2}{T}+\frac{x\ln x}{x+T\langle\!\langle x\rangle\!\rangle}\Big), \tag{8.79}$$

其中

$$\langle\!\langle x\rangle\!\rangle:=\min_{\substack{\nu\geqslant 1,\,p\in\mathbb{P}\\ p^{\nu}\neq x}}|x-p^{\nu}|=|x-N|.$$

下面将移动积分线段并用留数定理来得到要证的公式. 被积函数的极点是 $L(s,\chi)$ 的零点以及 $s=0$, 于是当 $\alpha(\chi)=0$ (即 $\chi(-1)=1$) 时后者是双零点. 由抽屉原则及 $N(T,\chi)$ 的渐近公式 (8.66) 知在每个长度 $\gg\ln q$ 的区间中均可选择 T, 使得 $\min\big||\gamma|-T\big|\gg 1/\ln qT$.

对乘积公式 (8.67) 取对数导数知又有

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi)=\tfrac{1}{2}\ln\frac{q}{\pi}+\frac{\Gamma'}{2\Gamma}\Big(\frac{s+\alpha}{2}\Big)-B(\chi)-\sum_{\varrho}\frac{s}{\varrho(s-\varrho)}, \tag{8.80}$$

且 Γ-函数 Weierstrass 乘积公式 (0.4) 取对数导数后得

$$\frac{\Gamma'}{2\Gamma}\Big(\frac{\alpha+s}{2}\Big)=-\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{s+\alpha}-\sum_{n\geqslant 1}\Big(\frac{1}{2n+s+\alpha}-\frac{1}{2n}\Big).$$

另外对不对称形式下的函数方程 (8.66) 取对数导数后得

$$\begin{aligned}\frac{L'}{L}(s,\chi)&=\ln(2\pi/q)+\tfrac{1}{2}\pi\cot\{\tfrac{1}{2}\pi(s+\alpha)\}-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s)-\frac{L'}{L}(1-s,\overline{\chi})\\&\ll\ln q|s|\qquad(\sigma\leqslant -1).\end{aligned} \tag{8.81}$$

事实上, 复 Stirling 公式保证了当 $\sigma\leqslant -1$ 时 $\Gamma'(1-s)/\Gamma(1-s)\ll\ln|s|$; 并且由余切公式, 即

$$\pi\cot(\pi z)=\frac{1}{z}+\sum_{n\geqslant 1}\frac{2z}{z^2-n^2}\qquad(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$$

推出当 $s=\sigma\pm\mathrm{i}T$, $\sigma\leqslant -1$ 时 $\cot\left\{\frac{1}{2}\pi(s+\alpha)\right\}\ll 1$. 于是可将积分直线向左移至 $-\infty$. 于是由留数定理得

$$\begin{aligned}\psi(x;\chi)=&-\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^{\varrho}}{\varrho}+\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{\alpha-2n}}{2n-\alpha}\\&+\operatorname{Res}\Big(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\frac{x^s}{s};0\Big)+O(R_1+R_2),\end{aligned}\tag{8.82}$$

其中

$$R_1:=\frac{x\ln x}{x+T\langle\!\langle x\rangle\!\rangle}+\frac{x(\ln xT)^2}{T},\ R_2:=\max_{\varepsilon=\pm 1}\int_{-\infty}^{\kappa}\left|\frac{L'}{L}(\sigma+\mathrm{i}\varepsilon T,\chi)\right|\frac{x^{\sigma}}{T}\,\mathrm{d}\sigma.\tag{8.83}$$

然而容易从 (8.68) 得出

$$\sum_{\varrho}\frac{1}{1+|t-\gamma|^2}\ll\ln\{q(2+|t|)\}\qquad(t\in\mathbb{R}),\tag{8.84}$$

从而对 $-1\leqslant\sigma\leqslant 2$, $s=\sigma+\mathrm{i}T$, $s_0:=2+\mathrm{i}T$, 有

$$\begin{aligned}\frac{L'}{L}(s,\chi)&=\frac{L'}{L}(s,\chi)-\frac{L'}{L}(s_0,\chi)+O(1)\\&=\sum_{\varrho}\frac{2-\sigma}{(s-\varrho)(s_0-\varrho)}+O(\ln T)=\sum_{\substack{\varrho\\|\tau-\gamma|\leqslant 1}}\frac{1}{s-\varrho}+O(\ln qT).\end{aligned}$$

在最后的对 ϱ 的求和中有 $a\ll\ln qT$ 项, 且由假设它们的模均 $\ll\ln qT$. 这推出对 $-1\leqslant\sigma\leqslant 2$, 有

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right|\ll(\ln qT)^2\qquad(s=\sigma+\mathrm{i}T,\ -1\leqslant\sigma\leqslant 2\leqslant T).$$

于是由 (8.81) 得到

$$\begin{aligned}R_2&\ll\int_{-\infty}^{-1}\frac{x^{\sigma}}{T}\ln q(|\sigma|+T)\,\mathrm{d}\sigma+\int_{-1}^{\kappa}\frac{x^{\sigma}}{T}(\ln qT)^2\,\mathrm{d}\sigma\\&\ll\frac{\ln qT}{Tx\ln x}+\frac{x(\ln qT)^2}{T\ln x}\ll\frac{x(\ln Tq)^2}{T\ln x}.\end{aligned}\tag{8.85}$$

现计算 (8.82) 中 $s=0$ 处的留数. 回顾定义 (8.76). 若 $\alpha=1$, 则 $b(\chi)=L'(0,\chi)/L(0,\chi)$; 若 $\alpha=0$, 则

$$\frac{L'}{L}(s,\chi)=\frac{1}{s}+b(\chi)+a_1s+\cdots.$$

从而总有

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{x^sL'(s,\chi)}{sL(s,\chi)};0\Big)=(1-\alpha)\ln x+b(\chi).$$

这样

$$\begin{aligned}\psi(x;\chi)=&-\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^{\varrho}}{\varrho}+\sum_{m\geqslant 1}\frac{x^{-2m+\alpha}}{2m-\alpha}-(1-\alpha)\ln x-b(\chi)\\&+O\left(\frac{x\ln x}{x+T\langle\!\langle x\rangle\!\rangle}+\frac{x(\ln qxT)^2}{T}\right).\end{aligned}\tag{8.86}$$

令 T 趋于无穷便得到 (8.77).

现在只余下 (8.78) 的证明. 显然由 (8.86) 得, 当 $2\leqslant T\leqslant x$ 时

$$\psi(x;\chi)=-\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^{\varrho}}{\varrho}-b(\chi)+O(R_3),\tag{8.87}$$

其中

$$R_3:=\frac{x(\ln xq)^2}{T}.$$

需要估计 $b(\chi)$ 并考虑例外零点的贡献. 应用 (8.80) 于 s 与 2 并取其差, 得

$$\frac{L'}{L}(s,\chi)=-\frac{\Gamma'}{2\Gamma}\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)+\sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}-\frac{1}{2-\varrho}\right)+O(1).$$

若 $\alpha=1$, 取 $s=0$ 后得

$$b(\chi)=\frac{L'}{L}(0,\chi)=-\sum_{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{2-\varrho}\right)+O(1)=-\sum_{\varrho}\frac{2}{\varrho(2-\varrho)}+O(1).$$

若 $\alpha=0$, 该式仍成立. 这是因为当 s 趋于 0 时 $-\Gamma'(s/2)/\{2\Gamma(s/2)\}=1/s+O(1)$. 另外, 由 (8.84) 得出

$$\sum_{|\gamma|\geqslant 1}\frac{2}{|\varrho(2-\varrho)|}\ll\sum_{|\gamma|\geqslant 1}\frac{1}{|2-\varrho|^2}\ll\ln q,$$

故 (8.68) 推出

$$\sum_{|\gamma|\leqslant 1}\frac{1}{|2-\varrho|}\ll\ln q.$$

于是由前述得

$$b(\chi)=-\sum_{|\gamma|\leqslant 1}\frac{1}{\varrho}+O(\ln q).\tag{8.88}$$

代入(8.87), 最终得到

$$\psi(x;\chi)=-\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^{\varrho}}{\varrho}+\sum_{|\gamma|\leqslant 1}\frac{1}{\varrho}+O(R_3).$$

由 Landau–Page 定理 (定理 8.25) 知存在绝对常数 c, 使得 $\prod_{\chi\neq\chi_0} L(s,\chi)$ 最多有一个零点 $\varrho=\beta+\mathrm{i}\gamma$ 满足 $|\gamma|\leqslant 1$ 及 $\beta\geqslant 1-c/\ln q$, 该零点便是例外的实零点 β_1. 可设 $c\leqslant\frac{1}{6}$, 于是 $\beta_1\geqslant\frac{3}{4}$. 这样

$$\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant 1\\ \varrho\neq\beta_1}}\frac{1}{\varrho}\ll(\ln q)^2,$$

从而

$$\psi(x;\chi)=-\sum_{|\gamma|\leqslant T}{}^{*}\frac{x^{\varrho}}{\varrho}-\Big(\frac{x^{\beta_1}-1}{\beta_1}+\frac{x^{1-\beta_1}-1}{1-\beta_1}\Big)\vartheta(\chi)+O(R_3)$$

$$=-\sum_{|\gamma|\leqslant T}{}^{*}\frac{x^{\varrho}}{\varrho}-\vartheta(\chi)\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}+O(R_3+x^{1/4}),$$

这是由于

$$\frac{x^{1-\beta_1}-1}{(1-\beta_1)}=(\ln x)\int_{\beta_1}^{1}x^{1-v}\,\mathrm{d}v\ll x^{1/4},\qquad\frac{1}{\beta_1}\ll 1.$$

从而对 χ 本原的情形证明了 (8.78).

当 χ 由本原特征 χ^* 诱导时, 有

$$|\psi(x;\chi)-\psi(x;\chi^*)|\leqslant\sum_{\substack{n\leqslant x\\ (n,q)>1}}\Lambda(n)\leqslant\sum_{p|q}\sum_{\nu\leqslant\ln x/\ln p}\ln p\ll\ln x\ln q.$$

于是对 $\psi(x;\chi)$ 证明了题设公式, 但 β_1 是 χ^* 的例外零点而不必是 χ 的例外零点. 然而此时应有 $\beta_1>1-c/\ln q^*$ 及 $\beta_1<1-c/\ln q$. 由于对应于 β_1 的项包括在对 ϱ 的求和中, 公式 (8.78) 仍成立. □

§8.7　算术数列的素数定理

定理 8.29　令 κ 为任意正常数. 存在常数 $c=c(\kappa)>0$, 使得对 $x\geqslant 2$, $1\leqslant q\leqslant \mathrm{e}^{\kappa\sqrt{\ln x}}$, $(a,q)=1$ 一致地有

$$\psi(x;a,q)=\frac{x}{\varphi(q)}-\frac{\chi_1(a)x^{\beta_1}}{\beta_1}+O\Big(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln x}}\Big).\tag{8.89}$$

证明　由特征的正交性推出

$$\psi(x;a,q)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi}\overline{\chi(a)}\psi(x;\chi)=\frac{1}{\varphi(q)}\psi(x;\chi_0)+\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi(a)}\psi(x;\chi).$$

而

$$|\psi(x)-\psi(x;\chi_0)|\leqslant\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)>1}}\Lambda(n)\leqslant\sum_{p|q}\sum_{\nu\leqslant\ln x/\ln p}\ln p\ll\ln x\ln q,$$

且对适当的常数 $c_0>0$, 有

$$\psi(x)=x+O\Big(x\mathrm{e}^{-c_0\sqrt{\ln x}}\Big).$$

对 $\chi\neq\chi_0$, 由定理 8.28 得

$$\psi(x;\chi)=-\vartheta(\chi)\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}-\sum_{|\gamma|\leqslant T}{}'\frac{x^{\varrho}}{\varrho}+O\Big(\frac{x(\ln qx)^2}{T}+x^{1/4}\Big)\qquad(1\leqslant T\leqslant x).$$

在对 ϱ 的求和中, 每个零点都满足 $\beta\leqslant 1-c/\ln qT$, 于是由定理 8.25, 有 $x^{\varrho}\ll x\mathrm{e}^{-c_1\ln x/\ln qT}$. 另外, 根据 (8.68), 有

$$\sum_{|\gamma|\leqslant 1}\frac{1}{|\varrho|}\ll(\ln q)^2,\qquad \sum_{1<|\gamma|\leqslant T}\frac{1}{|\varrho|}\ll(\ln qT)^2\ll(\ln qx)^2.$$

选取 $T=\mathrm{e}^{\sqrt{\ln x}}$ 便得要证的结论. □

为能将含例外零点的项视为余项, 需对 $1-\beta_1$ 作下界估计.

性质 8.30 设 $q\geqslant 3$, 有

$$1-\beta_1\gg L(1,\chi_1)/(\ln q)^2\gg 1/\big\{\sqrt{q}(\ln q)^2\big\}.\tag{8.90}$$

证明 改变 $\mathcal{D}_q$ 定义中的隐含常数后可设 $\beta_1>\frac{1}{2}$. 对 $\beta_1\leqslant\sigma\leqslant 1$, $N>1$, 有

$$\begin{aligned}L'(\sigma,\chi_1)&=-\int_{1-}^{\infty}\frac{\ln t}{t^{\sigma}}\,\mathrm{d}K(t)\ll\sum_{n\leqslant N}\frac{\ln n}{n^{\sigma}}+\int_N^{\infty}\frac{|K(t)-K(N)|\ln t}{t^{\sigma+1}}\,\mathrm{d}t\\&\ll\frac{N^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\ln N+H(\chi_1)\frac{\ln N}{N^{\sigma}}.\end{aligned}$$

选取 $N:=H(\chi_1)$, 由 $H(\chi_1)\leqslant q$, $1-\beta_1\ll 1/\ln q$ 得

$$L'(\sigma,\chi_1)\ll H(\chi_1)^{1-\beta_1}\big\{\ln H(\chi_1)\big\}^2\ll(\ln q)^2,$$

从而

$$L(1,\chi_1)=L(1,\chi_1)-L(\beta_1,\chi_1)\ll(1-\beta_1)(\ln q)^2.$$

根据 (8.57), 这便推出 (8.90). □

推论 8.31 存在常数 $c>0$, 使得对任意当 x 趋于无穷时也趋于无穷的函数 $h(x)$, 对 $x\geqslant 3$, $1\leqslant q\leqslant (\ln x)^2/\{h(x)^2(\ln_2 x)^6\}$, $(a,q)=1$ 一致地有

$$\psi(x;a,q)=\frac{x}{\varphi(q)}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{(\ln x)^{c\,h(x)}}\Big)\Big\}. \tag{8.91}$$

证明 只须应用 (8.89) 和 (8.90) 即可. □

注 (8.91) 中出现的所有常数均可实效地计算. 特别地, 当 $x\to\infty$ 及 $q=o\big((\ln x)^2/(\ln_2 x)^6\big)$ 时,

$$\psi(x;a,q)\sim\frac{x}{\varphi(q)}. \tag{8.92}$$

这基本上是已知最好的实效结果.

为延拓渐近等价 (8.92) 的成立域, 需对 $1-\beta_1$ 作更精确的估计. Siegel 定理提供了一个这样的改进, 但作为代价, 常数不再是实效的. 这里给出 Estermann (1948) 的证明. 我们将该结果阐述成 Phragmén–Landau 定理一个更一般的实效形式.

定理 8.32 设 $F(s):=\sum_{n\geqslant 1}a_n/n^s$ 为 $\sigma>1$ 上收敛的 Dirichlet 级数, 其系数对 $n\geqslant 1$ 满足 $a_n\geqslant\delta(n)$.⑦ 假设存在实数 $r\in]0,1[$ 和 $M>0$, 使得:

(i) $f(s):=F(s)(s-1)$ 可解析延拓到圆盘$|s-1|\leqslant r$上;

(ii) $\sup_{|s-1|\leqslant r}|f(s)|\leqslant M$;

(iii) $\exists\,\beta\in[1-r/2,1[$, 使得$f(\beta)\geqslant 0$,

那么

$$f(1)\geqslant\frac{c_1(1-\beta)}{M^{c_2(1-\beta)}}, \tag{8.93}$$

其中 c_1 和 c_2 是不依赖于 r 的正常数.

注 有 $f(1)=\lim_{\sigma\to 1+}F(\sigma)(\sigma-1)$, 故 $f(1)\geqslant 0$. 若 $f(1)=0$, 则 F 在圆盘 $|s-1|\leqslant r$ 上全纯, 故由 Phragmén–Landau 定理, 其收敛坐标 $<1-r$. 这说明 $F(\beta)=\sum_{n\geqslant 1}a_n/n^\beta>0$, 故 $f(\beta)=(\beta-1)F(\beta)<0$. 前述假设于是推出 $f(1)>0$, 故可视 (8.93) 为该下界估计的一个实效形式.

证明 设 $\beta=1-\mu r$, 其中 $0<\mu\leqslant\frac{1}{2}$; 并令 $\alpha:=1+\lambda r$, 其中 $0<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$. 由于 $F(s)$ 在圆盘 $|s-\alpha|<\lambda r$ 上全纯, 可在此区域上将之展成收敛 Taylor 展式

$$F(s)=\sum_{n\geqslant 0}F_n(\alpha-s)^n.$$

⑦ 回顾在 Kronecker 记号下 $\delta(n):=\delta_{1n}$.

有 $F_0 = F(\alpha) \geqslant 1$, 且对任意 $n \geqslant 1$ 有 $F_n = (-1)^n F^{(n)}(\alpha)/n! \geqslant 0$, 故 $F_n \geqslant \delta(n)$. 另外, 对 $|s-\alpha| < \lambda r$ 有

$$\frac{f(1)}{s-1} = f(1)\sum_{n\geqslant 0}\frac{(\alpha-s)^n}{(\alpha-1)^{n+1}} = \frac{f(1)}{\lambda r}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{\alpha-s}{\lambda r}\right)^n.$$

而 Taylor 展式

$$F(s) - \frac{f(1)}{s-1} = \frac{f(s)-f(1)}{s-1} = \sum_{n\geqslant 0} b_n(\alpha-s)^n$$

在圆盘 $|s-\alpha| \leqslant (1-\lambda)r$ 上收敛, 这是因为它对应于其上一个全纯函数. Cauchy 公式于是推出

$$b_n = \frac{(-1)^n}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|s-\alpha|=(1-\lambda)r}\frac{f(s)-f(1)}{s-1}\frac{\mathrm{d}s}{(s-\alpha)^{n+1}},$$

这样, 由 $|s-\alpha| = (1-\lambda)r$ 时 $|s-1| \geqslant |s-\alpha| - |\alpha-1| = (1-2\lambda)r$ 得

$$|b_n| \leqslant \frac{2M}{(1-2\lambda)(1-\lambda)^n r^{n+1}}.$$

从关系

$$b_n = F_n - \frac{f(1)}{(\lambda r)^{n+1}} \geqslant \delta(n) - \frac{f(1)}{(\lambda r)^{n+1}} \qquad (n \geqslant 0)$$

得出, 对任意 $N \geqslant 1$, 在附加条件 $\mu + 2\lambda < 1$ 下有

$$\begin{aligned}\frac{f(1)}{1-\beta} &\geqslant \frac{f(\beta)-f(1)}{\beta-1}\\ &\geqslant 1 - \sum_{0\leqslant n<N}\frac{f(1)(\alpha-\beta)^n}{(\lambda r)^{n+1}} - \frac{2M}{(1-2\lambda)r}\sum_{n\geqslant N}\frac{(\alpha-\beta)^n}{(1-\lambda)^n r^n}\\ &\geqslant 1 - \frac{f(1)}{\lambda r}\frac{\{(\lambda+\mu)/\lambda\}^N - 1}{\{(\lambda+\mu)/\lambda\}-1} - \frac{2M}{(1-2\lambda)r}\left(\frac{\lambda+\mu}{1-\lambda}\right)^N\frac{1}{1-(\lambda+\mu)/(1-\lambda)}.\end{aligned}$$

从中推出

$$\frac{f(1)}{\mu r}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^N \geqslant 1 - \frac{2M(1-\lambda)}{(1-2\lambda)(1-2\lambda-\mu)r}\left(\frac{\lambda+\mu}{1-\lambda}\right)^N. \tag{8.94}$$

如选 $\lambda = \frac{1}{8}$, 使得 $\lambda+\mu < \frac{5}{8}$, $(\lambda+\mu)/(1-\lambda) < \frac{5}{7}$, 对于 $N = \lceil \ln(20M/r)/\ln\frac{7}{5}\rceil$, (8.94) 的右边 $\geqslant \frac{1}{2}$. 从而

$$f(1) \geqslant \tfrac{1}{2}\mu r\mathrm{e}^{-8\mu N} \geqslant c_1\mu r M^{-c_2\mu r} = c_1(1-\beta)M^{-c_2(1-\beta)},$$

其中 $c_1 \gg r^{8\mu} \gg r^4$ 且 $c_2 = 8/\left(r\ln\frac{7}{5}\right)$. □

现在可以证明 Siegel 定理了.

定理 8.33 (Siegel) 设 $q \geqslant 2$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $c(\varepsilon) > 0$, 使得 $L(1,\chi) > c(\varepsilon)/q^{\varepsilon}$ 对所有模 q 非主实特征成立. 特别地,

$$1 - \beta_1 \gg_{\varepsilon} 1/q^{\varepsilon}.$$

证明 设 χ_1, χ_2分别为模 q_1, q_2 的实本原特征. 在引理 8.27 的证明中曾见到 $\chi_1\chi_2$ 是模 q_1q_2 非主 (但不必本原) 特征. 考虑 Dirichlet 级数

$$F(s) = \zeta(s)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)L(s,\chi_1\chi_2) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}. \tag{8.95}$$

有 $a_1 = 1$ 及

$$\log F(s) = \sum_p \sum_{\nu\geqslant 1} \frac{\{1+\chi_1(p)^\nu\}\{1+\chi_2(p)^\nu\}}{\nu p^{\nu s}},$$

故对任意整数 $n \geqslant 2$ 有 $a_n \geqslant 0$. 另外, F 可亚纯延拓到圆盘 $|s-1| < 1$ 上, 形如 $f(s)/(s-1)$, 其中 $f(1) = L(1,\chi_1)L(1,\chi_2)L(1,\chi_1\chi_2)$. 最后, 由 Abel 求和法知 $L(\sigma,\chi) \ll q$ 对任意模 q 非主特征及任意 $]0,1[$ 中的 σ 成立. 于是对任意 $0 < \sigma < 1$ 有 $f(s) \ll (q_1q_2)^2$.

为能应用定理 8.32, 需找到 $[\frac{1}{2},1[$ 中的 β, 使得 $f(\beta) \geqslant 0$; 或等价地, 使得 $F(\beta) \leqslant 0$.

设 $\varepsilon \in]0,\frac{1}{2}[$. 若存在非主实本原特征标 χ, 使得 $L(s,\chi)$ 在 $[1-\varepsilon,1[$ 上有零点, 选取 $\chi_2 = \chi$ 及 $\beta = \beta_2$, 那么对任意 χ_1 有 $F(\beta_2) = 0$. 否则对任意非主实本原特征 χ 及任意 $[1-\varepsilon,1[$ 中的 σ 有 $L(\sigma,\chi) \neq 0$. 此时取 $\beta = 1-\varepsilon/2$, χ_2 为任一非主实特征. 由于 $\zeta(\beta) < 0$ 且 (8.95) 中三个 L 函数均在 $[\beta,1]$ 上大于 0, 得 $F(\beta) < 0$.

从而 $F(\beta) \leqslant 0$ 总成立, 且由 (8.93) 推出

$$L(1,\chi_1)L(1,\chi_2)L(1,\chi_1\chi_2) \geqslant c_1(1-\beta)/(q_1q_2)^{c_2(1-\beta)} \geqslant c_1(1-\beta)/(q_1q_2)^{c_2\varepsilon}.$$

当 χ_2 固定时, β 仅依赖于 ε. 另外, 由定理 8.18, 有 $L(1,\chi_1\chi_2) \ll \ln q_1q_2$ 及 $L(1,\chi_2) \ll \ln q_2$, 其中隐含常数是绝对常数. 故

$$L(1,\chi_1)(\ln q_1q_2)(\ln q_1) \gg_{\varepsilon} 1/q_1^{c_2\varepsilon}.$$

由于 c_2 是绝对常数, 这即推出前述结论. □

注 Siegel 定理中 $L(1,\chi_1)$ 下界估计不实效：给定 ε, 从中不能数值地计算常数 $c(\varepsilon)$.

Siegel–Walfisz 定理 (定理 8.17) 的证明 只须将 β_1 的下界估计代入 $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2A}$ 下定理 8.29 的公式. 注意到一旦 $A \geqslant 1$ 该结论便不实效：Pólya–Vinogradov 不等式不适用. □

注记

§8.1 对有限 Abel 群特征标更详尽的研究可参阅 Ayoub (1963) 或 Ellison 和 Mendès France (1975).

本原特征的介绍及定理 8.7 的证明依据 Davenport (1980) 的著作.

Kronecker 符号推广了 Legendre 符号：对 $d \in \mathbb{Z}^*$, 令

$$\left(\frac{d}{2}\right) := \begin{cases} 1, & 若\ d \equiv \pm 1 \pmod 8, \\ 0, & 若\ d \equiv 0 \pmod 2, \\ -1, & 若\ d \equiv \pm 3 \pmod 8, \end{cases} \qquad \left(\frac{d}{n}\right) := \prod_{p^\nu \| n} \left(\frac{d}{p}\right)^\nu,$$

当 $p > 2$ 时, $\left(\frac{d}{p}\right)$ 保持了 Legendre 符号的意义. 容易验证映射$n \mapsto \left(\frac{d}{p}\right)$ 是实特征. 可以证明 (见 Davenport (1980)) 模 q 本原实特征总可写成

$$\chi(n) = \left(\frac{d}{n}\right) \tag{8.96}$$

的形式, 其中 d 是 *基础判别式*, 即形如 -4, ± 8, $(-1)^{(p-1)/2}p$ 的一些互素数的乘积, 其中 p 是奇素数, 且右边的部分依 Kronecker 意义定义. χ 的模于是等于 $q = |d|$. 这样, 若 $8 \| q$, 有两个模 q 本原实特征, 否则便只有一个. 于是得到 (见 Landau (1966), 定理 215)

$$G(n, \chi) = \chi(n)\sqrt{d}, \tag{8.97}$$

其中根号由幅角主值定义.

后来对使得 $H(\chi) \geqslant c\sqrt{q}$ 的 c 值的改进见 Sárközy (1977), Sokolovskii (1979). 另外, Montgomery 和 Vaughan (1979) 证明了对任意 $\varepsilon > 0$, $H(\chi) \ll_\varepsilon \sqrt{q}$ 对除至多 $\varepsilon\varphi(q)$ 个以外的所有模 q 非主特征成立.

更精确地, Paley 于 1932 年证明了

$$\max_{\chi \neq \chi_0} H(\chi) \gg \sqrt{q} \ln_2 q$$

对无穷多个 q 值成立. 另外, Montgomery 和 Vaughan (1977) 证明了在广义 Riemann 假设下有

$$H(\chi) \ll \sqrt{q} \ln_2 q.$$

不等式 $|K(x)| \leqslant 2\sqrt{q}\ln q$ 对小的 x 值, 如 $x \leqslant \sqrt{q}$ 来说显然没有意义. Burgess (1962, 1963) 研究了这一问题. 例如, 他证明了

$$\sum_{n \leqslant x} \chi(n) \ll x/q^\delta \qquad (x \geqslant q^{3/8+\varepsilon}), \tag{8.98}$$

其中 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. 另外, 若 q 无立方因子, (8.98) 对 $x \geqslant q^{1/4+\varepsilon}$ 成立. 又见 Hildebrand (1986d).

§8.3 定理 8.21 的证明基本上根据 Ellison 和 Mendès France (1975) 第七章 A1, 其改进是用 $M_2(\chi)$ 的上界估计来代替显然的上界 $H(\chi) \leqslant q/2$. 在此所采用的 Tauber 型方法下, 对定理 8.16 带来的改进并不明显. 然而用复积分方法的确可以得到对 q 更好的一致性, 见习题 237.

从二次型理论, 尤其是 Dirichlet 类数公式 (如见 Davenport (1980, 第六章)) 即可得出与定理 8.21 相当的估计. Ramaré (2001a) 注意到甚至可以从中得到下界估计

$$L(1,\chi) \geqslant \pi 2^{\omega(q)-1}/\sqrt{q}.$$

他还用纯解析的方法得到质量相当的下界估计.

对 $L(1,\chi)$ 的上界估计, 见 Ramaré (2001b, 2004).

§8.5 这里采用的定理 8.25 的证明主要根据 Davenport (1980)的结果.

Miech (1969) 证明了当 $q \geqslant q_0$ 时可在 Landau–Page 定理 (定理 8.25) 中选 $c = 1/20$. 当 q 足够大时, 已知最好的 c 值是 $c = 0.103\,67$, 据 Graham (1981b) 的说法, 这是 Schoenfeld 一个未发表的工作中的结果, 证明见陈景润 (1983) 引理 10. Heath-Brown (1992) 证明了在区域 $\sigma \geqslant 1 - 0.348/\ln q$, $|\tau| \leqslant 1$ 中至多只有一个零点.

承认广义 Riemann 假设, 可将 Siegel–Walfisz 定理改进为

$$\psi(x;a,q) = \frac{x}{\varphi(q)} + O\big(\sqrt{x}(\ln x)^2\big) \qquad (x \geqslant 2,\ q \geqslant 1). \tag{8.99}$$

Bombieri–Vinogradov 定理 (见 Bombieri (1965), A.I. Vinogradov (1965, 1966)) 无条件地证明了 (8.99) 在平均意义上成立.

定理 8.34 (Bombieri–Vinogradov) 设 A 为正常数. 对 $Q \geqslant 1$, $x \geqslant 1$ 一致地有

$$\sum_{q \leqslant Q} \max_{\substack{(a,q)=1 \\ y \leqslant x}} \left|\psi(y;a,q) - \frac{y}{\varphi(q)}\right| \ll \frac{x}{(\ln x)^A} + \sqrt{x}Q\big(\ln(Qx)\big)^4. \tag{8.100}$$

此定理的一个初等证明, 基于一个丰富的一般方法, 见 Vaughan (1980). 可将指数 4 改进为 $\frac{5}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ 任意, 见 Dress, Iwaniec 和 Tenenbaum (1983). Elliott–Halberstam 猜想断言对任意 $\varepsilon > 0$, (8.100) 左边对于 $Q \leqslant x^{1-\varepsilon}$ 是 $o(x)$. 在大部分算术应用中, 它可用来代替广义 Riemann 假设.

§8.7 Siegel 定理其他解析证明见 Chowla (1950) 及 Goldfeld (1974).

习题

232. (a) 设 $p>2$. 对每个 $d\geqslant 1$, 用 $\psi(d)$ 表示 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ 中恰为 d 阶的元素个数. 证明关系 $\sum_{d|(p-1)}\psi(d)=p-1$.

(b) 设 y 为 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ 中 d 阶元. 证明方程 $x^d-1\equiv 0\,(\operatorname{mod} p)$ 恰有 d 个解, 并确定这些解. 推出所有 d 阶元均是 y 生成的群的 $\varphi(d)$ 个生成元之一.

(c) 证明对任意 d, $\psi(d)\leqslant\varphi(d)$ 均成立, 故当 $d\mid(p-1)$ 时该不等式实际上是等式. 推出 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ 是循环群.

233. 设 $p>2$, g 为模 p 原根.

(a) 证明 $g\,(\operatorname{mod} p^2)$ 的阶要么是 $p-1$ 要么是 $p(p-1)$. 证明在第一种情形 $g+p$ 不是 $p-1$ 阶的. 推出 $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^*$ 是循环群.

(b) 设 $\nu\geqslant 2$ 且 g 是 $\operatorname{mod} p^2$ 原根. 证明 $g^{p-1}=1+hp$, 其中 $(h,p)=1$. 推出

$$g^{\varphi(p^\nu)}\not\equiv 1\,(\operatorname{mod} p^{\nu+1}),$$

从而 g 生成 $(\mathbb{Z}/p^{\nu+1}\mathbb{Z})^*$.

234. 本习题中假定不知道素数定理. 但可使用 Tchébychev 估计.

设整数 $q>1$ 且 χ 是模 q Dirichlet 特征. 记 χ_0 为模 q 主特征, 并令

$$M(x;\chi):=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\chi(n),\ \ \psi(x;\chi):=\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\Lambda(n),\ \ D(x;\chi):=\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\ln n.$$

(a) 不展开计算, 回忆蕴涵关系 $\lim\limits_{x\to\infty}M(x)/x=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\psi(x)/x=1$ 初等证明的主要步骤.

(b) 证明对 $x\geqslant 2$, $q\geqslant 1$, 有 $\psi(x,\chi_0)=\psi(x)+O\big((\ln q)\ln x\big)$. 提出并证明余项对 q 依赖性的一个改进.

(c) 证明对 $\chi\neq\chi_0$ 有 $D(x;\chi)\ll q\ln x$ $(x\geqslant 2)$. 提出并证明该估计对 q 依赖性的一个改进.

(d) 证明数论函数的卷积关系

$$\chi\Lambda=(\chi\mu)*(\chi\ln).$$

(e) 证明如果对任意固定的 $q>1$ 及任意 $\chi\neq\chi_0$, 当 $x\to\infty$ 时有 $M(x;\chi)=o(x)$, 那么 $\psi(x;a,q)\sim\psi(x)/\varphi(q)$ 对所有使得 $(a,q)=1$ 的 a 成立.

(f) 从

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a\,(\operatorname{mod} q)}}\mu(n)=o(x)\qquad(x\to\infty)$$

对任意使得 $(a,q)=1$ 的 a 成立的假设出发是否能够得到上题的结论?

235. 利用定理 8.21 的方法, 证明对任意模 q 非主 Dirichlet 实特征 χ 有 $L(1,\chi)\geqslant 1/(4\sqrt{q})$.

236. 证明对 $(a,q)=1,\ \sigma>1$ 有

$$\sum_{p\equiv a(\bmod q)}\frac{1}{p^s}=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi}\overline{\chi(a)}\log L(s,\chi)+h(s),$$

其中 $h(s)$ 是在半平面 $\sigma>\frac{1}{2}$ 上全纯的函数.

推出在 $L(s,\chi)\neq 0$ 对于 $\sigma\geqslant 1$ 成立的假设下有

$$\sum_{p\equiv a(\bmod q)}\frac{1}{p^s}=\frac{1}{\varphi(q)}\log\Big(\frac{1}{s-1}\Big)+h_1(s)\qquad(\sigma>1),$$

其中 h_1 是在半平面 $\sigma\geqslant 1$ 上全纯的函数. 然后用 Delange 的 Tauber型定理 (见定理 7.28) 证明算术数列的素数定理.

237. 令 $Q=\sqrt{q}(\ln 2q)^2$. 证明存在正绝对常数 $c_1,\ c_2$, 使得定理 8.18、定理 8.20 及定理 8.22 中的估计实际上对

$$1-\sigma\leqslant\begin{cases}c_1\mathcal{L}^{-9}, & 若\ \chi^2\neq\chi_0,\\ c_1\mathcal{L}^{-8}(\mathcal{L}+1/|\tau|)^{-1}, & 若\ \chi^2=\chi_0,\ |\tau|Q>c_2,\\ c_1Q^{-1}, & 若\ \chi^2=\chi_0,\ |\tau|Q\leqslant c_2\end{cases}$$

成立.

用 §4.2 的方法推出存在绝对常数 $c>0$ 及数量 $\delta(q)\gg q^{-1/2}(\ln q)^{-10}$, 使得对 $q\leqslant\exp(\ln x)^{1/10}$ 一致地有

$$\psi(x;a,q)=\frac{x}{\varphi(q)}+O\Big(x\exp\{-c(\ln x)^{1/10}\}+\frac{2^{\omega(q)}}{\varphi(q)}(\ln q)^9x^{1-\delta(q)}\Big).$$

证明对任意 $\varepsilon>0$, 渐近公式 $\psi(x;a,q)\sim x/\varphi(q)$ 对 $q\leqslant(\ln x)^{2-\varepsilon}$ 一致成立.

238. 算术数列中的无平方因子数. 令

$$Q(s,\chi)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)^2\chi(n)}{n^s}.$$

证明 $Q(s,\chi)=L(s,\chi)H(s,\chi)$, 其中 $H(s,\chi)$ 是 $\sigma\geqslant\sigma_0>\frac{1}{2}$ 上的有界全纯函数. 证明 $L(s,\chi)\ll_\varepsilon(Tq)^{1-\sigma+\varepsilon}$ 对 $0\leqslant\sigma\leqslant 1,\ |\tau|+1\leqslant T$ 成立, 并推出对任意 $\varepsilon>0$ 及对 $x\geqslant 2,\ q\geqslant 1,\ (a,q)=1$ 一致地有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a\,(\bmod q)}}\mu(n)^2=\frac{x}{q}\prod_{p\nmid q}(1-p^{-2})+O_\varepsilon\Big(x^{2/3+\varepsilon}q^{1/3}\Big).\tag{8.101}$$

证明第一部分定理 3.10 证明中的卷积方法给出余项最好的上界估计, 即 $O(\sqrt{x})$. 用前面的解析方法, 利用 Montgomery (1971) 定理 10.1 中的估计[⑧]

$$\sum_{\chi(\bmod q)}\int_{-T}^{T}|L(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau,\chi)|^4\,\mathrm{d}\tau\ll(qT)^{1+\varepsilon},$$

重新证明该结论较弱的形式 (即 $\ll x^{1/2+\varepsilon}$).

239. 设 χ_4 为模 4 唯一的非主 Dirichlet 特征. 证明 $L(1,\chi_4)=\pi/4$. 证明形如 $4m+3$ 的素数集对于 $\delta=\frac{1}{2}$ 和 $K=\sqrt{(2/\pi)}\,\mathrm{e}^{\gamma/2}A$ 满足习题 228 的假设 (i) 和 (ii), 其中 $A=\prod_{p\equiv3(\bmod 4)}\left(1-p^{-2}\right)^{-1/2}$. 推出不超过 x 且所有素因子形如 $4m+3$ 的整数 n 的个数 $N_3(x)$ 满足

$$N_3(x)\sim\frac{\sqrt{2}Ax}{\pi\sqrt{\ln x}}.$$

给出该结论一个带余项的形式并推广之.[⑨]

240. *两个平方数之和*. 保留习题 239 中 χ_4 的记号. 利用第一部分 §4.8 中证明的关于两个平方数之和的示性函数 h 的性质, 证明公式

$$\sum_{n\geqslant1}\frac{h(n)}{n^s}=(1-2^{-s})^{-1/2}\zeta(s)^{1/2}L(s,\chi_4)^{1/2}\prod_{p\equiv3\,(\bmod 4)}(1-p^{-2s})^{-1/2}\quad(\sigma>1),$$

其中平方根取辐角主值. 用 Selberg–Delange方法推出对适当的常数 $c>0$ 有

$$\sum_{n\leqslant x}h(n)=\int_0^{1/3}x^{1-t}g(t)\,\mathrm{d}t+O\Big(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln x}}\Big),$$

其中

$$g(t):=\frac{\sqrt{-t\zeta(1-t)L(1-t,\chi_4)}}{\pi(1-t)\sqrt{t(1-2^{t-1})}}\prod_{p\equiv3\,(\bmod 4)}\frac{1}{\sqrt{1-p^{2t-2}}}.$$

推出一个渐近展式, 使第一部分公式 (4.90) 为其第 1 阶的特殊情形.

241. *剩余类中因子分布*. 对任意 Dirichlet 特征 χ, 令 $\tau(n;\chi):=\sum_{d|n}\chi(d)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. 当 a, q, n 为正整数时, 又定义

$$\tau_q(n):=\sum_{\substack{d|n\\(d,q)=1}}1,\qquad\tau(n;a,q):=\sum_{\substack{d|n\\d\equiv a\,(\bmod q)}}1.$$

---

⑧ 更细的估计或平均估计见 Prachar (1958), Warlimont (1969, 1980). 特别地, Prachar 用初等方法的一个很简单的改动证明了 (8.101) 的余项 $\ll x^{1/2}q^{-1/4}+q^{1/2}$.

⑨ 见 Landau (1909) 第 2 卷 641–669 页, 及 Wirsing (1956).

(a) 证明对任意整数 $n \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, 有

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |\tau(n;\chi)|^2 = \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q \\ (a,q)=1}} \left\{ \tau(n;a,q) - \frac{\tau_q(n)}{\varphi(q)} \right\}^2,$$

其中对 χ 的求和取遍模 q 非主特征.

(b) 令 z, w 为复数, 满足 $|z| < 1 = |w|$. 证明恒等式

$$\sum_{\nu \geqslant 0} z^\nu \left| \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} w^j \right|^2 = \frac{1 - z^2}{(1-z)^2(1-wz)(1-\overline{w}z)}.$$

推出对任意模 q 非主特征 χ 有

$$F(s,\chi) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{|\tau(n;\chi)|^2}{n^s} = g_q(s) \frac{\zeta(s)^2 L(s,\chi) L(s,\overline{\chi})}{\zeta(2s)},$$

其中 $g_q(s) := \prod_{p|q}(1 + 1/p^s)^{-1}$.

(c) 证明对模 q 非主特征 χ, $s = \sigma + \mathrm{i}\tau$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $\varepsilon \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|\tau| + 2 \leqslant T$, 有 $L(s,\chi) \ll_\varepsilon \left(q^{1/2}T\right)^{1-\sigma+\varepsilon}$.

(d) 对线段 $[\kappa - \mathrm{i}T, \kappa + \mathrm{i}T]$ 用第二实效 Perron 公式, 其中 $\kappa := 1 + 1/\ln x$, $T := (x/q)^{3/14}$, 并将积分坐标移到 $\sigma = \frac{1}{2} + \varepsilon$ 处, 证明对任意 $\varepsilon > 0$, 对 $1 \leqslant q \leqslant x$ 一致地有

$$\sum_{n \leqslant x} |\tau(n;\chi)|^2 = xP(\ln x, \chi) + O(q^{3/14} x^{11/14+\varepsilon}),$$

其中 $P(Y,\chi)$ 关于 Y 是一阶多项式, 并具体地将它表示为

$$a(\chi) := \frac{6}{\pi^2} |L(1,\chi)|^2 \prod_{p|q} (1 + 1/p)^{-1},$$

$$b(\chi) := \sum_{p|q} \frac{\ln p}{p+1} + 2\gamma - 1 - \frac{2\zeta'(2)}{\zeta(2)} + 2\Re e \frac{L'(1,\chi)}{L(1,\chi)}$$

的函数. 回顾当 $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$, $1 \leqslant |\tau| \leqslant T$ 时, $\zeta(s) \ll T^{(1-\sigma)/3+\varepsilon}$.

(e) 从前述推出关于 $1 \leqslant q \leqslant x$ 的渐近公式[10]

$$\sum_{n \leqslant x} \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q \\ (a,q)=1}} \left\{ \tau(n;a,q) - \frac{\tau_q(n)}{\varphi(q)} \right\}^2 = A_q x \ln x + B_q x + O_\varepsilon\left(x^{11/14+\varepsilon} q^{3/14}\right),$$

其中 $A_q := \dfrac{6 g_q(1)}{\pi^2 \varphi(q)} \displaystyle\sum_{\chi \neq \chi_0} |L(1,\chi)|^2$,

$$B_q := A_q \left\{ \sum_{p|q} \frac{\ln p}{p+1} + 2\gamma - 1 - \frac{2\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right\} + \frac{12 g_q(1)}{\pi^2 \varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \Re e\, L'(1,\chi) L(1,\overline{\chi}).$$

---

[10] Hall (1970, 1971b) 得到更细的余项 $\ll (qx)^{1/2+\varepsilon}$.

242. 设 $W(x) := \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\mu(n+1)^2$ $(x\geqslant 1)$. 将 $W(x)$ 用 $\psi(x;-1,d^2)$, $d\leqslant\sqrt{x+1}$ 来表示. 利用定理 8.34, 推出 $W(x)$ 的一个渐近公式, 然后推出使得 $p+1$ 无平方因子的素数 $p\leqslant x$ 个数 $\pi_0(x)$ 的一个渐近公式.

243. 用 χ_4 表示模 4 唯一的非主 Dirichlet 特征. 回顾 $L(1,\chi_4)=\pi/4$.

(a) 证明对任意 $n\geqslant 1$, 有 $\tau(n)=2\sum_{\substack{d|n\\ d\leqslant\sqrt{n}}}1+O(1)$.

(b) 令 $\varrho(d)$ 为同余方程 $n^2+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)$ 解的个数. 证明 $\sum_{n\geqslant 1}\varrho(n)/n^s=\zeta(s)L(s,\chi_4)/\zeta(2s)$. 确定收敛区域.

(c) 用某 Tauber 型定理, 推出与 $R(x):=\sum_{d\leqslant x}\varrho(d)/d$ 渐近等价的一个函数.

(d) 令 $S(x):=\sum_{d\leqslant x}\varrho(d)$. 证明

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n^2+1)=2xR(x)+O\big(x+S(x)\big). \tag{8.102}$$

(e) 证明 $\varrho\leqslant\lambda*1$, 其中 λ 是使得 $p=2$ 或 $p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)$ 时 $\lambda(p)=1$, $p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)$ 时 $\lambda(p)=0$ 的完全乘性函数.

(f) 证明在 $h:=1/\ln x$ 的记号下 $\sum_{p\leqslant x}c_p/p=\sum_p c_p/p^{1+h}+O(1)$ 对任意有界序列 $\{c_p\}_p$ 成立. 用 (c) 和 (d) 中已得到的结果推出关系 $x+S(x)=o(xR(x))$ 的一个初等证明.

(g) 用一个 Selberg–Delange 型的定理证明

$$S(x)=Cx+O(x/\ln x)\qquad(x\to\infty),$$

其中 C 是正常数, 并确定常数 C 的值. 推出 (8.102) 左边的一个渐近公式.

244. *整数表示成两个平方数之和的方法数.* 保留习题 243 中 χ_4 和 ϱ 的记号, 并记 $r(n)$ 为将整数 $n\in\mathbb{N}^*$ 写成两个整数平方和 a^2+b^2 的方法数. 令 $r^+(n)$ 为附加条件 $(a,b)=1$ 及 $a\in\mathbb{N}^*$, $b\in\mathbb{N}^*$ 以后的表示方法数; 记 $r^*(n)$ 为使得 $(a,b)=1$, $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{Z}$ 的表示方法数. 最后, 对 $n\in\mathbb{N}^*$ 及 $x\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, 记 $\overline{x}$ 为 x 的模 n 逆剩余类.

(a) 用第一部分恒等式 (4.88) 证明对任意 $n\in\mathbb{N}^*$, 若数对 (a,b) 和 (A,B) 均计入 $r^+(n)$ 中, 且 $a\overline{b}\equiv A\overline{B}\,(\mathrm{mod}\,n)$, 那么有 $a=A$ 及 $b=B$. 推出 $r^+(n)\leqslant\varrho(n)$.

(b) 设 $x\in[0,n[$ 为使得 $x^2+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,n)$ 的整数. 对 $Q:=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, 应用第一部分 Dirichlet 逼近定理 7.1 于 $\vartheta:=x/n$, 构造计入 $r^+(n)$ 的数对 (a,b). 推出恒等式 $r^+(n)=\varrho(n)$.

(c) 证明对任意 $n\in\mathbb{N}^*$ 有 $r^*(n)=4\varrho(n)$.

(d) 证明对任意 $n\in\mathbb{N}^*$ 有 $r(n)=4\sum_{d^2|n}\varrho(n/d^2)$. 利用习题 243 (b)

中证明的公式推出

$$r(n) = 4\sum_{d|n}\chi_4(d) \qquad (n \geqslant 1). \tag{8.103}$$

第三部分
概率方法

第一章　密率

---

§1.1　定义, 自然密率

与其他数学分支相同 (也许更甚), 数论中常遇到如何严格表述直观概念的问题. 比如 “*某整数在给定的数列中出现的概率*” 的思想就是其中之一. 这便涉及到要赋予形如 “一半的整数是偶数”, “绝大多数整数不是两个数的平方和” 等的断言以数学意义.

第一个浮现于脑海的方法自然是借助于概率论. 给定 $\mathbb{N}^*$ 上的一个概率测度后便可以对整数集的任意子集 $\mathcal{A}$ 赋以一个概率. 然而, 以下结论说明了这样的理论与关于数的最强烈的直观印象之一从根本上讲是矛盾的: 后者说被 $a \geqslant 1$ 整除的整数所占的比例恰是 $1/a$.

定理 1.1　*对 $a \in \mathbb{N}^*$, 令 $a\mathbb{N}^*$ 为 a 的正倍数之集. 不存在 $\mathbb{N}^*$ 上的概率 P, 使得*

$$P(a\mathbb{N}^*) = 1/a \qquad (a = 1, 2, \ldots).$$

证明　用反证法. 由于 $(a,b) = 1$ 时,

$$a\mathbb{N}^* \cap b\mathbb{N}^* = ab\mathbb{N}^*,$$

可知在此假设下事件 $a\mathbb{N}^*$ 和 $b\mathbb{N}^*$ 独立. 于是其补集 $\mathbb{N}_a$ 和 $\mathbb{N}_b$ 亦然, 其中记 $\mathbb{N}_a := \mathbb{N}^* \setminus a\mathbb{N}^*$. 从而当 $(a,b) = 1$ 时,

$$P(\mathbb{N}_a \cap \mathbb{N}_b) = \Big(1 - \frac{1}{a}\Big)\Big(1 - \frac{1}{b}\Big),$$

迭代后立知对所有整数 $m, n, m < n$ 有

$$P(\{m\}) \leqslant P\Big(\bigcap_{m<p\leqslant n} \mathbb{N}_p\Big) = \prod_{m<p\leqslant n} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big).$$

由于 n 可任意大, 由 Mertens 定理知对任意 $m \geqslant 1$ 有 $P(\{m\}) = 0$, 此即所寻求的矛盾. □

$\mathbb{N}^*$ 上的概率测度等价于和为 1 的正项级数, 即

$$\sum_{n\geqslant 1} \lambda_n = 1,$$

其中对任意 n, $0 \leqslant \lambda_n \leqslant 1$. 于是对任意整数列[①] $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}^*$, 有

$$P(\mathcal{A}) = \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a.$$

注意到该序列的概率实际只依赖于前面几项, 从中也可理解这样的模型与直观不相容之处. 实际上, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在某 $N = N_\varepsilon$, 使得

$$P\big(\{1, 2, \ldots, N\}\big) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

于是我们处于一个典型状况: 唯一可行的理论无可挽回地排除了自然的两个 "定理": 即

(i) $P(a\mathbb{N}^*) = 1/a \qquad (a = 1, 2, \ldots)$,

(ii) $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{B}) \qquad (|\mathcal{A}\Delta\mathcal{B}| < \infty)$,

其中 $\mathcal{A}\Delta\mathcal{B}$ 表示 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的对称差. 一旦选择在理论中倾向于直观定理 (这在数学史中常见), 不难绕过前述的困难. 引进通项 $\geqslant 0$ 的发散级数

$$\sum_{n\geqslant 1} \lambda_n = \infty,$$

并定义子集 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}^*$ 的密率 $d(\mathcal{A})$ 为 $x \to \infty$ 时比值

$$d(\mathcal{A}; x) := \sum_{a\leqslant x,\, a\in\mathcal{A}} \lambda_a \Big/ \sum_{n\leqslant x} \lambda_n \tag{1.1}$$

的极限 (如果极限存在). 于是所有有限子集密率均为零, 但这样提出的概念并不是 $\mathbb{N}^*$ 上的测度:

(iii) 具有密率的子集不构成 σ-代数,

(iv) 密率不是可列可加的.

① 通常在概率数论中数列指正整数的严格单调上升列, 亦可视为 $\mathbb{N}^*$ 的子集.

最简单的选择是对任意 $n \geqslant 1$ 令 $\lambda_n = 1$. 这样得到的密率有两种习惯名称: 自然密率或渐近密率. 若 $\mathcal{A}$ 的密率存在, 那么它由关系式

$$\mathbf{d}\mathcal{A} := \lim_{x\to\infty} x^{-1}\big|\{a \leqslant x : a \in \mathcal{A}\}\big| \tag{1.2}$$

给出. 将 (1.2) 中的符号 lim 换成 lim sup (相应地, lim inf) 而得到的值分别称为上 (相应地, 下) 自然 (或渐近) 密率, 记作 $\overline{\mathbf{d}}\mathcal{A}$ (相应地, $\underline{\mathbf{d}}\mathcal{A}$).

深入介绍之前, 先作四个简单的观察.

(a) 所有算术数列 $n \equiv a \pmod q$ 具有等于 $1/q$ 的自然密率. 这因为此时有

$$\big|\{a \leqslant x : a \in \mathcal{A}\}\big| = \lfloor x/q \rfloor + O(1).$$

前述直观性质 (i) 于是成立.

(b) 单调上升列 $a_1 < a_2 < \cdots$ 有密率 α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} n/a_n = \alpha. \tag{1.3}$$

显然条件是充分的. 注意到若 $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ 有自然密率 α, 则

$$n = \big|\{j : a_j \leqslant a_n\}\big| = \big\{\alpha + o(1)\big\}a_n \qquad (n \to \infty).$$

从而该条件也是必要的.

(c) 存在不具有密率的整数列. 例如考虑十进制首项数字为 1 的整数 n 构成的序列 $\mathcal{A}$. 有

$$\mathcal{A} := \bigcup_{k=0}^{\infty} \big\{n : 10^k \leqslant n < 2{\cdot}10^k\big\}. \tag{1.4}$$

令 $A(x) := \big|\mathcal{A} \cap [1, x]\big|$, 可知对 $m \geqslant 1$ 有

$$A(10^m - 1) = \sum_{0\leqslant k<m} 10^k = \tfrac{1}{9}(10^m - 1),$$

$$A(2{\cdot}10^m - 1) = \tfrac{1}{9}(10^m - 1) + 10^m = \tfrac{5}{9}(2{\cdot}10^m - 1) + \tfrac{4}{9}.$$

从中容易得出

$$\underline{\mathbf{d}}\mathcal{A} = \tfrac{1}{9}, \qquad \overline{\mathbf{d}}\mathcal{A} = \tfrac{5}{9}.$$

(d) 可以定义密率论和概率论之间的形式联系. 在自然密率的情形, 只需观察到若 ν_N 表示 $\mathbb{N}^*$ 上前 N 个整数中每个元素均具权重 $1/N$ 的概率测度, 那么在极限存在的前提下有

$$\mathbf{d}\mathcal{A} = \lim_{N\to\infty} \nu_N(\mathcal{A}).$$

这解释了为何自然密率满足直观条件: 一个序列的密率等于它在前 N 个整数中的频率的极限.

§1.2 对数密率

除自然密率外, 最常见的便是对 $n \geqslant 1$ 选择 $\lambda_n = 1/n$. 如此定义的概念称为 *对数密率*. 传统的记号是 $\delta\mathcal{A}$, 即在极限存在的前提下令

$$\delta\mathcal{A} := \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{a\leqslant x,\, a\in\mathcal{A}} \frac{1}{a}. \tag{1.5}$$

用显然的方式定义上对数密率 $\overline{\delta}\mathcal{A}$ 及下对数密率 $\underline{\delta}\mathcal{A}$.

容易构造不具有对数密率的序列. 下列定理说明了应在不具有自然密率的数列中寻找这样的例子.

定理 1.2 *对任意序列 $\mathcal{A}$, 有*

$$\underline{\mathbf{d}}\mathcal{A} \leqslant \underline{\delta}\mathcal{A} \leqslant \overline{\delta}\mathcal{A} \leqslant \overline{\mathbf{d}}\mathcal{A}. \tag{1.6}$$

特别地, 倘若序列 $\mathcal{A}$ 有自然密率, 那么 $\mathcal{A}$ 也有对数密率, 且这两个密率相等.

证明 令 $A(x) := \sum_{a\leqslant x} 1$ 及 $L(x) := \sum_{a\leqslant x} 1/a$, 其中 a 表示 $\mathcal{A}$ 中的元素. 由 Abel 求和法, 有

$$L(x) = \frac{A(x)}{x} + \int_1^x \frac{A(t)}{t^2}\mathrm{d}t \qquad (x \geqslant 1). \tag{1.7}$$

令 $\varepsilon > 0$. 存在 $t_0 = t_0(\varepsilon)$, 使得

$$\underline{\mathbf{d}}\mathcal{A} - \varepsilon \leqslant A(t)/t \leqslant \overline{\mathbf{d}}\mathcal{A} + \varepsilon \qquad (t > t_0).$$

代入 (1.6), 得对于 $x > t_0$ 有

$$\big(\underline{\mathbf{d}}\mathcal{A} - \varepsilon\big)\ln\big(x/t_0\big) \leqslant L(x) \leqslant 1 + \ln t_0 + \big(\overline{\mathbf{d}}\mathcal{A} + \varepsilon\big)\ln\big(x/t_0\big).$$

先令 x 趋于 $+\infty$ 再让 ε 趋于 0 便得到前述结论. □

定理 1.2 的逆命题不真：对数密率的存在性绝不能推出自然密率的存在性. 一个反例就是序列 (1.4). 以下计算说明了它具有对数密率 $\delta\mathcal{A} = \ln 2/\ln 10$. 易知

$$\begin{aligned} L(x) = \sum_{a\leqslant x}\frac{1}{a} &= \sum_{0\leqslant k\leqslant \ln x/\ln 10}\ \sum_{\substack{10^k\leqslant n<2\cdot 10^k \\ n\leqslant x}} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant \ln x/\ln 10} \Big\{\ln 2 + O\Big(\frac{1}{k+1}\Big)\Big\} + O(1) = \frac{\ln 2}{\ln 10}\ln x + O(\ln_2 x). \end{aligned}$$

§1.3 解析密率

可以形式地推广 §1.1 中描述的定义整数列密率的方法. 不考虑某发散序列 $\sum_{n\geqslant 1}\lambda_n$ 的截断, 而考虑一个 $\mathbb{N}^*$ 上概率分布的连续族 $(P_\sigma)_{\sigma\in S}$, 并令

$$P_\sigma(\{n\}) =: \lambda_n(\sigma)\Big/\sum_{m\geqslant 1}\lambda_m(\sigma),$$

其中每个级数 $\sum_{m\geqslant 1}\lambda_m(\sigma)$ $(\sigma\in S)$ 均收敛. 另给一个 S 的聚点 σ_0, 不属于 S, 使得级数 $\sum_{m\geqslant 1}\lambda_m(\sigma_0)$发散, 其通项由连续性定义. 然后定义 $d(\mathcal{A})$ 为比值

$$P_\sigma(\mathcal{A}) = \sum_{n\in\mathcal{A}}\lambda_n(\sigma)\Big/\sum_{m\geqslant 1}\lambda_m(\sigma) \tag{1.8}$$

当 σ 在 S 中趋于 σ_0 时可能的极限. §1.1 的情形对应于 $S :=]0,1]$, $\sigma_0 := 0$, 且

$$\lambda_n(\sigma) := \begin{cases}\lambda_n, & \text{若 } n\leqslant 1/\sigma,\\ 0, & \text{若 } n > 1/\sigma.\end{cases}$$

级数 $\sum_{m\geqslant 1}\lambda_m(\sigma)$ 在 $\sigma\in S$ 处的收敛性表明, 对每个 $\varepsilon>0$, 存在整数 $N = N(\varepsilon,\sigma)$, 使得

$$P_\sigma(\mathcal{A}) = \Big(\sum_{n\leqslant N,\, n\in\mathcal{A}}\lambda_n(\sigma)\Big/\sum_{m\leqslant N}\lambda_m(\sigma)\Big) + \vartheta\varepsilon,$$

其中 $|\vartheta|\leqslant 1$. 选取 $\varepsilon=\varepsilon(\sigma)$, 使得 $\sigma\to\sigma_0$ 时 $\varepsilon=\varepsilon(\sigma)\to 0$, 便归结到与第一节中类似的一个定义, 但这里函数 λ_n 还与 x 有关. 在一些情形下, 用 Tauber 型技巧可证明存在严格具有类型 (1.1) 的等价构造. 即便在这样的情形下, 该构造亦有可取之处: 善选级数 $\sum\lambda_n(\sigma)$ 后, 不用 (1.1) 而用 (1.8) 往往可明显地简化计算或有利于应用分析技巧. 这是用更正则的过程代替截断之故.

基本的例子是取 $S=]1,\infty[$, $\sigma_0 = 1$ 及 $\lambda_n(\sigma) = 1/n^\sigma$ $(n\geqslant 1)$. 于是

$$P_\sigma(\mathcal{A}) = \frac{1}{\zeta(\sigma)}\sum_{n\in\mathcal{A}}\frac{1}{n^\sigma}. \tag{1.9}$$

这里出现了$\mathcal{A}$ 的示性函数对应的 Dirichlet 级数, 从而开辟了利用 Dirichlet 级数的所有解析和代数性质, 特别是用关于卷积的性质来计算密率的可能性.

将 $\sigma\to 1+$ 时表达式 (1.9) 可能的极限称作序列 $\mathcal{A}$ 的**解析密率**. 注意到可考虑替代 (1.9) 的量

$$(\sigma-1)\sum_{n\in\mathcal{A}}\frac{1}{n^\sigma}, \tag{1.10}$$

但当涉及 Euler 乘积时, 往往保留因子 $1/\zeta(\sigma)$ 更为有利.

以下定理具体给出了解析密率与形如 (1.1) 的密率之间预期的联系.

定理 1.3 设 $\mathcal{A}$ 为整数列. 那么 $\mathcal{A}$ 有解析密率当且仅当 $\mathcal{A}$ 有对数密率. 在此情形下, 两种密率相等.

证明 保留记号 $L(x) = \sum_{a \leqslant x} 1/a$, 其中 a 表示 $\mathcal{A}$ 中的元素. 由 Abel 求和法, 有

$$(1.11) \qquad (\sigma - 1)\sum \frac{1}{a^\sigma} = (\sigma - 1)^2 \int_1^\infty \frac{L(x)}{x^\sigma}\mathrm{d}x \qquad (\sigma > 1).$$

先设 $\mathcal{A}$ 具有对数密率 $\delta = \boldsymbol{\delta}\mathcal{A}$, 亦即

$$L(x) = \{\delta + o(1)\} \ln x \qquad (x \to \infty).$$

代入 (1.11) 的第二部分, 得

$$(1.12) \qquad (\sigma - 1)\sum \frac{1}{a^\sigma} = \delta + o(1) \qquad (\sigma \to 1+),$$

故 $\mathcal{A}$ 具有解析密率, 等于 δ.

反过来, 若 (1.12) 成立, 则可将 (1.11) 写成如下形式

$$h\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ht}\mathrm{d}L(\mathrm{e}^t) = h^2 \int_1^\infty L(x)\frac{\mathrm{d}x}{x^{1+h}} = \delta + o(1) \qquad (h \to 0+),$$

其中 $h := \sigma - 1$. Karamata 定理 7.5 于是推出

$$L(\mathrm{e}^t) = \{\delta + o(1)\}t \qquad (t \to \infty),$$

这与要证的命题等价. □

§1.4 概率数论

前面各节引进的概念构成了数论一个原创性的分支的基石. 其关键概念是自然密率, 它为数论函数带来了新的光明前景.

这些函数的一个特点是其起伏根本上不正则且无规律可循, 这使得传统的分析方法经常不能有效地描述其性态. 在这样的形势下概率数论满足了从统计上进行研究的需求. 除给出大致分类的均阶和极阶以外, 还将定义 (见第三章) 数论函数正规阶的概念, 用以反映几乎必然的性态. 实际操作中则归结为研究在密率为零的点集 (显然这依赖于考虑的函数) 以外的函数值, 以排除反常点. 在看起来是混沌占统治地位的地方突然出现了规律和正则性, 从这个意义上来看结论是令人震撼的. 几乎处处的棱镜于是折射出了新的探索领域, 具有独特的方法和特别的结果.

正如 Delange (1982) 所指出的, 其实更应该说是数论函数的概率理论. 一般 (见 §1.1 注 (d)) 将数论函数 f 看成前 N 个整数构成的赋均匀分布的概率空间上的随机变量. 其基本问题便是确定在何种意义下可说当 $N \to \infty$ 时 f 的分布律收敛到某极限分布. 以下各章将详细说明之.

注记

§1.1–§1.3 文献中有整数列许多其他类型的密率的定义. 这里仅限于提及其中三种.

(a) Davenport 和 Erdős (1951) 的乘性密率, 与 $\mathcal{A}$ 在各种 $\mathbb{N}^*$ 除去含大素因子后得到的子集中的分布有关, 见习题 246.

(b) Schnirelmann (1930) 密率, 定义为 $\sigma(\mathcal{A}) = \inf_{n\geqslant 1} A(n)/n$. 它与序列的和有关. 若定义

$$\mathcal{A}+\mathcal{B} := \{a+b : a\in\mathcal{A},\, b\in\mathcal{B}\},$$

Mann (1942) 一个重要的定理断言

$$\sigma(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \geqslant \min\big\{1, \sigma(\mathcal{A})+\sigma(\mathcal{B})\big\}. \tag{1.13}$$

在 Halberstam 和 Roth (1983) 第一章 §4 中有 (1.13) 相当简单的证明.

(c) Hall (1978) 的因子密率. 若它存在, 则是满足

$$\sum_{d\mid n,\, d\in\mathcal{A}} 1 = \big(\mathbf{D}\mathcal{A}+o(1)\big)\tau(n) \qquad \text{a.e.}$$

的唯一的 $\mathbf{D}\mathcal{A}$, 其中记号 a.e. 表示该关系当 n 在某适当的自然密率为 1 的子集中趋于无穷时成立. 这与 §1.1–§1.3 中的定义相去甚远. 比如, 对任意 $[0,1]$ 中的 α, β, 可找到序列 $\mathcal{A}$, 使得 $\mathbf{d}\mathcal{A}=\alpha$, $\mathbf{D}\mathcal{A}=\beta$ (Hall, 1978). 另外的性质见 Hall (1981), Tenenbaum (1982), Dupain, Hall 和 Tenenbaum (1982), 以及 Hall 和 Tenenbaum (1986). 也见习题 272 及习题 273.

§1.3 Nanopoulos (1975, 1977, 1982) 对相应于分布律 $P_\sigma(\mathcal{A})$ 的数论函数的性质作了更深刻的研究.

习题

回顾用 $P^+(n)$ 表示整数 n 最大的素因子, 并约定 $P^+(1)=1$. 除习题 252 外, 对 $y\geqslant 2$, $\mathcal{A}\subseteq\mathbb{N}^*$, 令

$$\mathcal{A}_y := \mathcal{A}\cap\{n : P^+(n)\leqslant y\}.$$

对每个整数 $j\geqslant 1$, 用 $\mathcal{A}^{(j)}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中最小的 j 个整数的有限列, 并约定 $\mathcal{A}^{(0)}=\varnothing$.

245. 对 $n\geqslant 1$, 令 $n_y := \max\{d : d\mid n,\, P^+(d)\leqslant y\}$. 设 $\mathcal{A}\subseteq\mathbb{N}^*$ 为整数列, 使得对适当的 $y\geqslant 2$ 有 $\mathcal{A}=\{n : n_y\in\mathcal{A}_y\}$. 证明对 $s\in\mathbb{C}$, $\sigma>1$, 有

$$\sum_{n\in\mathcal{A}}\frac{1}{n^s} = \zeta(s)\prod_{p\leqslant y}\big(1-p^{-s}\big)\sum_{a\in\mathcal{A}_y}a^{-s}.$$

推出 $\mathbf{d}\mathcal{A}$ 的存在性以及公式

$$\mathbf{d}\mathcal{A} = \prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{a\in\mathcal{A}_y}\frac{1}{a}.$$

246. 乘性密率 (Davenport 和 Erdős, 1951)

对 $y\geqslant 2$, $\mathcal{A}\subseteq\mathbb{N}^*$, 令

$$\mathbf{m}_y\mathcal{A} := \prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{a\in\mathcal{A}_y}\frac{1}{a}.$$

倘若当 $y\to\infty$ 时 $\mathbf{m}_y\mathcal{A}$ 收敛于极限 $\mathbf{m}\mathcal{A}$, 则称 $\mathbf{m}\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 的乘性密率. 又记

$$\overline{\mathbf{m}}\mathcal{A} := \limsup_{y\to\infty}\mathbf{m}_y\mathcal{A}, \qquad \underline{\mathbf{m}}\mathcal{A} := \liminf_{y\to\infty}\mathbf{m}_y\mathcal{A}.$$

(a) 证明对任意 $\mathcal{A}$ 有 $0\leqslant\underline{\mathbf{m}}\mathcal{A}\leqslant\overline{\mathbf{m}}\mathcal{A}\leqslant 1$.

(b) 证明对任意序列 $\mathcal{A}$ 有 $\overline{\boldsymbol{\delta}}\mathcal{A}\leqslant \mathrm{e}^{\gamma}\overline{\mathbf{m}}\mathcal{A}$.

(c) 令$\mathcal{A} := \{n\geqslant 1 : P^+(n)\leqslant\sqrt{n}\}$. 证明

$$\mathbf{d}\mathcal{A} = 1-\ln 2, \qquad \mathbf{m}\mathcal{A} = 1-\mathrm{e}^{-\gamma}.$$

247. 倍数集的序贯密率.[②]

设 $\mathcal{A}$ 为整数集. 其倍数集 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ 是 $\mathbb{N}^*$ 的形如 $\mathcal{M}(\mathcal{A})=\{am : a\in\mathcal{A}, m\geqslant 1\}$ 的子集.[③]

(a) 证明 $\mathcal{M}_j := \mathcal{M}(\mathcal{A}^{(j)})\setminus\mathcal{M}(\mathcal{A}^{(j-1)})$ 对于每个 $j\geqslant 1$ 具有自然密率 $\mathbf{d}\mathcal{M}_j = \Delta_j(\mathcal{A})$, 形如

$$\Delta_j(\mathcal{A}) := \frac{1}{a_j} + \sum_{1\leqslant k\leqslant j-1}(-1)^k\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant j-1}\frac{1}{[a_{i_1},\ldots,a_{i_k},a_j]},$$

其中 a_j 表示 $\mathcal{A}$ 的第 j 个元素.

(b) 证明 $\Delta(\mathcal{A}) := \sum_{j\geqslant 1}\Delta_j(\mathcal{A})$ 有限, 并满足 $0\leqslant\Delta(\mathcal{A})\leqslant 1$. 将 $\Delta(\mathcal{A})$ 称为倍数集 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ 的序贯密率.

(c) 证明若 $\sum_{j\geqslant 1}a_j^{-1}<\infty$, 则 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ 具有自然密率, 且 $\mathbf{d}\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \Delta(\mathcal{A})$.

248. 设 $\mathcal{A}\subseteq\mathbb{N}^*$, $y\geqslant 2$.

(a) 由习题 245 和习题 247 的结论得出

$$\mathbf{d}\mathcal{M}(\mathcal{A}_y) = \Delta(\mathcal{A}_y) = \mathbf{m}_y\mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

(b) 证明 $\mathbf{m}_y\mathcal{M}(\mathcal{A})$ 是 y 的单调上升函数.

---

② 见 Davenport 和 Erdős (1951).

③ 见 Halberstam 和 Roth (1966), Erdős, Hall 和 Tenenbaum (1994).

(c) 设 $j \geqslant 1$. 证明当 y 足够大时有 $\Delta_j(\mathcal{A}_y) = \Delta_j(\mathcal{A})$. 推出 $\mathbf{m}\mathcal{M}(\mathcal{A}) \geqslant \Delta(\mathcal{A})$.

(d) 证明 $\Delta(\mathcal{A}_y) \leqslant \Delta(\mathcal{A})$. 推出 $\mathbf{m}\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \Delta(\mathcal{A})$, 也就是说: 所有倍数集都有乘性密率, 等于其序贯密率. (Davenport–Erdős, 1951).

249. Davenport 和 Erdős (1951) 定理.

设 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}^*$, $y \geqslant 2$.

(a) 由习题 245 推出 $\mathbf{d}\mathcal{M}(\mathcal{A}_y) = \mathbf{m}_y\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

(b) 设 $x > y$. 证明

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{M}(\mathcal{A})\setminus\mathcal{M}(\mathcal{A}_y)\\ P^+(n)\leqslant x}} \frac{1}{n} = \prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\left\{\mathbf{m}_x\mathcal{M}(\mathcal{A}) - \mathbf{m}_y\mathcal{M}(\mathcal{A})\right\}.$$

(c) 利用习题 248 中的结论证明

$$\overline{\boldsymbol{\delta}}\mathcal{M}(\mathcal{A}) \leqslant \mathbf{m}\mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

(d) 证明 $\mathbf{m}\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \boldsymbol{\delta}\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \Delta(\mathcal{A}) = \underline{\mathbf{d}}\mathcal{M}(\mathcal{A})$, 亦即：任意倍数集具有对数密率, 等于其下自然密率, 以及其乘性密率和序贯密率.④

250. Davenport 和 Erdős 定理 (1937 年的证明).

设 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}^*$. 对 $j \geqslant 1$, 用 $\vartheta_j(n)$ 表示集合 $\mathcal{M}_j := \mathcal{M}(\mathcal{A}^{(j)}) \setminus \mathcal{M}(\mathcal{A}^{(j-1)})$ 的示性函数, 并令 $\Theta_j(n) := \sum_{1\leqslant i\leqslant j}\vartheta_i(n)$. 引进 Dirichlet 级数

$$F_j(s) := \sum_{n\geqslant 1}\frac{\vartheta_j(n)}{n^s}, \qquad F(s) := \sum_{j\geqslant 1}F_j(s) = \sum_{n\in\mathcal{M}(\mathcal{A})}\frac{1}{n^s},$$

$$G_j(s) := F_j(s)/\zeta(s), \qquad G(s) := F(s)/\zeta(s).$$

(a) 证明对 $n \geqslant 1$, $j \geqslant 1$, 有

$$\Theta_j(n)\ln n \geqslant \sum_{d|n}\Theta_j(d)\Lambda(n/d).$$

由此推出 $\sum_{1\leqslant i\leqslant j} G_i(\sigma)$ 是 $\sigma > 1$ 的单调下降函数.

(b) 用习题 247 的记号, 证明 $G_j(1) = \Delta_j(\mathcal{A})$.

(c) 证明 $\lim_{\sigma\to 1+} G(\sigma) = \Delta(\mathcal{A})$.

(d) 证明 $\boldsymbol{\delta}\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \Delta(\mathcal{A}) \geqslant \underline{\mathbf{d}}\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

(e) 证明对每个 $j \geqslant 1$ 有 $\underline{\mathbf{d}}\mathcal{M}(\mathcal{A}) \geqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant j}\Delta_i(\mathcal{A})$. 推出 $\underline{\mathbf{d}}\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \Delta(\mathcal{A})$.

---

④ 倍数集未必有自然密率, 见习题 271.

251. Rényi (1955) 的一个定理.

设 $z \in \mathbb{C}$. 令 $\varphi_z(n) := z^{\Omega(n)-\omega(n)}$, $\lambda_z(n) := (\varphi_z * \mu)(n)$.

(a) 证明对 $|z| < 2$ 有 $\sum_{n\geqslant 1} |\lambda_z(n)|/n < +\infty$.

(b) 推出计算 $\sum_{n\leqslant x} \varphi_z(n)$ 的公式.

(c) 证明对每个整数 $k \geqslant 0$, 序列 $\{n : \Omega(n) - \omega(n) = k\}$ 具有自然密率 d_k, 并且可利用关系

$$\sum_{k\geqslant 0} d_k z^k = \frac{6}{\pi^2} \prod_p \left(\frac{1 - z/(p+1)}{1 - z/p}\right) \qquad (|z| < 2)$$

来计算它.

252. $\mathbb{N}^*$ 的直因子. 若 $\mathbb{N}^*$ 的子集 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 满足 $1 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ 且使得每个整数 $n > 1$ 可唯一地分解为 $n = ab$, 其中 $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ (此时记 $a = \pi_A(n)$, $b = \pi_B(n)$), 则称之为一对直因子. 约定 $\pi_A(1) = \pi_B(1) = 1$. 对于 $y \geqslant 2$ 及 $n \geqslant 1$, 记 n_y 为 n 的不含 $> y$ 素因子的最大约数, 即 $n_y := \prod_{p^\nu \| n,\, p\leqslant y} p^\nu$, 并令

$$\mathcal{A}_y := \{n : n \in \mathbb{N}^*, n_y \in \mathcal{A}\}, \ A_y(x) := |\mathcal{A}_y \cap [1, x]|, \ A(x) := |\mathcal{A} \cap [1, x]|.$$

在习题中, a (相应地, b) 总代表 $\mathcal{A}$ (相应地, $\mathcal{B}$) 中的元素, 其中 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 为给定的 $\mathbb{N}^*$ 的一对直因子.

(a) 证明对每个 $y \geqslant 2$ 均有

$$\sum_{P^+(a)\leqslant y} \frac{1}{a} \sum_{P^+(b)\leqslant y} \frac{1}{b} = \prod_{p\leqslant y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

(b) 证明 $\mathbf{d}\mathcal{A}_y$ 的存在性以及公式

$$\mathbf{d}\mathcal{A}_y = \left(\sum_{P^+(b)\leqslant y} \frac{1}{b}\right)^{-1}.$$

(c) 设 $\varphi_y : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_y$, 定义为 $\varphi_y(a) = \pi_A(a_y)a/a_y$. 证明若 $\varphi_y(a) = \varphi_y(a')$ 则 $a\pi_B(a'_y) = a'\pi_B(a_y)$. 推出 φ_y 是单射, 并证明对 $x \geqslant 1$, $y \geqslant 2$ 有 $A(x) \leqslant A_y(x)$.

(d) 证明若 $\sum 1/b = \infty$ 则 $\mathbf{d}\mathcal{A} = 0$.

(e) 假设 $\sum 1/b < +\infty$. 令 α, β 分别为 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 的示性函数. 证明 $\alpha = \mathbf{1} - \alpha * (\beta - \delta)$. 用问题 (c) 的结论推出对 $y \geqslant 2$ 有

$$\underline{\mathbf{d}}\mathcal{A} \geqslant \left(\sum_{P^+(b)\leqslant y} \frac{1}{b}\right)^{-1} \left(1 - \sum_{P^+(b)>y} \frac{1}{b}\right).$$

(f) 证明 $\mathcal{A}$ 具有形如

$$\mathbf{d}\mathcal{A}=\Big(\sum_{b\in\mathcal{B}}\frac{1}{b}\Big)^{-1}$$

的自然密率, 其中当级数发散时将右边的部分看作 0.[5]

[5] 这是 Saffari (1976) 及 Erdős, Saffari 和 Vaughan (1979) 的结果. 这里提及的基本上是 Daboussi (1979) 的证明.

第二章　数论函数的分布律

§2.1　定义, 分布函数

在上章中看到, 可将概率数论想象成赋均匀分布 ν_N 的概率空间 $\Omega_N := \{n : 1 \leqslant n \leqslant N\}$ 的渐近性研究. 在这样的背景下, 数论函数等同于一列随机变量

$$f_N = (f, \nu_N) \qquad (N = 1, 2, \ldots)$$

以概率 $1/N$ 取值 $f(n)$, $1 \leqslant n \leqslant N$. 我们将从这个角度出发研究概率论中经典的分布函数概念.

回顾 (见第二部分第七章) 所谓分布函数是指单调上升右连续函数 $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, 满足 $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

如此 F 的不连续点集 $\mathcal{D}(F)$ 至多是可数集, 且它只有第一类不连续点. 用 $\mathcal{C}(F)$ 表示 $\mathcal{D}(F)$的补集, 也就是 F 的连续点集. 将使得 $F(z+\varepsilon) - F(z-\varepsilon) > 0$ 对所有 $\varepsilon > 0$ 成立的实数 z 称为 F 的增长点. 不连续点一定是增长点, 但反之并不然.

令 $\mathcal{D}(F) = \{z_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ 及 $s_\nu := F(z_\nu) - F(z_\nu-)$. 函数

$$\Phi(z) = \sum_{z_\nu \leqslant z} s_\nu$$

总以跳跃式增长, 且在任意不含 z_ν 的闭区间上为常数. 倘若 $\mathcal{D}(F)$ 非空, 差一个数乘下 Φ 是分布函数. 这样的分布函数称为纯离散型或原子性的. 容易验证 $F - \Phi$ 连续.

倘若 F 等于在唯一点跳跃的函数, 即

$$F(z) = \begin{cases} 0, & \text{若 } z < z_0, \\ 1, & \text{若 } z \geqslant z_0, \end{cases}$$

则称之为退化的 (或退化分布的分布函数).

连续分布函数一个简单的例子是形如

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} h(t)\,\mathrm{d}t$$

的函数, 其中 $h \geqslant 0$ 是 Lebesgue 可积函数, 且满足 $\|h\|_1 = 1$. 此时则称 F 绝对连续. Radon–Nikodym 定理 (可见 Rudin (1970), 定理 6.9) 说明所有连续分布函数可写成

$$c_0 F_0 + c_1 F_1$$

的形式, 其中 F_0 绝对连续, F_1 纯奇异, 也就是说, 连续且使得

$$\int_{\mathcal{N}} \mathrm{d}F_1(z) = 1,$$

其中 $\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{R}$ 中某 Lebesgue 零测集.

可将前述讨论归结为以下结论.

定理 2.1 (Lebesgue 分解定理) *所有分布函数 F 可唯一地表示成*

$$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3$$

的形式, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, 且 F_i 是分布函数, 使得 F_1 绝对连续, F_2 纯奇异且 F_3 是原子性的.

倘若分布函数列 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及函数 F 使得

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z) = F(z) \qquad (z \in \mathcal{C}(F)), \tag{2.1}$$

则说 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛到 F. 需要强调弱极限 F 单调上升且有界, 但未必是分布函数. 由于 (2.1) 对 $z \in \mathcal{D}(F)$ 并不加限制, 总可以假定它右连续.

考虑数论函数 f. 对每个 $N \geqslant 1$, 函数

$$F_N(z) := \nu_N\{n : f(n) \leqslant z\} = \frac{1}{N}\big|\{n \leqslant N : f(n) \leqslant z\}\big| \tag{2.2}$$

是原子性分布函数.

定义 2.2 *倘若 (2.2) 中定义的序列 F_N 收敛到某分布函数 F, 则说数论函数 f 具有分布函数 F. 这样 f 的分布函数的存在性等价于合取下列两个条件:*

(i) 存在 $\mathbb{R}$ 的某稠密子集 E, 使得对其中的 z 来说极限 $F(z) := \lim_{N\to\infty} F_N(z)$ 存在;

(ii) 有 $\lim_{\substack{z\to+\infty\\ z\in E}} f(z)=1$, $\lim_{\substack{z\to-\infty\\ z\in E}} f(z)=0$.

事实上, 可将 F 延拓成单调上升且右连续的函数. 这说明 (2.1) 成立.

下列结论经常被 Erdős 隐含地使用, 它给出证明数论函数具有极限分布的一个好用的充分条件.

定理 2.3 设 f 为实数论函数. 假定对每个 $\varepsilon>0$ 均存在取值在 $\mathbb{Z}^+$ 中的函数 $n\mapsto a_\varepsilon(n)$, 满足以下条件:

(i) $\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{T\to+\infty}\overline{\mathbf{d}}\{n: a_\varepsilon(n)>T\}=0$;

(ii) $\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\mathbf{d}}\{n: |f(n)-f(a_\varepsilon(n))|>\varepsilon\}=0$;

(iii) 对每个 $a\geqslant 1$, 密率 $\mathbf{d}\{n: a_\varepsilon(n)=a\}$ 存在,

那么 f 具有极限分布.

证明 对 $\eta\to 0+$ 选择两个函数 $\varepsilon=\varepsilon(\eta)\to 0+$ 及 $T=T(\varepsilon(\eta))\to+\infty$ 使得 (i) 中的上密率 $\leqslant\eta$. 记 $\mathbf{d}(a,\varepsilon)$ 为 (iii) 中的密率并令

$$F(z,\eta) := \sum_{a\leqslant T(\varepsilon),\, f(a)\leqslant z}\mathbf{d}(a,\varepsilon),\qquad F(z) := \limsup_{\eta\to 0} F(z,\eta).$$

先证 (2.2) 中定义的 $F_N(z)$ 弱收敛到 F. 对 $z\in\mathcal{C}(F)$, 有

$$F_N(z)\leqslant \frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ a_\varepsilon(n)\leqslant T(\varepsilon)\\ f(a_\varepsilon(n))\leqslant z+\varepsilon}} 1+\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ a_\varepsilon(n)>T(\varepsilon)}} 1+\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ |f(n)-f(a_\varepsilon(n))|>\varepsilon}} 1.$$

由 (iii), 当 $N\to\infty$ 时, 该上界估计的第一项为 $F(z+\varepsilon,\eta)+o(1)$. 另两项分别用 (i) 和 (ii) 来估计. 先后令 N 趋于 $+\infty$ 及 η 趋于 0, 得

$$\limsup_{N\to\infty} F_N(z)\leqslant \limsup_{\eta\to 0} F\big(z+\varepsilon(\eta),\eta\big)=F(z).$$

最后的等式由 $F(w,\eta)$ 对 w 的单调上升性及 $z\in\mathcal{C}(F)$ 的事实而得. 对称地有

$$\liminf_{N\to\infty} F_N(z)\geqslant \limsup_{\eta\to 0} F\big(z-\varepsilon(\eta),\eta\big)=F(z).$$

于是 F_N 弱收敛到 F, 且可将该极限右连续化.

只须证明 $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$. 由于 $z\in\mathcal{C}(F)$ 时 $F(z)=\lim F_N(z)$, 显然有 $0\leqslant F\leqslant 1$. 设 $\varepsilon>0$. 选取 $\mathcal{C}(F)$ 中的 z 使得 $z>\max\{f(a): a\leqslant T(\varepsilon)\}+\varepsilon$. 这样由 $f(n)>z$ 推出 $a_\varepsilon(n)>T(\varepsilon)$ 与 $|f(n)-f(a_\varepsilon(n))|>\varepsilon$ 之间必有一个成立. 由 (i) 和 (ii), 当 $\eta\to 0+$ 时相应的密率 $1-F(z)$ 趋于 0. 这推出 $F(+\infty)=1$. 类似可得 $F(-\infty)=0$. □

在数论函数的概率研究中, 自然要作正规化, 引进 f 相对于 ν_N 的期望和方差的概念, 亦即

$$\mathbb{E}_N(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} z\,\mathrm{d}F_N(z) = \frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(n), \tag{2.3}$$

和

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_N(f) = \mathbb{D}_N(f)^2 &:= \int_{-\infty}^{+\infty} \big\{z - \mathbb{E}_N(f)\big\}^2 \mathrm{d}F_N(z)\\ &= \frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\{f(n) - \mathbb{E}_N(f)\}^2.\end{aligned} \tag{2.4}$$

这暗示了数论函数值分布研究的另一种方法. 考虑

$$G_N(z) := \nu_N\big\{n : f(n) \leqslant \mathbb{E}_N(f) + z\mathbb{D}_N(f)\big\} \tag{2.5}$$

的渐近性质, 并用来代替 $F_N(z)$ 渐近性质的研究. 该问题可视为概率数论的中心问题①.

分布函数列 $F_N(z)$ 或 $G_N(z)$ 含有关于数论函数 f 的所有信息, 而且可将一些常见的问题翻译成分布函数的语言. 看以下两个例子.

(a) 称整数列 $\mathcal{A}$ 有自然密率 α 与断言其示性函数 $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}(n)$ 有原子性分布函数

$$F(z) = \begin{cases} 0, & 若\ z < 0,\\ 1-\alpha, & 若\ 0 \leqslant z < 1,\\ 1, & 若\ z \geqslant 1\end{cases}$$

是等价的.

(b) 若存在两个实数列 A_N, B_N, 使得

$$H_N(z) := F_N\big(A_N + zB_N\big)$$

弱收敛到分布函数 $H(z)$, 且期望 $\int z\,\mathrm{d}H_N(z)$ 在 Lebesgue 意义下控制收敛, 那么

$$\mathbb{E}_N(f) = A_N + \Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} z\,\mathrm{d}H(z) + o(1)\Big\}B_N \qquad (N\to\infty).$$

这样对 f 分布函数足够细致的了解便导出平均值的估计.

作为一般规则, 仅当完全清楚分布函数的时候才可以认为完成了对数论函数的研究.

---

① 即便中心极限定理及收敛到 Gauss 分布是这个数论分支中不可或缺的部分 (主要见定理 4.15, 及第 459 页习题 287).

§2.2 特征函数

正如第二部分第七章中所提到的, 特征函数 F 的分布函数是 Stieltjes 测度 $\mathrm{d}F(z)$ 的 Fourier 变换, 即

$$\varphi(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau z}\,\mathrm{d}F(z) \qquad (\tau \in \mathbb{R}). \tag{2.6}$$

它是实轴上的一致连续函数, 满足

$$|\varphi(\tau)| \leqslant 1 = \varphi(0) \qquad (\tau \in \mathbb{R}).$$

对应关系 $F \leftrightarrow \varphi$ 是双射, 这由对于 $\mathcal{C}(F)$ 中的 z 和 $z+h$ 成立的反转公式

$$F(z+h) - F(z) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau h}}{\mathrm{i}\tau} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau z} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.7}$$

可得. (2.7) 的证明与传统 Fourier 变换反转公式的证明类似, 没有新的困难. 若 F 和 G 具有相同的特征函数, 那么由 (2.7) 得 $F(z+h)-F(z) = G(z+h)-G(z)$ 对几乎所有的 z, h 成立. 令 h 趋于 $-\infty$, 得 $F(z) = G(z)$ 几乎处处成立. 由于 F 和 G 单调上升且右连续, 这说明 $F = G$.

著名的 Paul Lévy 连续性定理建立了分布函数弱收敛和特征函数逐点收敛之间的联系.

定理 2.4 (连续性定理, Lévy, 1925) 设 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是分布函数列, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是对应的特征函数列. 那么 F_n 弱收敛到分布函数 F 当且仅当 φ_n 在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛到在 0 处连续的函数 φ. 另外, 在此情形下, φ 是 F 的特征函数, 且 φ_n 在任意紧集上一致收敛到 φ.

该经典结论在大部分概率论书籍中有详细证明 —— 比如见 Cramér (1970), Feller (1971), Loève (1963), Lukacs (1970). 这里只限于指出证明过程的主要步骤. 出发点是从 (2.7) 易得的一个恒等式.

引理 2.5 设 F 是分布函数, φ 是其特征函数. 对 $z \in \mathbb{R}$, $h > 0$, 有

$$\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} F(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_{z-h}^{z} F(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\tau/2)}{\tau/2}\right)^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau z/h} \varphi\Big(\frac{\tau}{h}\Big)\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.8}$$

证明 只须应用 (2.7) 于分布函数 $F_0(z) := (1/h)\int_z^{z+h} F(t)\,\mathrm{d}t$. 用分部积分即可得 $F_0(z)$ 的特征函数是 $\varphi(\tau)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau h})/\mathrm{i}\tau h$. 换元后即得结论. □

定理的证明 必要性易证. 若 F_n 弱收敛到 F, 由一个标准的方法知对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $X = X(\varepsilon)$ 使得

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \left| \int_{|z|>X} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau z}\,\mathrm{d}F_n(z) \right| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \int_{|z|>X} \mathrm{d}F_n(z) \leqslant \varepsilon.$$

可选取 X, 使得 $\pm X \in \mathcal{C}(F)$, 并观察到用分部积分可得在任意紧集上一致地有

$$\int_{-X}^{X} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau z}\,\mathrm{d}F_n(z) \to \int_{-X}^{X} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau z}\,\mathrm{d}F(z).$$

改变 X 的值后知最后的积分为 $\varphi(\tau)+O(\varepsilon)$. 这便推出在任意紧集上一致地有 $\varphi_n \to \varphi$.

为证明反向蕴涵关系, 只须证明若 φ_n 收敛于在 0 处连续的 φ, 那么 F_n 弱收敛到分布函数 F. 事实上, 由正向蕴涵关系的证明知 φ 是 F 的特征函数, 且收敛性 $\varphi_n \to \varphi$ 在任意紧集上一致.

首先注意到可从 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中抽取子列 $\{F_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 弱收敛到单调上升的右连续函数 F. 这由经典的对角线法则可得; 细节略去. 显然 $0 \leqslant F \leqslant 1$, 只要证明 F 是分布函数即可, 亦即 $F(+\infty)-F(-\infty)=1$. 为此对 $z=0$, $F=F_{n_j}$, $\varphi=\varphi_{n_j}$ 用 (2.8), 并令 j 趋于 $+\infty$. Lebesgue 控制收敛定理的条件显然满足. 于是得到 (2.8), 其中 F 是 F_{n_j} 的弱极限, 且 φ 是 φ_{n_j} 的极限. 由于 F 单调上升, 当 $h \to +\infty$ 时, 右边的部分趋于 $F(+\infty)-F(-\infty)$; 而 φ 在点 0 连续且有界, 故左边的部分趋于 $\varphi(0)$. 然而对任意 n 有 $\varphi_n(0)=1$, 故 $\varphi(0)=1$. 于是 F_{n_j} 的弱极限确是分布函数.

对其他弱极限 F^* 来说上述推理也成立. 而 F^* 仍必以 φ 为其特征函数 (根据证明的第一部分), 知 $F=F^*$. 所以 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的所有弱收敛子列收敛到 F. 这说明 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛到 F, 命题于是得证. □

当极限分布 $F(z)$ 绝对连续, 且其密度函数有界, 即

$$F(z)=\int_{-\infty}^{z} h(t)\,\mathrm{d}t,$$

Berry–Esseen 定理 (第二部分定理 7.16) 给出 F_n 逼近 F 的数量估计. 对 $T>0$ 有

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |F_n(z)-F(z)| \ll \frac{1}{T}\sup_{t\in\mathbb{R}}|h(t)| + \int_{-T}^{T}\left|\frac{\varphi_n(\tau)-\varphi(\tau)}{\tau}\right|\mathrm{d}\tau. \tag{2.9}$$

假设 $\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_n \int_0^{\varepsilon}|1-\varphi_n(\tau)|\,\mathrm{d}\tau/\tau=0.$② 由于 φ_n 在任意紧集上一致收敛于 φ, 对适当的选择 $T=T_n$, (2.9) 右边以某仅依赖于 n 的 ε_n 为其上界, 其中 ε_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. 该上界估计在实际应用中有绝对的重要性 —— 例如见定理 4.15.

根据数论函数极限分布函数的定义, 连续性定理即推出如下判别法.

---

② 可证明该条件等价于 $\ln^+|x|$ 对 $\mathrm{d}F_n$ 可积, 即 $\lim\limits_{T\to\infty}\sup\limits_{n}\int_{|x|>T}\ln|x|\,\mathrm{d}F_n(x)=0.$

定理 2.6 设 f 为实数论函数. 那么 f 有分布函数 F 当且仅当函数列

$$\varphi_N(\tau) := \frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau f(n)} \tag{2.10}$$

在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛到在 0 处连续的函数 $\varphi(\tau)$. 在此情形下 φ 是 F 的特征函数.

事实上, 若 $F_N(z)$ 由 (2.2) 定义, 有 $\varphi_N(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau z}\,\mathrm{d}F_N(z)$. 当 f 为加性函数时, 函数 $n \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau f(n)}$ 对每个 τ 来说都是模为 1 的乘性函数. f 的极限分布存在性的问题于是等价于单位圆盘中取值的乘性函数均值存在性的问题. 将在第四章中看到如何使用这个对偶性.

注记

§2.1 对分布函数更多的细节见 Feller (1970, 1971), Loève (1963), 或 Lukacs (1970).

定理 2.3 与 Hall 和 Tenenbaum (1988) 引理 A2 相同.

数论函数分布函数的正规化 (2.5) 有显著的理论意义. 实际应用中经常倾向于保持很大的弹性而提出更一般的问题: 对怎样的函数 A_N, B_N, 分布函数列

$$H_N(z) := \nu_N\{n : f(n) \leqslant A_N + zB_N\} \qquad (N = 1, 2, \ldots)$$

弱收敛到分布函数 $H(z)$. 这是 Elliott (1979) 的观点. 如今他的书被认为是概率数论中不容置疑的经典.

§2.2 Lévy 定理的证明基本根据 Cramér (1970).

特征函数论特别适用于处理分布函数的卷积. 分布函数 F, G 的卷积 H 定义为

$$H(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} F(z-y)\,\mathrm{d}G(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(z-y)\,\mathrm{d}F(y).$$

若 $\varphi(\tau)$, $\gamma(\tau)$ 分别是 F, G 的特征函数, 那么 $\eta(\tau) = \varphi(\tau)\gamma(\tau)$ 是 H 的特征函数.

Parseval 恒等式断言

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\,\mathrm{d}F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\tau)\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.11}$$

其中 $g \in L^1(\mathbb{R})$ 使得其 Fourier 变换

$$\widehat{g}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau z} g(z)\,\mathrm{d}z$$

也在 $L^1(\mathbb{R})$ 中.

用 $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上有界连续函数的空间. 关系 (2.11) 对任意函数 $g \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ 以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\,\mathrm{d}F(z) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\Big(1-\frac{|\tau|}{\lambda}\Big)\widehat{g}(\tau)\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.12}$$

的形式成立. 用 Fourier 变换为 $\widehat{w_\lambda}(\tau) = (1-|\tau|/\lambda)^+$ 的 Fejér 核

$$w_\lambda(z) := \frac{\lambda}{2\pi}\Big(\frac{\sin(\lambda z/2)}{\lambda z/2}\Big)^2$$

的性质容易证明它. 事实上, 在对 g 的前述假设下, 由经典结果知 $g_\lambda := g * w_\lambda$ 逐点且均方收敛到 g, 并且 $\|g_\lambda\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty$. 另外, $\widehat{g_\lambda} = \widehat{g}\,\widehat{w_\lambda}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的函数与紧支集连续函数之积, 故位于 $L^1(\mathbb{R})$之中. 对 g_λ 用 (2.11), 并用 Lebesgue 控制收敛计算左边项的极限, 得 (2.12).

在 (2.12) 中选取 $g(z) = \sin\{T(z-y)\}/\{T(z-y)\}$, 这样

$$\widehat{g}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\pi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau y}}{T}, & 若\ |\tau| \leqslant T, \\ 0, & 若\ |\tau| > T, \end{cases}$$

于是得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\{T(z-y)\}}{T(z-y)}\,\mathrm{d}F(z) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau y}\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

在 $\mathbb{R}$ 上对 $\mathrm{d}F(y)$ 积分, 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\{T(z-y)\}}{T(z-y)}\,\mathrm{d}F(z)\,\mathrm{d}F(y) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\varphi(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.13}$$

令 T 趋于 $+\infty$, 得

$$\sum_{n\geqslant 0} s_n^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\varphi(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.14}$$

其中 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 F 的跳跃集, 按升序排列. 特别地, 关系

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\varphi(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau = 0 \tag{2.15}$$

是 F 连续的充要条件.

在第四章中将看到卷积

$$F_1 * F_2 * \cdots * F_n \qquad (n\to\infty) \tag{2.16}$$

的收敛性在加性或乘性函数极限分布研究中至关重要. 在此框架下, 我们提到三个基本结论, 在同一定理中表述. 记 $\varphi_j(\tau)$ 为 F_j 的特征函数, 并用 σ_j 表示其最大的跳跃点, 即

$$\sigma_j := \max_{z\in\mathbb{R}}\{F_j(z) - F_j(z-)\}.$$

最后, 用 $Y := \mathbf{1}_{[0,\infty[}$ 表示 Heaviside 函数.

定理 2.7 *以下三个条件等价:*

(i) *当* $n \to \infty$ *时乘积* (2.16) *弱收敛到某分布函数* F,

(ii) $\exists\,\delta > 0$, *使得* $\lim\limits_{m,n\to\infty} \prod\limits_{m<j\leqslant n} \varphi_j(\tau) = 1 \quad (|\tau| \leqslant \delta)$,

(iii) $\lim\limits_{m,n\to\infty} F_m * \cdots * F_n(z) = Y(z) \quad (z \neq 0)$.

当这三个条件之一满足时, 有:

(a) (Lévy, 1931) F *连续当且仅当*

$$\exists\, n \geqslant 1, \quad \text{使得}\ \sigma_n = 0 \quad \text{或} \quad \sum_{n\geqslant 1}(1 - \sigma_n) = +\infty. \tag{2.17}$$

(b) (Jessen *和* Wintner, 1935) *若每个* F_n *都是原子性的, 那么* F *是纯粹的, 亦即,* F *要么是原子性的, 要么是连续且纯奇异的, 要么是绝对连续的.*

条件 (i), (ii) 及 (iii) 的等价性由连续性定理而得. 令 $F_{m,n} = F_m * \cdots * F_n$ 及 $\varphi_{m,n}(\tau) = \prod_{m<j\leqslant n} \varphi_j(\tau)$. 若乘积 (2.16) 弱收敛到 F, 对应于特征函数 φ, 那么 φ 连续且 $\varphi(0) = 1$. 从而 φ 在原点某邻域 $|\tau| \leqslant \delta$ 中非零. Lévy 定理于是立即推出 (ii). 蕴涵关系 (ii)⇒(iii) 来自下列对所有特征函数 φ 成立的一般的不等式

$$1 - \Re e\, \varphi(\tau) \geqslant \tfrac{1}{4}\big(1 - \Re e\, \varphi(2\tau)\big), \tag{2.18}$$

该不等式由简单不等式 $1 - \cos(z\tau) \geqslant \frac{1}{4}\big(1 - \cos(2z\tau)\big)$ 对 $\mathrm{d}F(z)$ 积分而得. 应用 (2.18) 于 $\varphi_{m,n}$, 得 $\lim\limits_{m,n\to\infty} \varphi_{m,n}(\tau) = 1$ 对 $|\tau| \leqslant 2\delta$ 成立; 通过迭代知其对所有 τ 仍成立. 通过连续性定理得 (iii). 只剩下证明 (iii) 蕴涵 (i). 再用连续性定理, 由 (iii) 知在任意紧集上 $\varphi_{m,n}(\tau) \to 1$. 这推出乘积 $\prod_{j\geqslant 1} \varphi_j(\tau)$ 在所有紧集上的收敛性. 因此其极限在原点连续. 最后用定理 2.4 便得到要求的结论.

Babu (1992) 给出了存在绝对连续分布函数的一个充分条件, 其一个特例见习题 259.

在 Elliott (1979), 引理 1.22 中可找到定理 2.7 (a) 和 (b) 两点的证明. 判别法 (2.17) 的证明归结到 Paul Lévy 于 1937 引进的 *凝聚函数* 这一丰富的

概念. 以下给出关于这方面基本结果的一些信息. Hengartner 和 Theodorescu (1973) 的著述对此作了更深刻的介绍.

分布函数 F 的凝聚函数[③] Q_F 是 $\mathbb{R}^+$ 上由下式定义的函数

$$Q_F(\ell) := \sup_{z\in\mathbb{R}} \big\{F(z+\ell) - F(z)\big\}. \tag{2.19}$$

定义 凝聚值为 $Q(F) := Q_F(1)$. 注意到, 对所有 $\ell > 0$, 有 $Q_F(\ell) = Q(F_\ell)$, 其中 $F_\ell(z) := F(\ell z)$. 容易看到 F 连续当且仅当 $\ell \to 0+$ 时 $Q_F(\ell) \to 0$. 这样凝聚函数便可看成是对 F 与连续分布函数集之间距离的一种刻画. 这个概念特别适用于研究分布函数卷积 (或等价地, 独立随机变量和). 事实上, 对所有分布函数对 (F, G), 有

$$Q(F*G) \leqslant Q(F). \tag{2.20}$$

不等式 (2.20) 由卷积的定义立得:

$$\begin{aligned} Q(F*G) &= \sup_{z\in\mathbb{R}} \int\int_{z<x+y\leqslant z+1} \mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}G(y) \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}G(y) \sup_{z\in\mathbb{R}} \int_{]z-y,z-y+1]} \mathrm{d}F(x) = Q(F). \end{aligned}$$

Kolmogorov (1956, 1958) 证明了关于卷积与其因子凝聚函数更深刻的不等式, 其后被 Rogozin (1961) 改进.

定理 2.8 (Kolmogorov–Rogozin 不等式) 设 $\{F_j\}_{j=1}^n$ 为分布函数有限列, $F := F_1 * \cdots * F_n$. 对 $\ell > 0$ 有

$$Q_F(\ell) \leqslant \frac{C}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^n (1 - Q_{F_j}(\ell))}}, \tag{2.21}$$

其中 C 是绝对常数.

在证明 (2.21) 之前, 先看如何从中得出定理 2.7 的命题 (a).

先考虑 $\sum_{j\geqslant 1}(1-\sigma_j) < \infty$ 的情形. 不失一般性, 可设 $\sigma_j \neq 0$ 对所有 j 成立, 故而 $\prod_{j\geqslant 1}\sigma_j > 0$. 对每个 $j \geqslant 1$, 选取实数 u_j, 使得 $\sigma_j = F_j(u_j) - F_j(u_j-)$. 级数 $\sum_{j\geqslant 1} u_j$ 必收敛; 否则存在 $\delta > 0$ 及趋于无穷的两列整数 m_k, n_k, 使得 $|\sum_{m_k<j\leqslant n_k} u_j| > \delta$ 对任意 k 成立, 从而

$$\prod_{m_k<j\leqslant n_k} \sigma_j \leqslant \int_{|z|>\delta} \mathrm{d}F_{m_k,n_k}(z),$$

③ 已经遇到这个概念了, 见第二部分第七章注记 §7.6.

当 $k\to\infty$ 时左边的部分趋于 1 而右边的部分趋于 0, 矛盾. 令 $u:=\sum_{j\geqslant1}u_j$. 于是有

$$F(u)-F(u-)\geqslant\int_{\prod_{j\geqslant1}\{u_j\}}\prod_{j\geqslant1}\mathrm{d}F_j(z_j)=\prod_{j\geqslant1}\sigma_j>0,$$

故 F 在点 u 不收敛.

反过来, 若条件 (2.17) 成立, 设 $\varepsilon>0$ 及 $m=m(\varepsilon)$, 使得

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant m}(1-\sigma_j)\geqslant1/\varepsilon^2.$$

对 $\ell\leqslant\ell_0(\varepsilon)$ 有 $Q_{F_j}(\ell)\leqslant\sigma_j+1/m$ $(1\leqslant j\leqslant m)$. 先用 (2.20) 再用 (2.21) 便得 $Q_F(\ell)\ll\varepsilon$. 这说明 ℓ 趋于 0 时 $Q_F(\ell)$ 亦然, 故 F 连续.

下列引理用 $\varphi(\tau)$ 均值的函数来区间估计 $Q(F)$. 用 $w(z)$ 简记 Fejér 核 $w_1(z)$.

引理 2.9 设 $K_1:=w(1)>0.146$ 及 $K_2:=1/2\pi w\left(\frac12\right)<1.022$. 对任意特征函数为 φ 的分布函数 F, 有

$$K_1\int_{-1}^{1}|\varphi(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\leqslant Q(F)\leqslant K_2\int_{-1}^{1}|\varphi(\tau)|\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.22}$$

证明 对每个 $z\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}F(z+\tfrac12)-F(z-\tfrac12)&=\int_{z-1/2}^{z+1/2}\mathrm{d}F(v)\\&\leqslant\frac{1}{w(1/2)}\int_{-\infty}^{+\infty}w(z-v)\,\mathrm{d}F(v)=K_2\int_{-1}^{1}(1-|\tau|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau z}\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

最后的不等式由 (2.11) 而得. 这推出 (2.22) 中的上界估计. 对于下界估计, 注意到

$$Q(F)=Q(F)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{z-1/2}^{z+1/2}\mathrm{d}F(v)\,\mathrm{d}z\geqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{F(z+\tfrac12)-F(z-\tfrac12)\right\}^2\mathrm{d}z.$$

而

$$F(z+\tfrac12)-F(z-\tfrac12)=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\sin(\tau/2)}{\tau/2}\varphi(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau z}\,\mathrm{d}\tau$$

形式下的反转公式 (2.7) 可看成 $L^2(\mathbb{R})$ 中的 Fourier 变换, Plancherel 公式断言

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{F(z+\tfrac12)-F(z-\tfrac12)\right\}^2\mathrm{d}z&=\int_{-\infty}^{+\infty}w(\tau)|\varphi(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\\&\geqslant w(1)\int_{-1}^{1}|\varphi(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

这即是要求的不等式. □

现在可以证明定理 2.8. 这是 Esseen (1966) 或 Hengartner 和 Theodorescu (1973) 证明的一个变体. 不失一般性, 可设 $\ell = 1$, 且 $Q(F_j) < 1$ 对 $1 \leqslant j \leqslant n$ 成立. 由 (2.22) 及对 $0 \leqslant u \leqslant 1$ 成立的不等式 $u \leqslant \mathrm{e}^{-(1-u^2)/2}$, 得

$$\begin{aligned} Q(F) &\leqslant K_2 \int_{-1}^{1} \prod_{j=1}^{n} |\varphi_j(\tau)| \,\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant K_2 \int_{-1}^{1} \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \big(1 - |\varphi_j(\tau)|^2\big) \Big\} \,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{2.23}$$

令 $\check{F}_j(z) := 1 - F_j(-(z+))$ 为 $F_j(z)$ 的对称分布函数, 其特征函数为 $\overline{\varphi_j(\tau)}$. 定义对称化 $G_j := F_j * \check{F}_j$, 其特征函数于是为 $|\varphi_j(\tau)|^2$. 这样有

$$1 - |\varphi_j(\tau)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos(\tau z)) \,\mathrm{d}G_j(z). \tag{2.24}$$

令 $I := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ 及

$$p_j := \int_{\mathbb{R}\setminus I} \mathrm{d}G_j(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}F_j(y) \int_{x\notin y-I} \mathrm{d}F_j(x) \geqslant 1 - Q(F_j) > 0.$$

现在引进分布函数 H_j, 定义为

$$H_j(z) = \begin{cases} G_j(z)/p_j, & \text{若 } z \notin I, \\ G_j(-\frac{1}{2})/p_j, & \text{若 } z \in I. \end{cases}$$

有 $\mathrm{d}G_j \geqslant p_j \,\mathrm{d}H_j$. 将该下界估计代入 (2.24). 令 $T := \sum_{1\leqslant j\leqslant n} p_j$, $\alpha_j := T/p_j$, 使得 $\sum_{1\leqslant j\leqslant n} 1/\alpha_j = 1$. 根据指数为 α_j 的 Hölder 不等式, 从 (2.23) 以及 (2.24) 中导入 $\mathrm{d}H_j$ 后所得的不等式中得到

$$Q(F) \leqslant K_2 \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{-1}^{1} \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\alpha_j p_j \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos(\tau z)) \,\mathrm{d}H_j(z) \Big\} \,\mathrm{d}\tau \right)^{1/\alpha_j}.$$

对所有 j 均有 $\alpha_j p_j = T$. 由 Jensen 不等式, 上式的指数于是以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-T(1-\cos(\tau z))/2} \,\mathrm{d}H_j(z)$$

为其上界. 交换积分次序后得

$$Q(F) \leqslant K_2 \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}H_j(z) \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-T(1-\cos(\tau z))/2} \,\mathrm{d}\tau \right)^{1/\alpha_j}.$$

由于 $\mathrm{d}H_j(z)$ 在 I 上为零, 对内部的和式作上界估计时可设 $|z| \geqslant \frac{1}{2}$. 于是得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-T(1-\cos(\tau z))/2}\,\mathrm{d}\tau &= \frac{2}{|z|}\int_0^{|z|} \mathrm{e}^{-T(1-\cos v)/2}\,\mathrm{d}v \\ &\leqslant \frac{2}{|z|}\Big(1+\frac{|z|}{\pi}\Big)\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-T(1-\cos v)/2}\,\mathrm{d}v \\ &\leqslant \Big(4+\frac{2}{\pi}\Big)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-Tv^2/\pi^2}\,\mathrm{d}v \leqslant \frac{19}{\sqrt{T}}.\end{aligned}$$

这对于 $T \geqslant 1$ 推出了上界估计 (2.21). 由于相反的情形结论是显然的, 这便完成了定理 2.8 的证明. □

对分布函数的补充, 可参阅 Lukacs (1970) 的著作.

习题

253. $\varphi(n)/n$ 的分布函数.

设 $\varepsilon > 0$, $y := 1/\varepsilon^2$ 及 $a_\varepsilon(n) := \prod_{p^\nu \| n,\, p \leqslant y} p^\nu \quad (n \geqslant 1)$.

(a) 证明

$$\mathbf{d}\{n : a_\varepsilon(n) = a\} = \frac{1}{a}\prod_{p \leqslant y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)$$

对 $a \geqslant 1$, $P^+(a) \leqslant y$ 成立 (可利用第 97 页习题 77).

(b) 证明上界估计 $\sum_{n \leqslant x} \ln a_\varepsilon(n) \ll x \ln\big(1/\varepsilon\big) \quad (x \geqslant 1)$.

(c) 令 $f(n) = \varphi(n)/n$, 其中 φ 是 Euler 函数. 证明

$$\big|f(n) - f\big(a_\varepsilon(n)\big)\big| \leqslant \sum_{p|n,\, p>y} \frac{1}{p}.$$

(d) 证明 $f(n)$ 有极限分布. 可从 (b) 和 (c) 中得出定理 2.3 的条件 (i) 和 (ii) 满足.

254. Schoenberg (1928) 的一个定理.

对每个 $\tau \in \mathbb{R}$ 确定数论函数 λ_τ, 满足 $\{\varphi(n)/n\}^{\mathrm{i}\tau} = \sum_{d|n} \lambda_\tau(d)$. 证明级数 $\psi(\tau) := \sum_{d \geqslant 1} \lambda_\tau(d)/d$ 绝对收敛, 并重新得出习题 253 的结论. 证明极限分布 F 形如

$$F(\mathrm{e}^z) = \lim_{n\to\infty} F_{p_1} * F_{p_2} * \cdots * F_{p_n}(z),$$

其中 p_j 表示第 j 个素数, $\mathrm{d}F_{p_j}$ 是 Dirac 分布的线性组合. 用定理 2.7 (a), 推出 F 连续[④]. 用定理 2.7 (b) 证明 F 是纯粹的.

④ 可用注记中的判别法 (2.15) 直接证明该结论, 见定理 4.1 的末尾.

255. 将 $\varphi(n)/n$ 换成 $\sigma(n)/n$ (其中 $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$) 重作习题 253 和习题 254, 并推广之.

256. 奇异性的充分条件 (Erdős, 1939).

本题中假设给定单调上升整值函数 $R(y)$, 满足

(i) $\sum_p 1/(pR(p)) < \infty$,

(ii) 对足够大的 y, 存在$R(y)$ 个整数 $m_1 < m_2 < \cdots < m_R$, 使得

α) $P^+(m_j) \leqslant y$, $\mu(m_j)^2 = 1 \quad (1 \leqslant j \leqslant R(y))$,

β) $\sum_{1\leqslant j\leqslant R(y)} 1/\varphi(m_j) \geqslant c\ln y$, 其中 c 是正绝对常数.

将证明如下 Erdős 的结论. 设 f 是强可加数论函数, 使得 $f(p) \ll 1/R(p)^3$, 那么 f 有原子性或纯奇异的分布函数.

(a) 用习题 254 中的方法计算 $\lim_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{n\leqslant x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau f(n)}$. 推出极限分布的存在性, 及其为纯粹分布的特性[⑤].

(b) 用 $\lambda(I)$ 表示 $\mathbb{R}$ 中一般的 Riemann 可积集[⑥] I 的 Lebesgue 测度. 证明若极限分布 f 绝对连续, 那么

$$\lim_{\lambda(I)\to 0} \overline{\mathbf{d}}\{n : f(n) \in I\} = 0.$$

(c) 设 $\varepsilon > 0$ 及 $y = y(\varepsilon)$ 足够大. 令 $a_\varepsilon(n) := \prod_{p\leqslant y,\, p|n} p$. 证明对 $a \geqslant 1$, $\mu(a)^2 = 1$, $P^+(a) \leqslant y$ 有

$$\mathbf{d}\{n : a_\varepsilon(n) = a\} = \frac{1}{\varphi(a)} \prod_{p\leqslant y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

且可用定理 2.3 得到 f 分布函数存在性的另一个证明.

(d) 选取 $y(\varepsilon)$ 足够大, 令

$$I := \bigcup_{1\leqslant j\leqslant R(y)} \Big(f(m_j) + \big[-1/R(y)^2, 1/R(y)^2\big]\Big).$$

证明 $\overline{\mathbf{d}}\{n : f(n) \in I\} \gg 1$. 完成全题的证明.

257. 证明 $R(y) = y^\delta$ 对任意 $\delta > 0$ 满足习题 256 的假设, 推出 $\varphi(n)/n$ 和 $\sigma(n)/n$ 的分布函数是纯奇异的. [这里承认习题 254 和习题 255 的结论.]

258. 设 $F(z)$ 是特征函数为 $\varphi(\tau)$ 的分布函数. 证明若 $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ 则 F 绝对连续. 可用 Plancherel 定理及对任意紧支集 C^2 函数 g 用 Parseval 公式 (2.11).

259. Saffari (1979) 的一个结论. 设 f 强加性, 定义为 $f(2) = 0, f(p)=(\ln p)^{-\alpha}$ $(p > 2)$, 其中 $\alpha > 0$ 给定.

---

⑤ 见注记中定理 2.7.

⑥ 亦即对应的特征函数 Riemann 可积.　　—— 译者注

(a) 证明 f 有分布函数 F, 并计算其特征函数 $\varphi(\tau)$.

(b) 计算 $|\varphi(\tau)|^2$, 并证明

$$\varphi(\tau) \asymp \exp\left\{-2\sum_p \frac{1}{p}\sin^2\left(\frac{1}{2}\tau f(p)\right)\right\}.$$

(c) 用素数定理估计对 p 的和式, 并证明 $|\varphi(\tau)|=|\tau|^{-1/\alpha+o(1)}(|\tau|\to\infty)$. 通过习题 258 的结论, 得出: 只要 $\alpha<2$, F 便绝对连续.

260. 设 $h(n)$ 为 n 的使得 $n^{1/3}<p\leqslant n^{1/2}$ 的素因子 p 的个数. 证明 $h(n)$ 有分布函数.

261. *加性函数在因子上的凝聚.* 给定实加性函数 f, 对每个整数 n, 定义分布函数 F_n 为

$$F_n(z) := \frac{1}{\tau(n)}\sum_{d|n,\, f(d)\leqslant z} 1.$$

(a) 计算 F_n 的特征函数 $\varphi_n(\tau)$, 并推出 $F_n = *_{p^\nu\|n}F_{p^\nu}$. 证明若存在绝对正常数 c, 使得 $Q(F_{p^\nu})\leqslant 1-c$, 那么有 $Q(F_n)\ll(1+\omega(n))^{-1/2}$.

(b) 在 $f=\ln$ 的情形, 定义 Hooley (1979) Δ 函数[7] 为

$$\Delta(n) = Q(F_n)\tau(n) = \max_{u\in\mathbb{R}}\sum_{d|n,\, \mathrm{e}^u<d\leqslant \mathrm{e}^{u+1}} 1.$$

证明 $\Delta(n)\ll\tau(n)/\sqrt{1+\omega(n)}$, 并证明该上界估计在差一个隐含常数的意义下最优.

262. *因子链.* 对每个整数 n, n 的因子集 $\{d_1,\ldots,d_h\}$, 若满足

(i) $\Omega(d_1)+\Omega(d_h)=\Omega(n)$,

(ii) $d_{j+1}/d_j\in\mathbb{P}\quad(1\leqslant j<h)$,

则称之为 n-链.

(a) 设 $n=mp^\nu$, 其中 $p\nmid m$. 证明若 $\{d_1,\ldots,d_h\}$ 是 m-链, 那么

$$\mathcal{C}_r := \{d_r, d_rp,\ldots,d_rp^{\nu+1-r}, d_{r+1}p^{\nu+1-r},\ldots,d_hp^{\nu+1-r}\}$$

对任意 r, $1\leqslant r\leqslant R:=\min(h,\nu+1)$ 是 n-链. 证明 $\mathcal{C}_r$ 诱导分拆 $\{d_jp^\mu : 1\leqslant j\leqslant h, 0\leqslant\mu\leqslant\nu\}$. 对 $k=\omega(n)$ 用归纳法, 推出对每个 n, n 的因子集是 n-链的无交并. 用 $\gamma(n)$ 表示这些 n-链数目的最大值.

(b) 证明每个 n-链恰含一个因子 d, 使得 $\Omega(d)=\lfloor\Omega(n)/2\rfloor$.

(c) 证明函数 Ω 对 $c=\frac{1}{2}$ 满足习题 261 的条件. 推出关于 $\gamma(n)$ 的一个不等式[8].

---

[7] 见第 268 页习题 209 及第 427 页习题 279.

[8] 该结论, 以及习题 263 的 (a) 部分是 Bruijn, van Ebbenhorst Tengbergen 和 Kruyswijk (1949–1951) 的结果.

263. 本原列. 保持习题 262 中 $\gamma(n)$ 的记号. 若整数列 $\mathcal{A}$ 中任两个元素之间都不具有整除关系, 则称之为本原列. 对每个整数 n, 令

$$\tau(n,\mathcal{A}) := \sum_{d|n,\, d\in\mathcal{A}} 1.$$

(a) 证明对任意本原列 $\mathcal{A}$, 有 $\tau(n,\mathcal{A}) \leqslant \gamma(n) \quad (n \geqslant 1)$.

(b) 估计 $\sum_{n\leqslant x}\tau(n,\mathcal{A})$ 并证明 Behrend (1935) 的结果

$$\sup_{\mathcal{A}\ \text{本原}} \sum_{a\leqslant x,\, a\in\mathcal{A}} \frac{1}{a} \ll \frac{\ln x}{\sqrt{\ln_2 x}}. \tag{2.25}$$

(c) 考虑 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_x = \{n \geqslant 1 : \Omega(n) = \lfloor \ln_2 x \rfloor\}$ 并用 Selberg–Delange 方法得到的结果, 证明估计 (2.25) 在差一个隐含常数的意义下最优[⑨].

⑨ Behrend 原来的证明基于 Sperner (1928) 的一个定理, 在 Halberstam 和 Roth (1966) 著作第五章中回顾. Erdős, Sárközy 和 Szemerédi (1967) 证明了 (2.25) 左边等价于 $(\ln x)/\sqrt{2\pi \ln_2 x}$.

第三章　正规阶

§3.1　定义

概率数论中正规阶的概念与概率论中随机变量几乎必然相等的概念类似. 更确切地, 称数论函数 f 以 g 为其正规阶, 是指对任意 $\varepsilon > 0$,

$$|f(n) - g(n)| \leqslant \varepsilon |g(n)|$$

对某密率为 1 的集合中的 n 成立. 为表示这种情形, 有一个方便的记号①

$$f(n) = \{1 + o(1)\}g(n) \qquad \text{a.e.} \tag{3.1}$$

注意: 一个给定的函数 f 可有许多正规阶, 它们在无穷远处等价. 从而仅当在某种意义下 g 的渐近性质较 f 更为简单时该概念才有意义. 出于这样的考虑, Hardy 和 Ramanujan (1917) 在一篇文章中将正规阶的叫法局限于简单单调函数. 如今这篇文章被看作是概率数论诞生的标志. 尝试定义"简单"一词总是微妙的事情. 为明确起见, 这里可赋之以相对更广的意义：可用实分析中的符号来表示. 这样, 形如 $\mathrm{li}(x)$ 的函数便被认为是简单函数, 而只能用 Cauchy 积分表示的函数则不然. 这里我们还是不愿保留 Hardy 和 Ramanujan 引入的限制, 以便尽可能地保持理论概念的灵活性, 尽管在绝大多数已知的情形下这些限制条件总是满足的.

用分布函数的语言来说, 正规阶的存在性可解释成正规化后收敛于一个退化分布. 比如, 在正值函数情形, 显然关系 (3.1) 等价于分布函数

$$H_N(z) := \nu_N\{n : f(n)/g(n) \leqslant z\}$$

① 回顾记号 a.e. (几乎处处) 表示相应的关系对适当的密率为 1 的集合成立.

弱收敛于 $H(z) := \mathbf{1}_{[1,\infty[}(z)$.

在本章接下来的部分以及后面各章中将看到许多看起来不规则的数论函数其实具有正规阶. 从而它们的性质是“几乎处处”清楚的. 这样的情况促成了“正规数”— 也就是说在自然密率的意义下“随机数”的概念. 看起来具有数量性的概念, 最终却可充当一个完整数学理论的基石, 不能不说是概率算术观的独特魅力.

§3.2 Turán–Kubilius 不等式

在数论函数 f 的研究中, 经常有理由认为其平均值 (或其适当的逼近)

$$g(N) = \mathbb{E}_N(f) := \frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(n) \tag{3.2}$$

是 f 的一个可能的正规阶. 当 g 单调时, 一个必要条件便是 g 增长速度足够慢, 使得

$$g(n) = \{1 + o(1)\}g(N) \tag{3.3}$$

对除 $o(N)$ 个以外的整数 $n \leqslant N$ 成立. 这样自然希望对离差的计算, 也就是对经验方差

$$\mathbb{V}_N(f) := \mathbb{E}_N\big(|f(n) - g(N)|^2\big) \tag{3.4}$$

的估计, 联合 Bienaymé–Tchébychev 不等式, 可用来证明 g 确是 f 的正规阶.

在加性函数的情形该方法特别有效. Turán–Kubilius 不等式 (定理 3.1) 就提供了 (3.4) 的一个上界估计, 经常足以确定正规阶. 在叙述定理之前, 先解释其背后的概率思想.

设 f 为复加性函数. 易知

$$f(n) = \sum_{p^\nu\leqslant N} f(p^\nu)\xi_{p^\nu}(n) \qquad (n \leqslant N), \tag{3.5}$$

其中

$$\xi_{p^\nu}(n) = \begin{cases} 1, & \text{若 } p^\nu \| n, \\ 0, & \text{若以上不然}. \end{cases} \tag{3.6}$$

亦即, 在赋均匀分布 ν_N 的概率空间 $\Omega_N := \{n : 1 \leqslant n \leqslant N\}$ 上有随机变量的等式

$$f = \sum_{p^\nu\leqslant N} f(p^\nu)\xi_{p^\nu}.$$

ξ_{p^ν} 是具 Bernoulli 分布的随机变量, 其期望为

$$w_N(p^\nu) := \mathbb{E}_N(\xi_{p^\nu}) = \nu_N\{n : \xi_{p^\nu}(n) = 1\} \tag{3.7}$$
$$= \frac{1}{N}\left(\left\lfloor\frac{N}{p^\nu}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{N}{p^{\nu+1}}\right\rfloor\right) = \frac{1-1/p}{p^\nu} + O\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

当 $q \neq p$ 时, 还有

$$\mathbb{E}_N(\xi_{p^\nu}\xi_{q^\mu}) = \frac{1}{N}\left(\left\lfloor\frac{N}{p^\nu q^\mu}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{N}{p^{\nu+1}q^\mu}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{N}{p^\nu q^{\mu+1}}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{N}{p^{\nu+1}q^{\mu+1}}\right\rfloor\right)$$
$$= \frac{(1-1/p)(1-1/q)}{p^\nu q^\mu} + O\Big(\frac{1}{N}\Big) = \mathbb{E}_N(\xi_{p^\nu})\mathbb{E}_N(\xi_{q^\mu}) + O\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

所以当 $p \neq q$ 时 ξ_{p^ν} 和 ξ_{q^μ} 是渐近地独立的, 且当 p 固定时, $\mathbb{E}_N(\xi_{p^\nu})$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ 接近于参数为 $(1-1/p)$ 的几何分布的概率. 这导出了假说: f 作为 $\Omega_N := \{n : 1 \leqslant n \leqslant N\}$ 上的随机变量, 其分布接近于

$$Z_N = Z_{f,N} := \sum_{p\leqslant N} \zeta_p \tag{3.8}$$

的分布, 其中 $\zeta_p = \zeta_p(f)$ 是某抽象概率空间 (Ω, P) 上的独立随机变量, 其分布为 (注意到 $f(1) = 0$)

$$P\big(\zeta_p = f(p^\nu)\big) = (1-1/p)p^{-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.9}$$

混用记号, 约定对 (3.9) 表述如下: 当多个 (可为无穷多个) $f(p^\nu)$ 相等时, 对应的概率是出现在右边的量之和. 不失一般性, 还可设当 $p^\nu > N$ 时 $f(p^\nu) = 0$.

有

$$\mathbb{E}(Z_{f,N}) = \sum_{p^\nu\leqslant N} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big), \tag{3.10}$$
$$\mathbb{V}(Z_{f,N}) = B_f(N)^2 - R_f(N)^2,$$

其中

$$B_f(N)^2 := \sum_{p\leqslant N} \mathbb{E}(|\zeta_p|^2) = \sum_{p^\nu\leqslant N} \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big), \tag{3.11}$$
$$R_f(N)^2 := \sum_{p\leqslant N} |\mathbb{E}(\zeta_p)|^2 = \sum_{p\leqslant N} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^2 \left|\sum_{1\leqslant\nu\leqslant(\ln N)/\ln p} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\right|^2,$$

$\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{V}$ 分别表示相对于满足 (3.9) 的抽象概率 P 的期望和方差.

为明确起见, 注意到由 Cauchy–Schwarz 定理即得

$$R_f(N)^2 \leqslant \sum_{p^\nu\leqslant N} \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu+1}}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \leqslant \tfrac{1}{2}B_f(N)^2, \tag{3.12}$$

这样

$$(3.13)\qquad \tfrac{1}{2}B_f(N)^2 \leqslant \sum_{p^\nu \leqslant N}\Bigl(1-\frac{1}{p}\Bigr)^2 \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu} \leqslant \mathbb{V}(Z_{f,N}) \leqslant B_f(N)^2.$$

另外,

$$(3.14)\qquad \begin{aligned} |\mathbb{E}_N(f)-\mathbb{E}(Z_{f,N})| &\leqslant \frac{1}{N}\sum_{p^\nu\leqslant N}|f(p^\nu)| \\ &\leqslant \frac{1}{N}\Biggl(\sum_{p^\nu\leqslant N}\frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu}\sum_{p^\nu\leqslant N}p^\nu\Biggr)^{1/2} \ll \sqrt{\frac{\mathbb{V}(Z_{f,N})}{\ln N}}. \end{aligned}$$

Turán–Kubilius 不等式基本上断言

$$(3.15)\qquad C_N := \sup_{f\neq 0}\mathbb{V}_N(f)/\mathbb{V}(Z_{f,N}) \ll 1 \qquad (N\geqslant 1).$$

这里 $\mathbb{V}_N(f)$ 表示经验方差

$$(3.16)\qquad \mathbb{V}_N(f) := \frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}|f(n)-\mathbb{E}_N(f)|^2,$$

通常将其换成半经验方差

$$(3.17)\qquad \mathbb{V}_N^*(f) := \frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}|f(n)-\mathbb{E}(Z_{f,N})|^2$$

更为方便. 于是也考虑数量

$$(3.18)\qquad C_N^* := \sup_{f\neq 0}\mathbb{V}_N^*(f)/\mathbb{V}(Z_{f,N}).$$

暂先承认 (3.15), 从 (3.14) 中易得

$$(3.19)\qquad \mathbb{V}_N(f) = \mathbb{V}_N^*(f) + O\biggl(\frac{\mathbb{V}(Z_{f,N})}{\ln N}\biggr),$$

其中隐含的常数与 f 无关, 从而

$$(3.20)\qquad C_N^* = C_N + O\Bigl(\frac{1}{\ln N}\Bigr) \qquad (N\geqslant 2).$$

另外, (3.15) 从质的角度看是最优的: 有

$$(3.21)\qquad \min(C_N, C_N^*) \geqslant 2^{1-\langle(\ln N)/\ln 2\rangle} + O\Bigl(\frac{1}{N}\Bigr) \qquad (N\geqslant 1),$$

从而

$$(3.22)\qquad \limsup_{N\to\infty} C_N \geqslant 2, \quad \limsup_{N\to\infty} C_N^* \geqslant 2.$$

事实上, 对于 $N \geqslant 2$, 令 $v := \lfloor (\ln N)/\ln 2 \rfloor$,

$$f(p^\nu) := \begin{cases} 1, & 若\ p = 2\ 且\ 2^\nu \leqslant N < 2^{\nu+1}, \\ 0, & 若以上不然 \end{cases}$$

的选择给出:

$$\mathbb{E}_N(f) = \frac{1}{N}, \quad \mathbb{E}(Z_{f,N}) = \frac{1}{2^{v+1}} \leqslant \frac{1}{N},$$
$$\mathbb{V}_N(f) = \frac{1}{N}\Big(1 - \frac{1}{N}\Big),\ \mathbb{V}_N^*(f) = \frac{1}{N} + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big),\ \mathbb{V}(Z_{f,N}) = \frac{1}{2^{v+1}}\Big(1 - \frac{1}{2^{v+1}}\Big).$$

现在叙述 Turán–Kubilius 不等式. 令

$$\varepsilon_N := \frac{8}{N}\Bigg(\sum_{\substack{p^\nu q^\mu \leqslant N \\ p \neq q}} p^\nu q^\mu\Bigg)^{1/2} + \frac{4}{N}\Bigg(2\sum_{p^\nu \leqslant N} p^\nu \sum_{p \leqslant N} \frac{1}{p}\Bigg)^{1/2}.$$

用标准的分部积分, 由素数定理即得估计

$$\varepsilon_N \ll \sqrt{\frac{\ln_2 N}{\ln N}} \qquad (N \geqslant 3). \tag{3.23}$$

细节略去.

定理 3.1 (Turán–Kubilius 不等式) 对复加性函数 f, 有

$$\mathbb{V}_N^*(f) \leqslant (4 + \varepsilon_N)B_f(N)^2 \leqslant (8 + 2\varepsilon_N)\mathbb{V}(Z_{f,N}) \qquad (N \geqslant 1). \tag{3.24}$$

特别地,

$$\max(C_N, C_N^*) \leqslant 8 + O\Bigg(\sqrt{\frac{\ln_2 N}{\ln N}}\Bigg) \qquad (N \geqslant 3). \tag{3.25}$$

证明 只须证明 (3.24) 的第一个不等式, 后者由 (3.13) 可得.

先考虑 f 为实且非负的情形. 有

$$\mathbb{V}_N^*(f) = \mathbb{E}_N\big(\{f - \mathbb{E}(Z_{f,N})\}^2\big) = M_2 - 2\mathbb{E}(Z_{f,N})\mathbb{E}_N(f) + \mathbb{E}(Z_{f,N})^2, \tag{3.26}$$

其中

$$M_2 := \frac{1}{N}\sum_{n \leqslant N} f(n)^2 = \frac{1}{N}\sum_{n \leqslant x}\sum_{p^\nu \| n,\, q^\mu \| n} f(p^\nu)f(q^\mu)$$
$$= \sum_{p^\nu \leqslant N} f(p^\nu)^2 \frac{1}{N}\sum_{\substack{n \leqslant N \\ p^\nu \| n}} 1 + \sum_{\substack{p^\nu q^\mu \leqslant N \\ p \neq q}} f(p^\nu)f(q^\mu)\frac{1}{N}\sum_{\substack{n \leqslant N \\ p^\nu \| n,\, q^\mu \| n}} 1.$$

第一个内部的和式不超过 N/p^ν, 第二个至多是

$$Np^{-\nu}q^{-\mu}(1-1/p)(1-1/q)+2.$$

在 (3.11) 的记号下, 得

$$M_2 \leqslant 2B_f(N)^2+\mathbb{E}(Z_{f,N})^2+\frac{2}{N}\sum_{p^\nu q^\mu\leqslant N,\,p\neq q} f(p^\nu)f(q^\mu). \tag{3.27}$$

用 Cauchy–Schwarz 不等式估计最后一项:

$$\sum_{\substack{p^\nu q^\mu\leqslant N\\ p\neq q}}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu/2}}\frac{f(q^\mu)}{q^{\mu/2}}\cdot p^{\nu/2}q^{\mu/2}\leqslant 2B_f(N)^2\sqrt{\sum_{\substack{p^\nu q^\mu\leqslant N\\ p\neq q}}p^\nu q^\mu}.$$

代入 (3.26), 根据 (3.14) 得

$$\mathbb{V}_N^*(f)\leqslant 2B_f(N)^2+\frac{2\mathbb{E}(Z_{f,N})B_f(N)}{N}\sqrt{2\sum_{p^\nu\leqslant N}p^\nu}+\frac{4B_f(N)^2}{N}\sqrt{\sum_{\substack{p^\nu q^\mu\leqslant N\\ p\neq q}}p^\nu q^\mu}.$$

再用

$$\mathbb{E}(Z_{f,N})^2\leqslant\sum_{p^\nu\leqslant N}\frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{p^\nu\leqslant N}\frac{1-1/p}{p^\nu}\leqslant B_f(N)^2\sum_{p\leqslant N}\frac{1}{p}$$

形式下的 Cauchy–Schwarz 不等式, 推出当 f 在 $\mathbb{R}^+$ 中取值时

$$\mathbb{V}_N^*(f)\leqslant\left(2+\frac{1}{2}\varepsilon_N\right)B_f(N)^2.$$

当 f 为实且变号时, 引进两个函数 f^+ 和 f^-, 其定义为

$$f^\pm(p^\nu)=\max\big(\pm f(p^\nu),0\big).$$

于是对任意整数 $n\geqslant 1$, 有

$$\big\{f(n)-\mathbb{E}(Z_{f,N})\big\}^2\leqslant 2\big\{f^+(n)-\mathbb{E}(Z_{f^+,N})\big\}^2+2\big\{f^-(n)-\mathbb{E}(Z_{f^-,N})\big\}^2$$

及 $B_f(N)^2=B_{f^+}(N)^2+B_{f^-}(N)^2$ $(N\geqslant 1)$. 这在该情形下推出了 (3.24).

当 f 为复数时, 对 f 的实部和虚部分别用上述结论知不等式显然成立.

□

(3.24) 中出现的常数 4 和 8 并非最优. Kubilius 于 1983 年证明了若令

$$B_f^+(N)^2:=\sum_{p^\nu\leqslant N}\frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu},$$

则

$$C_N^+ := \sup_{f\neq 0} \mathbb{V}_N^*(f)/B_f^+(N)^2 = \tfrac{3}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln N}}\right). \tag{3.28}$$

在 C_N^+ 的定义中对实或复加性函数 f 取上确界具有同样的效果. 不等式另两个独立的证明以及常数 $\frac{3}{2}$ 的最优性分别由 Hildebrand (1983) 和 Stein (1984) 得出.

正如 La Bretèche 和 Tenenbaum (2005b) 所提到的, 从 Hildebrand 的证明及 (3.22) 中较容易得出

$$\limsup_{N\to\infty} C_N^* = \limsup_{N\to\infty} C_N = 2. \tag{3.29}$$

该结论蕴涵了概率数论与概率模型之间差距的一个重要的度量. 常数 C_N 和 C_N^* 有界的事实说明了 ξ_{p^ν} 独立性的影响; 而它们共同的上极限不为 1 的事实则说明了这种影响的相对性.

长久以来, Turán–Kubilius 不等式的传统叙述是用 C_N^+ 或与之接近的值来表示的②. 将 C_N 解释成数论函数与其概率模型经验方差之比 C_N^* 的根本思想基本上反映了同样的现象, 但较易处理. 这促使我们倾向于 (3.29) 的形式. 同样的情况还出现在 Turán–Kubilius 不等式脆数情形推广之中, 只是更加绝对, 此时不等式在选取适当的概率模型的条件下才成立: 见第五章的注记.

§3.3 Turán–Kubilius 不等式的对偶形式

设 f 是加性数论函数且 $N\in\mathbb{N}^*$. 对 $1\leqslant n\leqslant N$, 有

$$f(n) - \mathbb{E}(Z_{N,f}) = \sum_{r\leqslant N} c_{nr} y_r,$$

其中

$$y_r := \begin{cases} f(p^\nu)\sqrt{(1-1/p)/p^\nu}, & \text{若 } r = p^\nu, \\ 0, & \text{若 } r \neq p^\nu, \end{cases}$$

② Hildebrand (1983) 还将 $\mathbb{V}_N(f)$ 与

$$B_f^*(N)^2 := \sum_{p^\nu\leqslant N} |f(p^\nu)|^2 w_N(p^\nu) - \sum_{p\leqslant N}\left|\sum_{1\leqslant\nu\leqslant(\ln N)/\ln p} f(p^\nu)w_N(p^\nu)\right|^2$$

作比较, 其中记号 w_N 在 (3.7) 中定义. 数值 $B_f^*(N)^2$ 表示形如

$$f_p(n) := \begin{cases} f(p^\nu), & \text{若 } p^\nu \| n, \\ 0, & \text{若 } p\nmid n \end{cases}$$

的数论函数 f_p 相对于 ν_N 的方差之和.

且在 (3.18) 的记号下

$$c_{nr} := \begin{cases} \xi_{p^\nu}(n)\sqrt{p^\nu/(1-1/p)} - \sqrt{(1-1/p)/p^\nu}, & 若\ r = p^\nu, \\ 0, & 若\ r \neq p^\nu. \end{cases}$$

在 (3.18) 的记号下, Turán–Kubilius 定理还可写成

$$\sum_{n\leqslant N}\Big|\sum_{r\leqslant N} c_{nr}y_r\Big|^2 \leqslant NC_N^* \sum_{r\leqslant N}|y_r|^2.$$

由于 y_r 是任意复数, 可用第一部分引理 4.8 中的对偶原则, 得

$$\sum_{r\leqslant N}\Big|\sum_{n\leqslant N} c_{nr}a_n\Big|^2 \leqslant NC_N^* \sum_{n\leqslant N}|a_n|^2$$

对任意复数列 $\{a_n\}_{n=1}^N$ 成立. 注意到对 $r = p^\nu$, 有

$$\sum_{n\leqslant N} c_{nr}a_n = \sqrt{\frac{p^\nu}{1-1/p}}\Big\{\sum_{n\leqslant N,\, p^\nu\|n} a_n - \sum_{n\leqslant N} a_n\Big\}.$$

于是可知下述结论.

定理 3.2 对任意复数列 $\{a_n\}_{n=1}^N$, 有

$$\sum_{p^\nu\leqslant N}\frac{p^\nu}{1-1/p}\Big|\sum_{n\leqslant N,\, p^\nu\|n} a_n - \frac{1-1/p}{p^\nu}\sum_{n\leqslant N} a_n\Big|^2 \leqslant NC_N^* \sum_{n\leqslant N}|a_n|^2. \tag{3.30}$$

这样便重现了第一部分定理 4.14 的一个变体, 先前是作为大筛法不等式的一个推论而得的. 指标为 p, 即相应于 $\nu = 1$ 的项的比较说明了两个相反的影响之间的差异: 对每个素数 p 仅考虑了一个剩余类, 但对 p 的求和明显要长.

该估计因其全然一般性及其完全一致性而便于应用. 它表示在平均意义上分布足够稠密的序列在剩余类 $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p^\nu)$ 中是良好地分布的.

Elliott (1997) 用一整本书的篇幅来讲述并研究为应用以定理 3.2 为原型的对偶性所需的各种工具. 我们强烈建议读者参考他的讲义, 以了解并深入认识现代解析和概率数论的基础思想.

§3.4 Hardy–Ramanujan 定理及其他应用

如同 §3.2 中所提到的, Turán–Kubilius 不等式是特别适于确定加性函数正规阶的工具. 下述一般结论成立, 其中用到了 (3.10) 和 (3.11) 的记号.

定理 3.3 设 f 为复值加性函数. 在

$$B_f(N) = o\big(\mathbb{E}(Z_{f,N})\big) \qquad (N \to \infty) \tag{3.31}$$

的假设下, 函数 $n \mapsto g(n) := \mathbb{E}\big(Z_{f,n}\big)$ 是 f 的正规阶.

证明 先证 $g(n)=\{1+o(1)\}g(N)$ 对除了至多 $o(N)$ 个以外的 $n\leqslant N$ 成立. 这可从下列对 $\sqrt{N}<n\leqslant N$ 成立的上界估计而得：

$$|g(N)-g(n)|=\Big|\sum_{n<p^\nu\leqslant N}f(p^\nu)\frac{1-1/p}{p^\nu}\Big|$$
$$\leqslant\Big(\sum_{\sqrt{N}<p^\nu\leqslant N}\frac{1}{p^\nu}\sum_{p^\nu\leqslant N}\frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu}\Big)^{1/2}\ll B_f(N)=o\big(g(N)\big).$$

于是, 倘若对任意固定的 $\varepsilon>0$ 均有关系

$$\nu_N\big\{n:|f(n)-g(N)|>\varepsilon|g(N)|\big\}=o(1), \tag{3.32}$$

那么定理结论便成立. 而由定理 3.1 及假设 (3.31), 上式左边不超过

$$\mathbb{E}_N\Big(\Big|\frac{f(n)-g(N)}{\varepsilon g(N)}\Big|^2\Big)\ll\Big|\frac{B_f(N)}{\varepsilon g(N)}\Big|^2=o(1), \tag{3.33}$$

定理于是得证. □

历史上定理 3.3 应用的例子是函数 $\omega(n)$ 和 $\Omega(n)$. 在这两种情形下, 不难得出

$$g(N)=\ln_2 N+O(1),\qquad B_f(N)^2=\ln_2 N+O(1), \tag{3.34}$$

从而 (3.31) 成立. 这样便得到如下著名的结论：整数 n 的素因子数, 无论计或不计重数, 都正规等价于 $\ln_2 n$. 通常称该结论为 Hardy–Ramanujan 定理, 见 Hardy 和 Ramanujan (1917). 以下定量的版本是 Turán (1934) 得出的结果.

定理 3.4 设 $\xi(N)\to\infty$. 对 $N\geqslant 3$, 有

$$\big|\big\{n\leqslant N:|\omega(n)-\ln_2 N|>\xi(N)\sqrt{\ln_2 N}\big\}\big|\ll N/\xi(N)^2. \tag{3.35}$$

另外, 将 $\omega(n)$ 换成 $\Omega(n)$ 后同样的上界估计仍成立.

证明 根据 (3.34), 只须在 (3.33) 中取 $\varepsilon=\xi(N)/\sqrt{\ln_2 N}$ 即可. □

Hardy 和 Ramanujan 原始的证明基于局部分布 $\nu_N\{n:\omega(n)=k\}$ 一个对 N 和 $k\geqslant 1$ 一致的下界估计, 从而过程相当复杂, 见第 422 页习题 264. 为简化它, Turán 于 1934 年证明了定理 3.1 的初始形式.

考虑到不等式 $2^{\omega(n)}\leqslant\tau(n)\leqslant 2^{\Omega(n)}$ 对所有整数 $n\geqslant 1$成立, 从定理 3.4 立即推出

$$\tau(n)=(\ln n)^{\ln 2+o(1)}\qquad \text{a.e.} \tag{3.36}$$

及

$$(3.37) \qquad \tau(n) = (\ln n)^{\ln 2} \exp\Big\{O\big(\xi(n)\sqrt{\ln_2 n}\big)\Big\} \qquad \text{a.e.}$$

对所有函数 $\xi(n) \to \infty$ 成立. 严格地讲, 这些关系应解读成 $\ln \tau(n)$ 有正规阶. 而在混用概念下, 通常将 (3.36) 或 (3.37) 说成 $\tau(n)$ 有正规阶 $(\ln n)^{\ln 2}$.

这里第一次见到概率数论中常见的一个情景: 均阶 (这里是 $\ln n$) 不反映常态 (这里正规阶是 $(\ln n)^{\ln 2}$). 这种现象的根源在于和式

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n)$$

被少数使 $\tau(n)$ 值"很大"的"非常"指标所"控制". 后文中将看到 (见习题 274 (b)) 它们恰是使 $\omega(n) \sim 2\ln_2 n$ 的那些 n. 实际上, 对每个 $\varepsilon > 0$, 有

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ |\omega(n) - 2\ln_2 n| \leqslant \varepsilon \ln_2 n}} \tau(n) \sim x \ln x \sim \sum_{n \leqslant x} \tau(n) \qquad (x \to \infty).$$

这样的情形应有实际应用. 它开辟了在一些求和式中将函数 $\tau(n)$ 看成权重系数的可能性, 使得让 $\omega(n) \sim 2\ln_2 n$ 的那些 n 具有较大的权重.

下面不加证明地给出 Turán–Kubilius 定理的一些直接应用. $\xi(n)$ 表示使得 $\xi(n) \to \infty$ 的任意量.

(a) 对 $a \geqslant 1, q \geqslant 1, (a, q) = 1$, 令 $\omega(n; a, q)$ 为 n 在算术数列 $p \equiv a \pmod q$ 中素因子个数. 有

$$(3.38) \qquad \omega(n; a, q) = \frac{\ln_2 n}{\varphi(q)} + O\Big(\xi(n)\sqrt{\ln_2 n}\Big) \qquad \text{a.e..}$$

更一般地, 若 E 表示素数类, 使得

$$E(x) := \sum_{p \leqslant x,\, p \in E} \frac{1}{p} \to +\infty \qquad (x \to +\infty),$$

那么

$$(3.39) \qquad \omega(n; E) := \sum_{p|n,\, p \in E} 1 = E(n) + O\big(\xi(n)\sqrt{E(n)}\big) \qquad \text{a.e..}$$

(b) 对固定的 $k \geqslant 2$, 考虑将 n 表示成 k 个正整数之积的方法数 $\tau_k(n)$, 有

$$(3.40) \qquad \tau_k(n) = (\ln n)^{\ln k} \exp\big\{O\big(\xi(n)\sqrt{\ln_2 n}\big)\big\} \qquad \text{a.e..}$$

注意到 $\tau_k(n)$ 的正规阶 $(\ln n)^{\ln k}$ 与均阶 $(\ln n)^{k-1}/(k-1)!$ 并不相等, 见第二部分定理 5.2.

(c) 对 $k \geqslant 1$, 令 $\delta_k(n)$ 为将 n 表示成 $n=[m_1,\ldots,m_k], m_1 \geqslant 1,\ldots,m_k \geqslant 1$ 的方法数, 有

$$\delta_k(n)=(\ln n)^{\ln(2^k-1)}\exp\left\{O\big(\xi(n)\sqrt{\ln_2 n}\big)\right\} \qquad \text{a.e..} \tag{3.41}$$

这里正规阶与均阶仍相去甚远: 用卷积 $\delta_k * \mathbf{1}=\tau^k$, 从第二部分定理 5.2 中易得

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_k(n)\sim C_k x(\ln x)^{2^k-2}, \tag{3.42}$$

其中

$$C_k := \frac{1}{(2^k-2)!}\prod_p\left(1-p^{-1}\right)^{2^k}\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{(\nu+1)^k}{p^\nu}.$$

§3.5 乘性函数的实效估计

本节讲述证明 Hardy 和 Ramanujan 定理的另一个工具, 即某类乘性函数均值的一致估计. 从现在起就应意识到所有的应用都依赖于得到的估计与其中函数的选择无关这一事实.

定理 3.5 设 f 为非负乘性函数, 对适当的常数 A 和 B 满足

(i) $\sum_{p\leqslant y} f(p)\ln p \leqslant Ay \qquad (y\geqslant 0)$,

(ii) $\sum_p\sum_{\nu\geqslant 2}\dfrac{f(p^\nu)}{p^\nu}\ln p^\nu \leqslant B$,

那么, 对 $x>1$ 有

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)\leqslant (A+B+1)\frac{x}{\ln x}\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n}. \tag{3.43}$$

证明 记 $S(x)$ 为 (3.43) 左边, 并令 $L(x):=\sum_{n\leqslant x} f(n)/n$. 显然有

$$S(x)\leqslant xL(x) \qquad (x\geqslant 1). \tag{3.44}$$

不妨记

$$\begin{aligned} S(x)\ln x &= \sum_{n\leqslant x} f(n)\ln\frac{x}{n}+\sum_{n\leqslant x} f(n)\sum_{p\| n}\ln p+\sum_{n\leqslant x} f(n)\sum_{\nu\geqslant 2,\, p^\nu\| n}\ln p^\nu \\ &= S_1+S_2+S_3. \end{aligned}$$

显然 $S_1\leqslant xL(x)$. 在 S_2 中换元 $n=mp$, 得

$$S_2=\sum_{m\leqslant x} f(m)\sum_{p\leqslant x/m,\, p\nmid m} f(p)\ln p\leqslant AxL(x).$$

最后, 交换和号后得

$$S_3=\sum_p\sum_{\nu\geqslant 2}f(p^\nu)\ln p^\nu\sum_{m\leqslant x/p^\nu,\,p\nmid m}f(m)\leqslant\sum_p\sum_{\nu\geqslant 2}f(p^\nu)\ln p^\nu S\Big(\frac{x}{p^\nu}\Big)$$
$$\leqslant\sum_p\sum_{\nu\geqslant 2}f(p^\nu)\ln p^\nu\,\frac{x}{p^\nu}L\Big(\frac{x}{p^\nu}\Big)\leqslant BxL(x),$$

其中用到了 (3.44) 以及 L 单调上升的事实.

命题于是得证. □

实际应用中, 常用到下列形式的定理 3.5.

推论 3.6 设 λ_1,λ_2 是常数, 使得 $\lambda_1>0$, $0\leqslant\lambda_2<2$. 对任意满足

$$0\leqslant f(p^\nu)\leqslant\lambda_1\lambda_2^{\nu-1}\qquad(p\geqslant 2,\ \nu=1,2,\ldots)\tag{3.45}$$

的乘性函数 f 一致地有

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)\ll x\prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\qquad(x\geqslant 1),\tag{3.46}$$

且 (3.46)中隐含的常数不超过

$$4\big(1+9\lambda_1+\lambda_1\lambda_2/(2-\lambda_2)^2\big).\tag{3.47}$$

注 这里不寻求优化 (3.47) 中出现的常数.

证明 显然 (3.45) 推出定理 3.5 中的条件 (i) 和 (ii). 由第一部分定理 1.4, 有 $A\leqslant\lambda_1\ln 4$. 另外,

$$B\leqslant\lambda_1\sum_p\frac{\ln p}{p}\sum_{\nu\geqslant 2}\nu\Big(\frac{\lambda_2}{p}\Big)^{\nu-1}\leqslant 2\lambda_1\lambda_2\sum_p\frac{\ln p}{(p-\lambda_2)^2}$$
$$\leqslant\frac{2\lambda_1\lambda_2\ln 2}{(2-\lambda_2)^2}+4\lambda_1\sum_{n\geqslant 3}\frac{\ln n}{(n-2)^2}.$$

容易证明对 n 的级数 $\leqslant\frac{5}{2}$. 观察到

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n}\leqslant\prod_{p\leqslant x}\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu},$$

于是得到要求的估计, 其常数不超过

$$K\ln 4\Big(\frac{1+10\lambda_1}{\ln 4}+\lambda_1+\frac{\lambda_1\lambda_2}{(2-\lambda_2)^2}\Big),$$

其中 $K:=\sup_{x\geqslant 2}K(x)$, $K(x):=(1/\ln x)\prod_{p\leqslant x}(1-1/p)^{-1}$.

下证 $K=K(2)=2/\ln 2$. 为此, 先从数值上验证 $K(x)\leqslant K(2)$ 对 $x\leqslant 300$ 成立. 然后, 观察到对 $x>y\geqslant 2$ 有

$$K(x)\leqslant\frac{\pi^2}{6\ln x}\prod_{p\leqslant x}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\leqslant\frac{\pi^2}{6\ln x}\prod_{p\leqslant y}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\exp\Big\{\sum_{y<p\leqslant x}\frac{1}{p}\Big\}.$$

用形如 $F(t):=\sum_{p\leqslant t}(\ln p)/p\leqslant\ln(4t)$ $(t\geqslant 2)$ 的 Mertens 第一定理 (第一部分定理 1.8) 以及 Abel 求和法, 易得

$$\sum_{y<p\leqslant x}\frac{1}{p}\leqslant 1+\frac{\ln 4-F(y)}{\ln y}+\ln_2 x-\ln_2 y\qquad(x>y\geqslant 2),$$

取 $y=300$, 从中得出 $K(x)<2.87<K(2)$ 对 $x>300$ 成立. 命题得证. □

从推论 3.6 中立得下述结论. 将用它来证明定理 3.4 一个加强形式. 对于 $t>0$, 记

$$\omega(n,t):=\sum_{p\mid n,\,p\leqslant t}1,\qquad\Omega(n,t):=\sum_{p^\nu\|n,\,p\leqslant t}\nu\qquad(n\geqslant 1).\tag{3.48}$$

定理 3.7 *设 $y_0>0$. 对 $0\leqslant y\leqslant y_0$, $x\geqslant t\geqslant 2$ 一致地有*

$$\sum_{n\leqslant x}y^{\omega(n,t)}\ll x(\ln t)^{y-1}.\tag{3.49}$$

在额外的假设 $y_0<2$ 下, 相同的估计对 $\Omega(n,t)$ 亦成立.

证明 对每个 t, 函数 $n\mapsto y^{\omega(n,t)}$ 是乘性的, 且对于 $\lambda_1=1+y_0$, $\lambda_2=1$ 满足 (3.45). 在 $y^{\Omega(n,t)}$ 的情形, 条件还对 $\lambda_1=1+y_0$, $\lambda_2=\max(1,y_0)$ 成立. 上界估计 (3.46) 于是等于

$$x\prod_{p\leqslant t}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big\{1+\frac{y}{p}+O\Big(\frac{1}{p^2}\Big)\Big\}.$$

用 Mertens 公式, 从中便得到要证的结论. □

定理 3.8 *对 $x\geqslant t\geqslant 3$ 和 $0\leqslant\xi<\sqrt{\ln_2 t}$ 一致地有*

$$\Big|\Big\{n\leqslant x:|\omega(n,t)-\ln_2 t|>\xi\sqrt{\ln_2 t}\Big\}\Big|\ll x\mathrm{e}^{-\xi^2/3}.\tag{3.50}$$

另外, 若 $\xi\ll(\ln_2 t)^{1/6}$, 可将 $\mathrm{e}^{-\xi^2/3}$ 换成 $\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$. 同样的结论对 $\Omega(n,t)$ 仍成立.

当 $t=x$ 时, 对任意 $n\leqslant x$ 有 $\omega(n,t)=\omega(n)$. 上界估计 (3.50) 在其成立域内对 (3.35) 有显著改进.

证明 令 $\delta := \xi/\sqrt{\ln_2 t}$. 于是 $0 \leqslant \delta < 1$. 用 $\chi(n)$ 表示使得

$$\left|\omega(n,t) - \ln_2 t\right| > \delta \ln_2 t \tag{3.51}$$

的 n 构成的集合的示性函数. 有

$$\chi(n) \leqslant (1-\delta)^{\omega(n,t)-(1-\delta)\ln_2 t} + (1+\delta)^{\omega(n,t)-(1+\delta)\ln_2 t}.$$

对 $n \leqslant x$ 求和并用 (3.49), 得

$$\sum_{n\leqslant x} \chi(n) \ll x(\ln t)^{-Q(1-\delta)} + x(\ln t)^{-Q(1+\delta)}, \tag{3.52}$$

其中

$$Q(y) := y\ln y - y + 1 = \int_0^{y-1} \ln(1+v)\,\mathrm{d}v \qquad (y > 0). \tag{3.53}$$

对 $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ 有 $Q(1\pm\delta) \geqslant \frac{1}{3}\delta^2$ 及 $Q(1\pm\delta) = \frac{1}{2}\delta^2 + O(\delta^3)$. 这推出命题中的界. $\Omega(n,t)$ 情形的证明类似. □

§3.6 整数素因子列的正规结构

整数 n 的因子分解由阶梯函数 $\Omega(n,t)$ 完全确定. 我们在此考虑函数 $\omega(n,t)$, 因为它较好处理. 无论如何, 该选择并不重要, 这是由于对任意 n, t 有 $0 \leqslant \Omega(n,t) - \omega(n,t) \leqslant \Omega(n) - \omega(n)$; 第一部分定理 3.6 和定理 3.7 说明了最后的差的均值有界, 于是上界估计

$$\Omega(n,t) - \omega(n,t) \ll \xi(n) \qquad \text{a.e.} \tag{3.54}$$

对任意函数 $\xi(n) \to \infty$ 对于 t 一致成立.

定理 3.8 对固定的 t 描述了 $\omega(n,t)$ 的性态. 然而, 对 n 乘积结构的认识只能来自于其作为 t 的函数的变差. 于是便需要函数 $t \mapsto \omega(n,t)$ 相对于一致收敛范数的一个几乎处处成立的估计. 以下便是这样的一个结论, 容易从定理 3.8 出发而得.

定理 3.9 设 $\varepsilon > 0$ 及 $\xi(n) \to \infty$, 有

$$\sup_{\xi(n)\leqslant t\leqslant n} \left|\frac{\omega(n,t) - \ln_2 t}{\sqrt{2(\ln_2 t)(\ln_3 t)}}\right| \leqslant 1 + \varepsilon \qquad \text{a.e.}. \tag{3.55}$$

证明 令 ξ 为任意大的实数, 有 $\xi(n) > \xi$ a.e.. 于是只须证明, 当 $\xi \to \infty$ 时, 若将 $\xi(n)$ 换成 ξ, 不满足 (3.55) 的 n 的上密率趋于 0. 为此引进试验点

$$t_j := \exp\exp j \qquad (j \geqslant \ln_2 \xi),$$

注意到, 由于 $\omega(n,t)$ 是 t 的单调递增函数且 $\ln_2 t_{j+1} - \ln_2 t_j \leqslant 1$, 对足够大的 ξ 有

$$\sup_{\xi \leqslant t \leqslant n} \left| \frac{\omega(n,t) - \ln_2 t}{\sqrt{2(\ln_2 t)(\ln_3 t)}} \right| > 1 + \varepsilon \implies \sup_{\xi \leqslant t_j \leqslant n} \left| \frac{\omega(n,t_j) - j}{\sqrt{2j \ln j}} \right| > \sqrt{1+\varepsilon}.$$

对任意使得 $\ln_2 \xi \leqslant j \leqslant \ln_2 x$ 的整数 j, 在定理 3.8 中选 $t = t_j$ 及 $\xi = \sqrt{(2+2\varepsilon)\ln j}$ 得满足上述最后一个不等式的 n 的上密率

$$\ll \sum_{j \geqslant \ln_2 \xi} \frac{1}{j^{1+\varepsilon}} \ll \frac{1}{(\ln_2 \xi)^{\varepsilon}}.$$

命题得证. □

可重新叙述定理 3.9, 直接引进 n 的素因子分解. 用 $p_j(n)$ 表示 n 的第 j 个素因子, 于是 n 的素因子分解可写成

$$n = \prod_{1 \leqslant j \leqslant \omega(n)} p_j(n)^{\nu_j},$$

其中 ν_j 是正整数. 这样 $\omega(n, p_j(n)) = j$. 在 (3.55) 中换元 $t \mapsto p_j(n)$, 得如下结论.

定理 3.10　设 $\varepsilon > 0, \xi(n) \to \infty$, 有

$$\sup_{\xi(n) \leqslant j \leqslant \omega(n)} \left| \frac{\ln_2 p_j(n) - j}{\sqrt{2j \ln j}} \right| \leqslant 1 + \varepsilon \qquad \text{a.e.}. \tag{3.56}$$

该结论的一个更精确的形式先是由 Erdős (1946) 所提出的, 但没有证明. Hall 和 Tenenbaum (1988) 第一章中给出了细节. 从中得出, 对通常的整数, 其第 j 个素因子的阶为 $\exp\exp j$. 这导出了整数通常乘积结构的一个可贵的启发性的模型. 然而也不应夸大其意义: 生搬硬套该模型导致错误的猜想, 见 Hall 和 Tenenbaum (1988) §1.2, 也见注记.

注记

§3.2　下界估计 (3.22) 最先是 La Bretèche 和 Tenenbaum (2005b) 发现的.

若 f 仅限于强加性的, J. Lee (1989) 的一个优雅的结果说明

$$C_N^+ = \tfrac{3}{2} - \frac{\alpha}{\ln N} + O\left(\left(\frac{\ln_2 N}{\ln N}\right)^2\right), \tag{3.57}$$

其中 α 是绝对正常数. 特别地, 这推出存在绝对的 N_0, 使得对任意强加性函数 f, 有

$$\mathbb{V}_N^*(f) \leqslant \tfrac{3}{2} B_f^+(N)^2 \leqslant 6\mathbb{V}(Z_{f,N}) \qquad (N \geqslant N_0). \tag{3.58}$$

一般倾向于认为 f (相对于 ν_N) 的分布接近于 $Z_{f,N}$ 的分布. 在该方向上 Ruzsa (1982) 从方法论的角度对问题作了有趣的分类:

(a) *直接方法*: 概率数论只提供指导性的模型, 而证明则是纯数论的;

(b) *间接方法*: 其特点是将 (f,ν_N) 和 $(Z_{f,N},P)$ 作为随机变量相比较, 且数论上的结论作为某个具体的概率结论的次级推论出现的.

在 Turán–Kubilius 不等式的情形, 经典的直接结果 (不计常数) 是

$$\mathbb{V}_N(f) \ll B_f^+(N)^2, \tag{3.59}$$

而间接结论则是

$$\mathbb{V}_N(f) \ll \mathbb{V}(Z_{f,N}). \tag{3.60}$$

应用概率论中独立随机变量和的方差定理, 由于

$$V(\zeta_p) \leqslant E(\zeta_p^2) \leqslant \sum_{1\leqslant\nu\leqslant(\ln N)/\ln p} \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu}.$$

从后者可推出前者. 虽然我们坚持用 (3.60) 的形式 (这更为基本) 来叙述, 定理 3.1 的证明大体来自于 Elliott (1979) 直接形式的证明. 下列著名的结论属于 Ruzsa, 是一个间接方法, (3.60) 是其显然推论.

定理 3.11 (Ruzsa, 1984) *设 f 为复值加性函数, $F:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 是单调上升函数. 对 $A\in\mathbb{R}$, $N\in\mathbb{Z}^+$ 一致地有*

$$\mathbb{E}_N\big(F(|f-A|)\big) \ll \mathbb{E}\big(F(3|Z_{f,N}-A|)\big). \tag{3.61}$$

确定 (3.61) 中最优的常数是有趣的问题. Ruzsa 证明了一般情形下不能将常数 3 换成 N 的趋于 1 的函数, 这对他 1984 年文章中的一个猜想作了肯定回答. 更确切地, 他证明了 (私下交流) 最优的常数 $\geqslant 1+2/\mathrm{e}\approx 1.735\,75$.

Turán–Kubilius 不等式不总能给出 $\mathbb{V}_N(f)$ 或 $\mathbb{V}_N^*(f)$ 准确的增长阶. 1983 年, Ruzsa 证明了对实值 f 有

$$\mathbb{V}_N(f) \asymp \min_{\lambda\in\mathbb{R}}\big\{\lambda^2 + B_N^+(f-\lambda\ln)^2\big\}. \tag{3.62}$$

然后 Hildebrand 得到 $\mathbb{V}_N(f)$ 仅依赖于 $f(p)$, $p\leqslant N$ 的渐近展式. 他从其结果中得到了若干有趣的推论, 其一是 (3.28) 中可取因子 $\frac{3}{2}+o(1)$ 这一事实的新证; 另一则是满足

$$\mathbb{V}_N(f) \asymp B_f^+(N)^2 \tag{3.63}$$

的加性函数的判别法.

定理 3.12 (Hildebrand, 1983) 设 f 为加性函数. (3.63) 成立当且仅当

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{B_f^+(N)\ln N}\left|\sum_{p\leqslant N}\frac{f(p)\ln p}{p}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.64}$$

§3.3 Elliott (1979, 第四章) 给出了定理 3.2 中不等式 (3.30) 的若干变体, 比如以下结论.

定理 3.13 (Elliott, 1979) 对任意实数 $x \geqslant 2$ 及任意复数列 $\{a_n : 1 \leqslant n \leqslant x\}$, 有

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}} p\left|\sum_{n\leqslant x,\, p|n} a_n - \frac{1}{p}\sum_{n\leqslant x} a_n\right|^2 \leqslant \Big(1+\frac{36}{\ln x}\Big)x\sum_{n\leqslant x}|a_n|^2.$$

这里常数 36 也不是最优的.

有时 (3.28) 的对偶形式比 (3.29) 的更有用. 于是得到, 对任意复数列 $\{a_n\}_{n=1}^N$, 有

$$\sum_{p^\nu\leqslant N} p^\nu\left|\sum_{p^\nu\|n,\, n\leqslant N} a_n - \frac{1-1/p}{p^\nu}\sum_{n\leqslant N} a_n\right|^2 \leqslant NC_N^+\sum_{n\leqslant N}|a_n|^2.$$

在某些应用中, $C_N^+ = \frac{3}{2}+o(1)$ 的事实可有关键作用.

关于 Turán–Kubilius 不等式和大筛法之间更深刻的联系, 见 Elliott (1979) 第四章, 特别是 Elliott (1997) 的书.

§3.4 为证明定理 3.4, Turán 在其 1934 年的论文中提出了关于 $\omega(n)$ 的定理 3.1 中的不等式, 但没有确定常数的值. 它随即 (1936) 将该结果推广到 $0 \leqslant f(p) \leqslant C$ 的情形. 后来 Kubilius (1956, 1964) 系统地发展了该方法.

§3.5 定理 3.5 见于 Hall 和 Tenenbaum (1988), 定理 01. 它是 Halberstam 和 Richert 一个结果的较弱的简化版本, 后者还推广了 Hall (1974) 的一个定理, 见习题 276. 以下是其叙述.

定理 3.14 (Halberstam 和 Richert, 1979) 设 f 为非负乘性函数, 对适当的常数 $\kappa > 0$ 满足

(i) $\displaystyle\sum_{p\leqslant y} f(p)\ln p \leqslant \kappa y + O\Big(\frac{y}{(\ln y)^2}\Big) \qquad (y\geqslant 2)$,

(ii) $\displaystyle\sum_{p\geqslant y}\sum_{\nu\geqslant 2}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\ln p^\nu \ll \frac{1}{\ln y} \qquad (y\geqslant 2)$,

那么

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) \leqslant \Big\{1+O\Big(\frac{1}{\ln x}\Big)\Big\}\frac{\kappa x}{\ln x}\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n} \qquad (x\geqslant 2). \tag{3.65}$$

隐含的常数至多依赖于 (i) 和 (ii) 中隐含的常数.

Hildebrand (1984a, 1987b) 给出了类似的上下界估计.

(3.65) 中的常数 κ 最优. 通过选取

$$f(p^\nu) := \begin{cases} 0, & 若\ p \leqslant x/\ln x, \\ \kappa, & 若\ x/\ln x < p \leqslant x \end{cases}$$

可看出这一点.

定理 3.8 证明的技巧是一种极丰富的一般初等方法, 见 Hall 和 Tenenbaum (1988) 第零章, 以及本书第三部分 §5.1. 在定理 3.8 中 $t = x$ 的情形, 其思想可追溯到 Turán, 见 Elliott (1980), 第 18~20 页.

定理 3.5 其他应用见习题 268 – 习题 274.

§3.6 Erdős (1946) 提出了定理 3.10 更精确的形式, 在 Hall 和 Tenenbaum (1988) 第一章及其后有详细证明.

定理 3.15 (Erdős, 1946) *设 $\varepsilon > 0$ 且 $\xi(n)$ 随 n 足够慢地趋于 $+\infty$, 那么有*

$$\sup_{\xi(n)\leqslant j\leqslant \omega(n)} \left| \frac{\ln_2 p_j(n) - j}{\sqrt{2j\ln_2 j}} \right| \leqslant 1+\varepsilon \qquad \text{a.e..} \tag{3.66}$$

另外, 若在右边将 $1+\varepsilon$ 换成 $1-\varepsilon$, 满足 (3.66) 的 n 具有零密率.

该结果证明的主要思想是验证数论函数

$$\omega(n,t) = \sum_{p\leqslant t} \chi_p(n)$$

渐近地遵循复合对数分布, 其中 $\chi_p(n)$ 是被 p 整除的整数 n 构成的集合的示性函数. 如前述所见, χ_p 不是完全独立的, 这是最主要的困难.

对个别的 $j = j(n)$ 值, 可能得到更细的信息. 比如 Galambos 证明了如下结论.

定理 3.16 (Galambos, 1976) *设 $\varepsilon > 0$ 及 $j = j(N) \to +\infty$, 使得*

$$j(N) \leqslant \ln_2 N - (\ln_2 N)^{(1/2)+\varepsilon},$$

那么

$$\lim_{N\to\infty} \nu_N\{n : \ln_2 p_j(n) \leqslant j + z\sqrt{j}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t. \tag{3.67}$$

设 $\varepsilon > 0$ 及 $j = j(N) \to +\infty$, 使得 $j(N) \leqslant (1-\varepsilon)\ln_2 N$, 那么

$$\lim_{N\to\infty} \nu_N\{n : \ln_2 p_{j+1}(n) - \ln_2 p_j(n) \leqslant z\} = 1 - \mathrm{e}^{-z} \quad (z > 0). \tag{3.68}$$

定理 3.9、定理 3.10 或定理 3.15 预示了 $\omega(n;s,t) := \omega(n,t) - \omega(n,s)$ 的正规阶是 $\ln(\ln t/\ln s)$. Erdős 于 1969 年证明了对 $3 \leqslant s \leqslant t \leqslant n$ 一致地有

$$\omega(n;s,t) \sim \ln(\ln t/\ln s) \qquad \text{a.e.},$$

只要右边的项比 $\ln_3 n$ 更快地趋于无穷. 这个条件其实是必要的. 更多关于素因子正规分布见 Bovey (1977) 的论文.

可用定理 3.15 来确定整数第 j 个因子的正规阶. 用 $\{d_j(n) : 1 \leqslant j \leqslant \tau(n)\}$ 表示 n 的因子渐升列. 有如下结论 (习题 269 中有该结论一个较弱的形式).

定理 3.17 (Hall 和 Tenenbaum, 1988) *设 $\varepsilon > 0$ 并令 $\xi(n)$ 为随 n 足够慢地趋于 $+\infty$ 的函数, 有*

$$\sup_{\xi(n)\leqslant j\leqslant \tau(n)} \left| \frac{\ln_2 d_j(n) - \ln j/\ln 2}{\sqrt{(2/\ln 2)\ln j \ln_3 j}} \right| \leqslant 1+\varepsilon \qquad \text{a.e.}. \tag{3.69}$$

另外, 若将右边的 $1+\varepsilon$ 换成 $1-\varepsilon$, 满足 (3.69) 的 n 构成的集合的密率为零.

从而正规整数的因子结构的直观模型为

$$d_j(n) \approx \exp\left\{j^{1/\ln 2}\right\} \qquad (\xi(n) \leqslant j \leqslant \tau(n)). \tag{3.70}$$

这与 $\tau(n)$ 的正规阶 $(\ln n)^{\ln 2}$ 一致, 但对该等价关系太局部的解读却导致错误的假说. 比如, 先前 Erdős 的一个猜想称

$$\min_{1\leqslant j\leqslant \tau(n)} \frac{d_{j+1}(n)}{d_j(n)} \to 1, \qquad \text{a.e.}. \tag{3.71}$$

由 Maier 和 Tenenbaum (1984) 所证明. 这推出当 $j \to \infty$ 时最小值可达到, 若对符号 $\approx$ 赋以过精确的意义便与 (3.70)矛盾.

另一整数因子集结构的模型是 $\ln 2$ 维分形, 同样与 (3.70) 一个过为狭隘的解读矛盾. 然而该模型却适用于与因子列局部结构相联系的数论函数有关的较精细的算术结论, 见 Mendès France 和 Tenenbaum (1993).

对较小的 j 值, 定理 3.15 – 定理 3.17 不提供关于 $p_j(n)$ 或 $d_j(n)$ 更多的信息. Erdős 于 1979 年引进了密率 $\Lambda_j(d)$, $\lambda_j(p)$, 分别对应于满足 $d_j(n) = d$ 和 $p_j(n) = p$ 的 n 构成的序列. Erdős 和 Tenenbaum (1989a) 研究了这些密率的渐近性质, 证明了 $\Lambda_j(d) > 0$ 当且仅当 $\tau(d) \leqslant j \leqslant d$. 此后 De Koninck 和 Tenenbaum (2002) 以及 La Bretèche 和 Tenenbaum (2002) 作了进一步的研究.

令

$$\lambda_k^*(y) := \mathbf{d}\{n : p_k(n) > y\} = \sum_{p>y} \lambda_k(p).$$

De Koninck 和 Tenenbaum 主要证明了对 $k \geqslant 1$, $z \in \mathbb{R}$ 一致地有

$$\lambda_k^*\left(\exp\exp\left\{k + z\sqrt{k}\right\}\right) = \Phi^*(z) - \frac{\Phi_0(z)}{\sqrt{2\pi k}} + O\left(\frac{1}{k}\right), \tag{3.72}$$

其中

$$\Phi^*(z) := \int_z^\infty \mathrm{e}^{-u^2/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \Phi_0(z) := \left\{\frac{1}{3} + A - \frac{1}{3}z^2\right\}\mathrm{e}^{-z^2/2},$$
$$A := \gamma - \sum_p \left\{\ln\left(\frac{1}{1-1/p}\right) - \frac{1}{p}\right\} \approx 0.261\,50.$$

这加强了 Erdős (1969) 的一个结果.

La Bretèche 和 Tenenbaum 估计了当 $k \to \infty$ 时 $\Lambda_k^* := \max_d \Lambda_k(d)$ 的渐近行为, 特别证明了当

$$d = k^{\{1+o(1)\}(\ln_2 k)/\ln 4}$$

时达到最大值.

习题

264. Hardy–Ramanujan (1917) 不等式.

(a) 证明对 $x > 0$, $0 < \alpha < 1 < \beta$, 有

$$\sum_{k \leqslant \alpha x} \frac{\mathrm{e}^{-x}x^k}{k!} < \frac{\mathrm{e}^{-Q(\alpha)x}}{(1-\alpha)\sqrt{\alpha x}} \quad \text{及} \quad \sum_{k \geqslant \beta x} \frac{\mathrm{e}^{-x}x^k}{k!} < \frac{\sqrt{\beta}\mathrm{e}^{-Q(\beta)x}}{(\beta-1)\sqrt{2\pi x}},$$

其中 $Q(y) := y\ln y - y + 1$.③

(b) 考虑函数 $\pi_k(x) := \left|\{n \leqslant x : \omega(n) = k\}\right|$. 证明对 $k \geqslant 1$, $x > 0$, 有

$$(k+1)\pi_{k+1}(x) \leqslant \sum_{p^\nu \leqslant x} \pi_k\left(x/p^\nu\right).$$

推出存在两个绝对常数 c_0, c_1, 使得

$$\pi_k(x) \leqslant \frac{c_0 x}{\ln x}\frac{(\ln_2 x + c_1)^{k-1}}{(k-1)!} \qquad (x \geqslant 3,\ k \geqslant 1).$$

(c) 对 $\omega(n) = \omega(n, x)$ 重新得出定理 3.8.

(d) 修改该方法, 使之适用于函数 $\Omega(n)$. ④

265. 设 $A(n)$ 为加性函数, 定义为 $A(p^\nu) = \nu p$, 见 Alladi 和 Erdős (1977, 1979).

③ 见 Norton (1976), 更精细的估计见 (1978).

④ 推广及下界估计见 Norton (1976, 1979, 1982), Balazard (1987) 以及第 459 页习题 286.

(a) 证明 $\sum_{n\leqslant x} A(n) = \dfrac{\pi^2 x^2}{12\ln x}\Big\{1+O\Big(\dfrac{1}{\ln x}\Big)\Big\}$.

(b) 证明对任意 $n \geqslant 1$ 有 $P^+(n) - 1 \leqslant A(n) \leqslant \Omega(n)P^+(n)$.

(c) 证明使得 $P^+(n) \geqslant \sqrt{n}$ 的整数 n 组成的数列有等于 $\ln 2$ 的自然密率.

(d) 设 $\chi(n)$ 为使得 $P^+(n) \leqslant n^{2/5}$ 的 n 之集 $\mathcal{A}$ 的示性函数. 证明 $\chi(n) \geqslant 1 - \sum_{p|n,\, p>n^{2/5}} 1$ 并推出 $\mathcal{A}$ 有正的下密率.

(e) 证明 $A(n)$ 没有单调的正规阶.

266. 设 $g(n)$ 为强加性函数, 使得 $g(p^\nu) = \ln p$.

(a) 证明在 §2 的记号下有 $B(x) \sim A(x)/\sqrt{2}$.

(b) 证明 $\sum_{n\leqslant x}\big(\ln n - g(n)\big) \ll x$.

(c) 推出 g 有 Turán–Kubilius 不等式不能达到的正规阶.

267. 设 $\delta > 1$, $g_\delta(n) := \sum_{p|n}(\ln p)^\delta$. 证明

$$\alpha_n^\delta(\ln n)^\delta \leqslant g_\delta(n) \leqslant \alpha_n^{\delta-1}(\ln n)^\delta \qquad (n \geqslant 1),$$

其中 $\alpha_n := \ln P^+(n)/\ln n$. 证明对每个 α, $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$, 使得 $\alpha_n \geqslant \alpha$ 的 n 有自然密率, 并计算之. 推出 g_δ 没有单调的正规阶.⑤

268. 对 $y \geqslant 2$, 用 $\chi(n;y)$ 表示使得 $P^+(n) \leqslant y$ 的 n 构成的集合的示性函数, 并用 $\Psi(x,y)$ 表示其和函数.

(a) 证明对每个 $\alpha > 0$, 有

$$\Psi(x,y) \leqslant \sqrt{x} + \sum_{n\leqslant x}\big(n/\sqrt{x}\big)^\alpha \chi(n;y).$$

(b) 将定理 3.5 对于适当的 α 值应用于 $n \mapsto n^\alpha\chi(n;y)$, 推出

$$\Psi(x,y) \leqslant c_1 x^{1-c_2/\ln y} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2),$$

其中 c_1 和 c_2 是正的绝对常数.

269. 用 $\xi(n)$ 表示一个足够慢趋于 $+\infty$ 的函数, 并令 $L(t) := \sqrt{2\ln_2 t \ln_3 t}$, $\omega(n,t) := \sum_{p|n,\, p\leqslant t} 1$, $\Omega(n,t) := \sum_{p^\nu \| n,\, p\leqslant t} \nu$, $\tau(n,t) := \sum_{d|n,\, d\leqslant t} 1$.

(a) 证明对任意 $\varepsilon > 0$ 有 $\sup\limits_{\xi(n)\leqslant t\leqslant n}\left|\dfrac{\Omega(n,t) - \ln_2 t}{L(t)}\right| \leqslant 1 + \varepsilon$ a.e..

(b) 推出

$$\tau(n,t) \leqslant (\ln t)^{\ln 2} 2^{(1+\varepsilon)L(t)} \quad (\xi(n) \leqslant t \leqslant n) \qquad \text{a.e..}$$

(c) 设 $\tau(n;t,u) := \big|\{d : d \mid n,\, d > t,\, P^+(d) \leqslant u\}\big|$. 用习题 268 的结论, 证明

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n;t,u) \ll x\ln u \exp\Big\{-c_2\frac{\ln t}{\ln u}\Big\} \qquad (2 \leqslant t,\, u \leqslant x).$$

⑤ 当 $0 < \delta < 1$ 时亦然, 见习题第 499 页 291.

(d) 设 $\alpha := 1/\ln 2$, $t_j := \exp j^{\alpha}\,(j = 1, 2, \ldots)$, $u_j := \exp\{c_2 j^{\alpha}/(10\ln j)\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. 证明 $\tau(n; t_j, u_j) = 0 \quad (\xi(n) \leqslant j \leqslant (\ln n)^{\ln 2})$ a.e..

(e) 证明 $2^{\omega(n,u)} \leqslant \tau(n,t) + \tau(n;t,u)$ 并推出对每个 $\varepsilon > 0$ 有

$$\tau(n, t_j) \geqslant j2^{-(1+\varepsilon)L(t_j)} \quad (\xi(n) \leqslant j \leqslant (\ln n)^{\ln 2}), \quad \text{a.e.}$$

(f) 证明对每个 $\varepsilon > 0$ 有

$$\sup_{\xi(n)\leqslant j\leqslant \tau(n)} \left| \frac{\ln_2 d_j(n) - \alpha \ln j}{\sqrt{2\alpha \ln j \ln_2 j}} \right| \leqslant 1 + \varepsilon \qquad \text{a.e.}$$

270. $]y, 2y]$ 的倍数集. 设 $y \geqslant 2$, $\mathcal{A} := \mathbb{Z}^+ \cap]y, 2y]$, 并令 $\mathcal{M}_y := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 的倍数集, 也就是至少含有一个因子 d 满足 $y < d \leqslant 2y$ 的整数 n 构成的集合.

(a) 证明 $\mathbf{d}\mathcal{M}_y =: \varepsilon_y$ 的存在性并用容斥原理来表示它.

(b) 设 $\mathcal{B}_y := \{n : \Omega(n, y) \geqslant (\ln_2 y)/\ln 2\}$. 证明 $\mathbf{d}\mathcal{B}_y$ 的存在性并证明公式

$$\mathbf{d}\mathcal{B}_y = \prod_{p\leqslant y}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{b\in\mathcal{B}_y,\, P^+(b)\leqslant y} \frac{1}{b}.$$

[见第 381 页习题 245.]

(c) 设 $\chi_y(n)$ 为 $\mathcal{B}_y$ 的示性函数. 证明对任意 $z \geqslant 1$ 有

$$\chi_y(n) \leqslant (\ln y)^{-(\ln z)/\ln 2} z^{\Omega(n,y)} \qquad (n \geqslant 1).$$

选取适当的参数 z, 推出

$$\mathbf{d}\mathcal{B}_y \leqslant K(\ln y)^{-\delta},$$

其中 K 是绝对常数且 $\delta := 1 - (1 + \ln_2 2)/\ln 2 \approx 0.086\,07$.

(d) 设 $\mathcal{B}'_y := \mathcal{M}_y \setminus \mathcal{B}_y$. 证明 $\mathcal{B}'_y$ 有自然密率. 用 $\chi'_y(n)$ 表示 $\mathcal{B}'_y$ 的示性函数. 证明对任意 z, $0 < z \leqslant 1$, 有

$$\chi'_y(n) \leqslant (\ln y)^{-(\ln z)/\ln 2} z^{\Omega(n,y)} \sum_{d|n,\, y<d\leqslant 2y} 1.$$

适当选取 z, 推出 $\mathbf{d}\mathcal{B}'_y \leqslant K'(\ln y)^{-\delta}$, 其中 K' 是绝对常数, 于是 $\varepsilon_y \leqslant K_0(\ln y)^{-\delta}$, $K_0 = K + K'$.⑥

271. Besicovitch (1934) 的一个定理. 保持习题 270 中 $\mathcal{M}_y$ 和 ε_y 的记号. 令 $H(x, y) := |\{n \leqslant x : n \in \mathcal{M}_y\}|$. 设 $\varepsilon > 0$. 证明存在序列 $y_k \to \infty$ 使得

⑥ Ford (2007) 证明了实际上有 $\varepsilon_y \asymp (\ln y)^{-\delta}(\ln_2 y)^{-3/2}$, 这改进了 Tenenbaum (1984) 的结果, 也见 Hall 和 Tenenbaum (1988), 第二章.

(i) $\varepsilon_{y_k} \leqslant \varepsilon/2^{k+2} \qquad (k \geqslant 0)$,

(ii) $H(x, y_k) \leqslant 2\varepsilon_{y_k} x \qquad (k \geqslant 0,\, x \geqslant y_{k+1})$.

设 $\mathcal{A} = \mathbb{Z}^+ \cap \bigcup_{k\geqslant 0}]y_k, 2y_k]$ 并令 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 的倍数集. 证明 $\underline{\mathbf{d}}\mathcal{M} \leqslant \varepsilon$, $\overline{\mathbf{d}}\mathcal{M} \geqslant \frac{1}{2}$, 于是倍数集不必有自然密率.

用习题 270 的方法, 给出 $H(x, y)$ 对 $2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$ 一致成立的一个上界. 推出对于某足够大的绝对常数 c 可选择 $y_k = \exp\{c(2^k\varepsilon^{-1})^{1/\delta}\}$.

272. 因子密率 (Hall, 1978). 设 $\mathcal{A}$ 为某整数列, 其示性函数为 χ. 倘若

$$\tau(n, \mathcal{A}) := \sum_{d|n} \chi(d) = \big(z + o(1)\big)\tau(n) \qquad \text{a.e.},$$

则称 $\mathcal{A}$ 具有因子密率 z, 记作 $\mathbf{D}\mathcal{A} = z$. 在本习题中, 假设给定两个整数 a, q, $q \geqslant 2$, 并令

$$\mathcal{A} := \{d : \omega(d) \equiv a \pmod q\}.$$

(a) 证明 $\chi(d) = (1/q)\sum_{j=0}^{q-1} \mathrm{e}^{2\pi i j(\omega(d)-a)/q} \quad (d \geqslant 1)$ 并推出 $\mathbf{d}\mathcal{A}$ 的存在性及其值 $\mathbf{d}\mathcal{A} = 1/q$.

(b) 证明 $\tau(n, \mathcal{A}) = (1/q)\sum_{j=0}^{q-1} \mathrm{e}^{-2\pi i ja/q} \prod_{p^\nu \| n}(1 + \nu \mathrm{e}^{2\pi i j/q})$.

(c) 证明若记 $m := \prod_{p\|n} p$, 则有

$$\big|\tau(n, \mathcal{A}) - \tau(n)/q\big| \leqslant \tau(n/m)\big\{2\cos \pi/q\big\}^{\omega(m)} = \tau(n)\big(\cos \pi/q\big)^{\omega(m)}.$$

(d) 证明数论函数 $n \mapsto \omega(m)$ 是加性函数, 且具有正规阶 $\ln_2 n$.

(e) 推出 $\mathbf{D}\mathcal{A} = 1/q$.

273. 因子密率的另一结论. 设 δ 是固定的实数, $0 < \delta < \frac{1}{2}$. 令

$$\mathcal{A}(\delta) := \Big\{m : m \geqslant 3,\, \omega(m) \leqslant (\tfrac{1}{2} + \delta)\ln_2 m\Big\}.$$

(a) 证明 $\mathbf{d}\mathcal{A}(\delta) = 0$.

(b) 证明对每个 ε, $0 < \varepsilon < 1$, 有

$$|\{p : p \mid n,\, \ln_2 p > (1 - \varepsilon)\ln_2 n\}| \sim \varepsilon\omega(n) \quad \text{a.e.},$$

并推出 $|\{d : d|n,\, \ln_2 d > (1 - \varepsilon)\ln_2 n\}| \sim \tau(n) \quad$ a.e..

(c) 证明 $\sum_{d|n} y^{\omega(d)} \leqslant (1 + y)^{\Omega(n)} \ (y \geqslant 0,\, n \geqslant 1)$ 并用该不等式证明对任意 η, $0 < \eta < \frac{1}{2}$, 有

$$|\{d : d \mid n, \omega(d) \leqslant (\tfrac{1}{2} + \eta)\Omega(n)\}| \sim \tau(n) \quad \text{a.e.}.$$

(d) 证明 $\mathbf{D}\mathcal{A}(\delta) = 1$.

274. 渐逝矩方法.

(a) 证明对 $-\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}$ 有 $\sum_{n\leqslant x} \tau(n)^z \ll x(\ln x)^{2^z-1}$. 选取 z 足够接近于 0, 证明若 $\alpha < \ln 2 < \beta$ 则有

$$\left|\{n \leqslant x : \tau(n) \notin [(\ln x)^\alpha, (\ln x)^\beta]\}\right| = o(x).$$

取 $\alpha = \alpha(x) \to \ln 2-$, $\beta = \beta(x) \to \ln 2+$ 而精确化该结论.

(b) 证明上界估计 $\sum_{n\leqslant x} \tau(n) y^{\omega(n)} \ll x(\ln x)^{2y-1}$ 对 $x \geqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant y_0$ 一致成立. 推出对 $0 < \varepsilon < 1$ 有

$$\sum_{n\leqslant x,\, |\omega(n)-2\ln_2 x|>\varepsilon \ln_2 x} \tau(n) \ll x(\ln x)^{1-2\eta},$$

其中 $\eta := \left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\ln\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\right) - \frac{1}{2}\varepsilon > 0$.

275. Erdős 和 Hall (1974) 的一个定理.

设 $\alpha > \ln 2$, $\varepsilon_d \ll \left(\ln(d+1)\right)^{-\alpha}$ $(d \geqslant 1)$ 及 $f(n) := \sum_{d|n} \varepsilon_d$.

(a) 证明对每个 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{z\to\infty} \overline{\mathbf{d}}\left\{n : \sup_{d>z} \Omega(n,d)/\ln_2 d \geqslant 1+\varepsilon\right\} = 0.$$

(b) 证明

$$\lim_{z\to\infty} \limsup_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{n\leqslant x} \sum_{d|n,\, d>z} |\varepsilon_d| 2^{-\Omega(n,d)} (\ln d)^{\ln 2} = 0.$$

(c) 适当应用定理 2.3, 证明 $f(n)$ 有极限分布.⑦

276. Hall (1974) 的一个定理. 设 f 是乘性函数, $0 \leqslant f \leqslant 1$. 令

$$S(x) := \sum_{n\leqslant x} f(n).$$

(a) 设 $k(n) := \prod_{p|n} p$. 证明

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)\ln k(n) \leqslant \sum_{m\leqslant x} f(m)\psi(x/m),$$

并推出左边的项不超过 $x\sum_{m\leqslant x} f(m)/m + O(x)$.

(b) 设 $N(x,y)$ 是使得 $k(n) \leqslant y$ 的整数 $n \leqslant x$ 的个数. 证明对任意 y, $1 \leqslant y \leqslant x$ 有

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)\ln\left(x/k(n)\right) \leqslant N(x,y)\ln x + S(x)\ln(x/y).$$

⑦ Erdős 和 Hall 其实证明了对应的分布函数连续.

(c) 用第二部分定理 1.16 推出

$$S(x)\leqslant\Big\{1+O\Big(\frac{\ln_2 x}{\ln x}\Big)\Big\}\frac{x}{\ln x}\sum_{m\leqslant x}\frac{f(m)}{m},$$

其中隐含的常数是绝对常数. [可在 (b) 中取 $y=x/\ln^3 x$.]

277. 设 f 是具有单调上升正规阶的数论函数. 证明对任意 $\varepsilon>0$ 有

$$\big|\{(m,n):1\leqslant m\leqslant n\leqslant x,\ f(n)\leqslant(1-\varepsilon)f(m)\}\big|=o(x^2).$$

278. 设 f 为乘性函数, 使得集合 $\mathcal{A}:=\{f(p):p\in\mathbb{P}\}$ 至少含有两个元素. 又设 $f(p)=1+O(p^{-\delta})$ 对某个固定的 $\delta>0$ 以及任意素数 p 成立. 令 $f_y(n):=\prod_{p^\nu\|n,\,p>y}f(p^\nu)$.

(a) 对足够大的 y, 给出 $\mu(n)^2|\ln f_y(n)|$ 均值的上界估计并推出, 对任意 $\varepsilon>0$ 及任意 $a\in\mathcal{A}$, 使得 $|f(n)-a|\leqslant\varepsilon$ 的 n 的序列有正的下密率.

(b) 利用习题 277 的结论, 证明 f 没有单调上升的正规阶.

(c) 应用于 $f(n)=n/\varphi(n)$, $f(n)=\sigma(n)/n$.

279. 关于 Hooley Δ-函数. 令 $\Delta(n):=\max_{u\in\mathbb{R}}\sum_{d|n,\,e^u<d\leqslant e^{u+1}}1$ 及 $\tau(n,\vartheta):=\sum_{d|n}d^{i\vartheta}$. 用引理 2.9 证明

$$\tau(n)^{-1}\int_0^1|\tau(n,\vartheta)|^2\,\mathrm{d}\vartheta\ll\Delta(n)\ll\int_0^1|\tau(n,\vartheta)|\,\mathrm{d}\vartheta.$$

由此推出区间估计 ⑧

$$x\ln_2 x\ll\sum_{n\leqslant x}\Delta(n)\ll x(\ln x)^{4/\pi-1} \tag{3.73}$$

上界估计由定理 3.5 而得; 而如第 268 页习题 209 中所指出的, 下界估计来自 Selberg–Delange 方法.

280. Erdős 和 Wintner (1939) 定理: 充分条件来自 Turán–Kubilius不等式. 设 f 为实加性函数, 使得级数

$$\sum_{|f(p)|\leqslant R}\frac{f(p)}{p},\qquad\sum_{|f(p)|\leqslant R}\frac{f(p)^2}{p},\qquad\sum_{|f(p)|>R}\frac{1}{p}$$

对至少一个 $R>0$ 的值收敛.

(a) 对 $y\geqslant2$, 令 $n_y:=\prod_{\substack{p^\nu\|n\\ p^\nu\leqslant y}}p^\nu$. 证明对任意整数 $m\geqslant1$, $\mathbf{d}\{n:n_y=m\}$ 存在且当 $T\to\infty$ 时 $\mathbf{d}\{n:n_y>T\}$ 趋于 0.

⑧ (3.73) 的下界估计属于 Hall 和 Tenenbaum (1982), 上界估计则属于 Hooley (1979). Tenenbaum (1985) 证明了可将指数 $4/\pi-1$ 换成 $o(1)$; 也见 Hall 和 Tenenbaum (1988), 第七章.

(b) 设 $\varepsilon > 0$. 观察到不等式 $|f(n) - f(n_y)| > \varepsilon$ 推出下列条件之一成立:

i) $\exists p \parallel n$, 使得 $|f(p)| > R$, $p > y$,

ii) $\exists \nu > 1$, $p^\nu > y$, 使得 $p^\nu \| n$,

iii) $\left| \sum_{\substack{p\|n,\, p>y \\ |f(p)| \leqslant R}} f(p) \right| > \varepsilon$,

证明 $\lim_{y\to\infty} \mathbf{d}\{n : |f(n) - f(n_y)| > \varepsilon\} = 0$. 用 Turán–Kubilius 不等式对满足 (iii) 的整数集的上密率作上界估计.

(c) 用定理 2.3 证明 f 有极限分布.

第四章　加性函数的分布和乘性函数的均值

§4.1　Erdős–Wintner 定理

下述结果完整地回答了加性函数极限分布律存在性的问题. 它的表述及证明将该问题纳入将加性函数与独立随机变量和比较的框架之中, 其概率背景是 Kolmogorov 三级数定理, 可见 Feller (1971), § IX.9.

定理 4.1 (Erdős–Wintner, 1939)　*实加性函数 $f(n)$ 有极限分布的充要条件是如下三个级数对至少一个正实数 R 同时收敛：*

$$\text{(a)}\quad \sum_{|f(p)|>R}\frac{1}{p};\qquad\qquad \text{(b)}\quad \sum_{|f(p)|\leqslant R}\frac{f(p)^2}{p};\qquad\qquad \text{(c)}\quad \sum_{|f(p)|\leqslant R}\frac{f(p)}{p}.$$

当这些条件满足时, 极限分布的特征函数是收敛的乘积

$$\varphi(\tau)=\prod_p\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau f(p^\nu)}}{p^\nu}. \tag{4.1}$$

极限分布律必然是纯粹的. 它是连续的当且仅当

$$\sum_{f(p)\neq 0}\frac{1}{p}=\infty. \tag{4.2}$$

注　(i) 若命题叙述中的三个级数对某 $R>0$ 收敛, 那么它们必对所有的 $R>0$ 收敛. 所以实际操作中不妨假设 $R=1$.

(ii) 需要强调 f 分布律的存在性不依赖于 $f(p^\nu)$ 对 $\nu\geqslant 2$ 的值.

该结果的原始证明是直接证明, 归结到几率 $\nu_x\{n : f(n) \leqslant z\}$ 的细致估计. 充分性的部分由 Erdős 独立得出. 这里将给出一个简单的证明, 来自于 Delange (1961), 大体上归结于 Lévy 连续性定理 (定理2.6). Delange 证明了如下基本结论, 定理 4.1 是其简单推论.

定理 4.2 (Delange) 设 g 为取值在单位圆盘内的乘性函数.

(i) 若 g 有非零的均值

$$M(g) := \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} g(n),$$

那么

a) 级数 $\sum_p \big(1 - g(p)\big)/p$ 收敛,

b) 存在整数 $\nu \geqslant 1$ 使得 $g(2^\nu) \neq -1$.

(ii) 若上述条件 (a) 成立, 那么 g 有均值

$$M(g) = \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{g(p^\nu)}{p^\nu}. \tag{4.3}$$

下节再证明该结论. 先看如何从中得出定理 4.1, 极限分布纯粹性和连续性除外.

下面将用到下述简单的引理.

引理 4.3 设 $H \in \mathbb{R}^+$, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ 为两个复数列, 满足

$$\sum_{n\geqslant 1} |u_n|^2 + |v_n| \leqslant H, \tag{4.4}$$

那么无穷乘积 $\prod_{n\geqslant 1}(1 + u_n + v_n)$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ 收敛. 在此情形下有

$$\Big|\prod_{n\geqslant 1}(1 + u_n + v_n)\Big| \leqslant \exp\Big\{6H + \sum_{n\geqslant 1} \Re e\, u_n\Big\}. \tag{4.5}$$

证明 若 $|u_n| + |v_n| \geqslant \frac{1}{2}$, 那么 $|u_n|^2 + |v_n| \geqslant |u_n|^2 - |u_n| + \frac{1}{2} \geqslant 1/4$. 由 (4.4), 这推出使得 $|u_n| + |v_n| \geqslant \frac{1}{2}$ 的 n 构成的集合 $\mathcal{E}$ 至少含 $4H$ 个元素.

当 $n \notin \mathcal{E}$ 时, 对 $z = u_n + v_n$ 用上界估计

$$|\log(1 + z) - z| \leqslant |z|^2 \qquad (|z| \leqslant \tfrac{1}{2}), \tag{4.6}$$

对任意的 $m, M, 0 \leqslant m < M$, 得

$$\Big|\sum_{\substack{m<n\leqslant M\\ n\notin\mathcal{E}}}(u_n+v_n)-\log\prod_{\substack{m<n\leqslant M\\ n\notin\mathcal{E}}}(1+u_n+v_n)\Big|\leqslant\sum_{\substack{m<n\leqslant M\\ n\notin\mathcal{E}}}\big(|u_n|+|v_n|\big)^2$$
$$\leqslant 2\sum_{\substack{m<n\leqslant M\\ n\notin\mathcal{E}}}\big(|u_n|^2+|v_n|^2\big)\leqslant\sum_{m<n\leqslant M}\big(2|u_n|^2+|v_n|\big).$$

这说明无穷乘积的收敛性与级数 $\sum u_n$ 的收敛性等价. 从该计算中还得到

$$\Big|\prod_{n\geqslant 1}(1+u_n+v_n)\Big|$$
$$\leqslant\prod_{n\in\mathcal{E}}\exp\{|u_n|+|v_n|\}\prod_{n\notin\mathcal{E}}\exp\{\Re e\,(u_n+v_n)+2|u_n|^2+|v_n|\}$$
$$\leqslant\exp\Big\{\sum_{n\geqslant 1}\Re e\,u_n+\sum_{n\in\mathcal{E}}(2|u_n|+|v_n|)+\sum_{n\notin\mathcal{E}}(2|u_n|^2+2|v_n|)\Big\}.$$

注意到

$$\sum_{n\in\mathcal{E}}|u_n|\leqslant\Big(4H\sum_{n\geqslant 1}|u_n|^2\Big)^{1/2}\leqslant 2H,$$

这样便得到 (4.5). □

现在可以讲述定理 4.1的证明了.

对每个实数 τ, 考虑模为 1 的乘性函数

$$g_\tau(n):=\mathrm{e}^{i\tau f(n)}\qquad(n=1,2,\ldots). \tag{4.7}$$

先假设 f 有极限分布. 由连续性定理 (定理 2.6) 得到, g_τ 对每个 τ 有均值. 令 $\varphi(\tau):=M(g_\tau)$, 那么 φ 是极限分布的特征函数. 特别地, $\varphi(0)=1$ 且 φ 在 $\tau=0$ 处连续. 于是存在 $T>0$ 使得 $|\varphi(\tau)|\geqslant\frac{1}{2}$ 对 $|\tau|\leqslant T$ 成立. 将对 $R:=2/T$ 的情形证明定理 4.1 中三个级数的收敛性.

由定理 4.2 的 (i) 推出级数

$$\sum_p\frac{1-g_\tau(p)}{p} \tag{4.8}$$

在 $|\tau|\leqslant T$ 上收敛; 而 (ii) 则可用来得出等式

$$\varphi(\tau)=\prod_p\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g_\tau(p^\nu)}{p^\nu}. \tag{4.9}$$

将此乘积的通项写成

$$1-\frac{1-g_\tau(p)}{p}+\frac{h_\tau(p)}{p(p-1)}$$

的形式, 其中 $|h_\tau(p)| \leqslant 2$. 由引理 4.3, 得

$$(4.10)\qquad |\varphi(\tau)| \ll \exp\Big\{-\sum_p \frac{1-\cos\big(\tau f(p)\big)}{p}\Big\},$$

又由 $|\tau| \leqslant T$ 时 $|\varphi(\tau)| \geqslant \frac{1}{2}$, 得

$$(4.11)\qquad \sum_p \frac{1-\cos\big(\tau f(p)\big)}{p} \ll 1 \qquad (|\tau| \leqslant T).$$

考虑到不等式 $1-\cos\vartheta \geqslant 2\vartheta^2/\pi^2$ ($|\vartheta| \leqslant \pi$), 得

$$(4.12)\qquad \sum_{|f(p)|\leqslant 2/T} \frac{f(p)^2}{p} < \infty.$$

在 $[0,T]$ 上取 (4.11) 的均值, 得到

$$\sum_p \frac{1}{p}\Big\{1-\frac{\sin\big(Tf(p)\big)}{Tf(p)}\Big\} \ll 1,$$

其中约定$f(p) = 0$ 时通项为零. 大括号中的部分对任意 p 非负, 且当 $|f(p)| > R = 2/T$ 时它大于 $\frac{1}{2}$. 于是

$$(4.13)\qquad \sum_{|f(p)|>R} \frac{1}{p} < \infty.$$

由之可从 $\sum_p \sin\big(Tf(p)\big)/p$ 的收敛性 (由 (4.8) 的收敛性可得) 推出

$$\sum_{|f(p)|\leqslant R} \frac{\sin\big(Tf(p)\big)}{p}$$

的收敛性. 利用 (4.12) 及不等式 $|\sin\vartheta-\vartheta| \leqslant \frac{1}{6}|\vartheta|^3 \leqslant \frac{1}{3}\vartheta^2$ ($|\vartheta| \leqslant 2$) 便得到

$$(4.14)\qquad \sum_{|f(p)|\leqslant R} \frac{f(p)}{p}$$

的收敛性. 于是定理 4.1 的必要性部分得证.

反过来, 设命题中的三个级数对于适当的正实数 R 收敛.

于是由显然的上界估计 $|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau f(p)}| \leqslant 2$ 推出, 对每个 $T>0$, 级数

$$\sum_{|f(p)|>R} \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau f(p)}}{p} \qquad (|\tau| \leqslant T)$$

收敛. 另外, 当 $|f(p)| \leqslant R$ 时,

$$\begin{aligned}1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau f(p)} &= -\mathrm{i}\tau f(p)+\{1-\cos(\tau f(p))\}+\mathrm{i}\{\tau f(p)-\sin(\tau f(p))\}\\ &= -\mathrm{i}\tau f(p)+O\Big(T^2 f(p)^2+T^3Rf(p)^2\Big),\end{aligned}$$

对 $|\tau| \leqslant T$ 一致成立. 这推出级数

$$\sum_{|f(p)|\leqslant R}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau f(p)}}{p}$$

在 $[-T,T]$ 上一致收敛. 从而级数 $\sum_p\{1-g_\tau(p)\}/p$ 在任意紧集上一致收敛. 由定理 4.2 的 (ii) 得出均值 $M(g_\tau)=\varphi(\tau)$ 对任意 $\tau\in\mathbb{R}$ 存在, 其中 $\varphi(\tau)$ 的定义见 (4.9). 由于乘积 (4.9) 的通项等于 $1-\{1-g_\tau(p)\}/p+O(1/p^2)$, 引理 4.3 说明无穷乘积在任意紧集上一致收敛. 于是 $\varphi(\tau)$ 连续. 由定理 2.6, f 有极限分布.

关于纯粹性和极限分布的连续性由定理 2.7 可得, 这是因为该分布律等于无穷卷积

$$\mathop{\ast}_{p} F_p,$$

其中 F_p 是原子性分布函数, 定义为

$$F_p(z)=\sum_{f(p^\nu)\leqslant z}\frac{1}{p^\nu}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\qquad(z\in\mathbb{R}).$$

特别地, 若 $f(p)\neq 0$, F_p 的最大跳跃与 1 相差 $1/p+O(1/p^2)$; 若 $f(p)=0$, 则为 $O(1/p^2)$.

为读者方便计, 在此给出

$$\sum_{f(p)\neq 0}\frac{1}{p}=\infty \tag{4.15}$$

是极限分布连续的充要条件的直接证明.

先证条件是必要的. 若级数 (4.15) 收敛, 那么无平方因子且使得 $p\mid n\Rightarrow f(p)=0$ 的整数 n 的序列 $\mathcal{A}$ 有正的密率. 由于 $\mathcal{A}$ 的示性函数是乘性的, 这可由第一部分定理 3.12 而得.① 由于 $f(n)=0$ 对任意 $\mathcal{A}$ 中的 n 成立, 可知极限分布在原点不连续.

为证明条件 (4.15) 的充分性, 将验证极限分布连续性的一个等价形式 (见第二章注记)

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau=\lim_{T\to\infty}\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}|\varphi(Ty)|^2\,\mathrm{d}y=0. \tag{4.16}$$

① 附带地可得 $\mathbf{d}\mathcal{A}=6\pi^{-2}\prod_{f(p)\neq 0}(1+1/p)^{-1}$, 但这里不需要具体数值.

设 N 为足够大的整数, $a_1 < a_2 < \cdots < a_J$ 是 $f(p), p \leqslant N$ 所取的值. 令

$$\varepsilon_j := \sum_{p \leqslant N,\, f(p)=a_j} \frac{1}{p} \quad (1 \leqslant j \leqslant J), \qquad S_N := \sum_{1 \leqslant j \leqslant J} \varepsilon_j = \sum_{p \leqslant N,\, f(p) \neq 0} \frac{1}{p}.$$

由 Hölder 不等式, 对每个整数 $h \geqslant 1$ 及任意实数 y, $|y| \leqslant 1$, 有

$$\Big(\sum_{1 \leqslant j \leqslant J} \varepsilon_j \cos(a_j T y) \Big)^{2h} \leqslant S_N^{2h-1} \sum_{1 \leqslant j \leqslant J} \varepsilon_j \cos^{2h}(a_j T y),$$

从而

$$\int_{-1}^{1} \Big(\sum_{1 \leqslant j \leqslant J} \varepsilon_j \cos(a_j T y) \Big)^{2h} \mathrm{d}y \leqslant S_N^{2h-1} \sum_{1 \leqslant j \leqslant J} \varepsilon_j \int_{-1}^{1} \cos^{2h}(a_j T y)\, \mathrm{d}y.$$

当 $T \to \infty$ 时, 最后的积分趋于

$$\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos w)^{2h}\, \mathrm{d}w \ll \frac{1}{\sqrt{h}},$$

其中上界估计来自 Wallis 积分的一个经典估计, 可见习题 3 (b). 对每个固定的 N 以及足够大的 T, 可断言 $[-1, 1]$ 中使得

$$\Big| \sum_{1 \leqslant j \leqslant J} \varepsilon_j \cos(a_j T y) \Big| \geqslant \Big(1 - \frac{1}{h} \Big) S_N$$

的 y 构成的集合的测度 $\ll 1/\sqrt{h}$. 利用 (4.10), 得

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |\varphi(Ty)|^2\, \mathrm{d}y &\ll \int_{-1}^{1} \exp\Big\{ -2 \sum_{1 \leqslant j \leqslant J} \varepsilon_j \big(1 - \cos(a_j T y) \big) \Big\}\, \mathrm{d}y \\ &\ll \frac{1}{\sqrt{h}} + \mathrm{e}^{-2S_N/h} \ll \sqrt{\frac{\ln S_N}{S_N}}, \end{aligned}$$

其中选了 $h := \lfloor S_N / \ln S_N \rfloor$. 由 (4.15) 推出, 当 $N \to \infty$ 时 $S_N \to \infty$, 于是便得 (4.16).

§4.2　Delange 定理

在此给出定理 4.2 的一个证明. 它仍由 Delange 得出, 但与其原来的证明不同. 它从 Rényi (1965) 的一个思想出发, 基于 Turán–Kubilius 不等式.

其基本点是下列结果.

定理 4.4 (Delange)　*设 g 是在单位圆盘中取值的乘性函数. 在假设*

$$\sum_p \frac{1 - \Re e\, g(p)}{p} < \infty \tag{4.17}$$

下有

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n)=\prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g(p^\nu)}{p^\nu}+o(1) \qquad (x\to\infty). \tag{4.18}$$

证明 对每个实数 $y\geqslant 2$, 定义乘性函数 g_y 为

$$g_y(p^\nu):=\begin{cases} g(p^\nu), & 若\ p\leqslant y,\\ 1, & 若\ p>y.\end{cases}$$

g_y 的性态比 g 简单, 这是因为 g_y 只在一个有限的素数集上非平凡. 然而, 当 y 足够大时可期望 g_y 是 g 的一个 "好的" 逼近: 这是证明的指导思想.

考虑 $h_y:=\mu*g_y$. 若 $\nu\geqslant 1, p\leqslant y$, 有 $h_y(p^\nu)=g(p^\nu)-g(p^{\nu-1})$; 若 $\nu\geqslant 1$, $p>y$ 则有 $h_y(p^\nu)=0$. 这推出

$$\begin{aligned} H_y(x)&:=\sum_{m\leqslant x}|h_y(m)|+x\sum_{m>x}\frac{|h_y(m)|}{m}\\ &\leqslant \sqrt{x}\sum_{m\geqslant 1}\frac{|h_y(m)|}{\sqrt{m}}\leqslant \sqrt{x}\prod_{p\leqslant y}\Big(1+\frac{2}{\sqrt{p}-1}\Big).\end{aligned}$$

从中容易得出, 对固定的 y, g_y 有均值, 为

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x} g_y(n)&=\sum_{m\leqslant x}h_y(m)\Big\lfloor\frac{x}{m}\Big\rfloor=x\sum_{m\geqslant 1}\frac{h_y(m)}{m}+O\big(H_y(x)\big)\\ &=x\big\{M(g_y)+o(1)\big\},\end{aligned}$$

其中

$$M(g_y):=\prod_{p\leqslant y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g(p^\nu)}{p^\nu}.$$

现在定义乘性函数 r 为 $r(n):=|g(n)|$, 并定义加性函数 ϑ 为

$$\vartheta(p^\nu):=\begin{cases}\arg g(p^\nu), & 若\ g(p^\nu)\neq 0,\\ 0, & 若\ g(p^\nu)=0,\end{cases}$$

幅角在 $]-\pi,\pi]$ 中取值. 令

$$A(x):=\sum_{p\leqslant x}\vartheta(p)/p,$$

将用 Cauchy 判别法证明当 $y\to+\infty$ 时

$$M(g_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A(y)} \tag{4.19}$$

趋于某有限值 M. 对 $2 \leqslant y \leqslant z \leqslant x$ 有

$$\begin{aligned} S(x,y,z) &:= \frac{1}{x}\Big|\sum_{n\leqslant x} g_z(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A(z)} - \sum_{n\leqslant x} g_y(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A(y)}\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\Big|g_z(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A(z)} - g_y(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A(y)}\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\Big|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\{A(z)-A(y)\}}\prod_{p^\nu\| n,\, y<p\leqslant z} g(p^\nu) - 1\Big|. \end{aligned}$$

用对所有单位圆盘中的复数 $u_1,\ldots,u_m$ 成立的上界估计 $|u_1\cdots u_m - 1| \leqslant \sum_{j=1}^m |u_j - 1|$, 得

$$S(x,y,z) \leqslant \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p^\nu\|n\\ y<p\leqslant z}}\big\{1 - r(p^\nu)\big\} + \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\Big|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\{A(z)-A(y)-\vartheta_{y,z}(n)\}} - 1\Big|,$$

其中 $\vartheta_{y,z}$ 是定义为 $\vartheta_{y,z}(p^\nu) := \mathbf{1}_{(y,z]}(p)\vartheta(p^\nu)$ 的加性函数.

用不等式

$$|\mathrm{e}^{iu} - 1| = \Big|\int_0^u \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant |u| \qquad (u \in \mathbb{R})$$

对关于 n 的和式作上界估计. 在第一个和式中交换和号并对第二个和式用 Cauchy–Schwarz 不等式, 得

$$\begin{aligned} S(x,y,z) \leqslant{}& \sum_{y<p\leqslant z}\frac{1-r(p)}{p} + 2\sum_{y<p\leqslant z}\frac{1}{p(p-1)} \\ &+ \left\{\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\Big(\vartheta_{y,z}(n) - \big(A(z) - A(y)\big)\Big)^2\right\}^{1/2} \end{aligned}$$

用 Turán–Kubilius 不等式来估计最后的和式, 得

$$\begin{aligned} S(x,y,z) &\leqslant \sum_{y<p\leqslant z}\frac{1-r(p)}{p} + O\left(\frac{1}{y} + \sqrt{\sum_{y<p\leqslant z}\frac{\vartheta(p)^2}{p} + \frac{1}{y}}\right) \\ &\ll \sum_{y<p\leqslant z}\frac{1-\Re e\big(g(p)\big)}{p} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{\sum_{y<p\leqslant z}\frac{\vartheta(p)^2}{p}}. \end{aligned}$$

现在观察到对每个 p 有

$$\vartheta(p)^2 \leqslant \pi^2\big\{1 - \Re e\, g(p)\big\}. \tag{4.20}$$

事实上, 要么 $|\vartheta(p)| > \pi/2$, 由于 $\Re e\, g(p) \leqslant 0$, 不等式成立; 要么 $|\vartheta(p)| \leqslant \pi/2$, 此时

$$1 - \Re e\, g(p) = 1 - r(p)\cos\vartheta(p) \geqslant 1 - \cos\vartheta(p) \geqslant 2\{\vartheta(p)/\pi\}^2.$$

将 (4.20) 代入上述 $S(x,y,z)$ 的上界估计, 得

$$S(x,y,z) \ll \eta(y) \qquad (2 \leqslant y \leqslant z \leqslant x), \tag{4.21}$$

其中 $\eta(y) := 1/\sqrt{y} + \sqrt{\sum_{p>y}\big(1 - \Re e\, g(p)\big)/p} = o(1) \quad (y \to \infty)$. 这说明 (4.19) 满足 Cauchy 判别法的条件, 从而存在复数 M, 使得

$$M(g_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A(y)} = M + o(1) \qquad (y \to \infty). \tag{4.22}$$

在 (4.21) 中选取 $z = x$, 并对 $n \leqslant x$ 记 $g_x(n) = g(n)$, 得

$$\frac{1}{x}\sum_{n \leqslant x} g(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A(x)} = \frac{1}{x}\sum_{n \leqslant x} g_y(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A(y)} + O\big(\eta(y)\big).$$

先后令 x 和 y 趋于 $+\infty$, 得

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A(x)}}{x}\sum_{n \leqslant x} g(n) = M + o(1) = M(g_x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A(x)} + o(1),$$

此即所欲证. □

现在可以证明 Delange 的定理 4.2 了. 先设 g 有非零的均值 $M(g)$. 用 Abel 求和法得

$$(\sigma - 1)\sum_{n \geqslant 1}\frac{g(n)}{n^\sigma} \sim \frac{1}{\zeta(\sigma)}\sum_{n \geqslant 1}\frac{g(n)}{n^\sigma} \sim M(g) \qquad (\sigma \to 1+),$$

抑或

$$\lim_{\sigma \to 1+}\prod_p\Big(1 - \frac{1}{p^\sigma}\Big)\sum_{\nu \geqslant 0}\frac{g(p^\nu)}{p^{\nu\sigma}} = M(g).$$

注意到乘积通项的模 $\leqslant 1$ 且

$$\Big|\sum_{\nu \geqslant 0} g(p^\nu)\Big(\frac{1}{p^\nu} - \frac{1}{p^{\nu\sigma}}\Big)\Big| \leqslant \frac{1 - 1/p^{\sigma-1}}{(p-1)(1 - p^{-\sigma})} \ll \frac{(\sigma - 1)\ln p}{p},$$

于是由引理 4.3 得

$$\begin{aligned}
|M(g)| &\ll \Big|\prod_{p \leqslant \exp\{1/(\sigma-1)\}}(1 - p^{-\sigma})\sum_{\nu \geqslant 0}\frac{g(p^\nu)}{p^{\nu\sigma}}\Big| \\
&\ll \Big|\prod_{p \leqslant \exp\{1/(\sigma-1)\}}\Big\{(1 - p^{-\sigma})\sum_{\nu \geqslant 0}\frac{g(p^\nu)}{p^\nu} + O\Big(\frac{(\sigma-1)\ln p}{p}\Big)\Big\}\Big| \\
&\ll \Big|\prod_{p \leqslant \exp\{1/(\sigma-1)\}}\Big\{1 - \frac{1 - g(p)}{p} + O\Big(\frac{1}{p^2} + \frac{(\sigma-1)\ln p}{p}\Big)\Big\}\Big| \\
&\ll \exp\Big\{-\sum_{p \leqslant \exp\{1/(\sigma-1)\}}\frac{1 - \Re e\, g(p)}{p}\Big\}.
\end{aligned}$$

这推出级数 $\sum_p \{1-\Re e\, g(p)\}/p$ 的收敛性. 由定理 4.4 可推出乘积

$$\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g(p^\nu)}{p^\nu} \tag{4.23}$$

收敛到 $M(g)$. 其通项等于 $1-\{1-g(p)\}/p+O(1/p^2)$. 再由引理 4.3 得级数 $\sum_p\{1-g(p)\}/p$ 收敛. 最后, 由于 $M(g)\neq 0$, 无穷乘积 (4.23) 的通项均非零, 特别地, 对至少一个整数 $\nu\geqslant 1$ 有 $g(2^\nu)=-1$.

现证定理 4.2 的 (ii). 由引理 4.3, 若级数 (a) 收敛, 乘积 (4.23) 亦然. 由定理 4.4 立即得到结论.

§4.3 Halász 定理

§4.3.1 定理表述

Delange 定理 (定理 4.2) 提供了模 $\leqslant 1$ 的乘性函数有非零均值的充要条件. Wirsing (1967), 然后是 Halász (1968) 分别阐明了模 $\leqslant 1$ 的实值和复值乘性函数均值的性态, 对这方面的研究作了补充.

定理 4.5 (Halász 定理) *设 g 为单位圆盘中取值的乘性函数. 倘若存在实数 τ, 使得级数*

$$\sum_p \frac{1-\Re e\left(g(p)p^{-\mathrm{i}\tau}\right)}{p} \tag{4.24}$$

收敛, 那么

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n)=\frac{x^{\mathrm{i}\tau}}{1+\mathrm{i}\tau}\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g(p^\nu)}{p^{\nu(1+\mathrm{i}\tau)}}+o(1)\qquad (x\to\infty). \tag{4.25}$$

若不存在实数 τ 使得级数 (4.24) 收敛, 那么

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n)=o(1). \tag{4.26}$$

定理的第一部分由定理 4.4 易得. 事实上, 从 (4.24) 的收敛性得

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\frac{g(n)}{n^{\mathrm{i}\tau}}=\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g(p^\nu)}{p^{\nu(1+\mathrm{i}\tau)}}+o(1)\qquad (x\to\infty). \tag{4.27}$$

另外, 应用 (4.22) 于 $g(n)n^{-\mathrm{i}\tau}$, 可将后者的乘积换成 $M_\tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}A_\tau(x)}+o(1)$, 其中 M_τ 是适当的常数, 且

$$A_\tau(x):=\sum_{p\leqslant x}\vartheta_\tau(p)/p,$$

其中 $\vartheta_\tau(p) := \arg\{g(p)p^{-i\tau}\} \in]-\pi,\pi]$. 不等式 (4.20) 推出级数 $\sum_p \vartheta_\tau(p)^2/p$ 收敛, 从而用 Cauchy-Schwarz 不等式便知当 $y \to \infty$ 且 $x \geqslant y$ 时

$$A_\tau(x) - A_\tau(y) = o\Big(1 + \ln\Big(\frac{\ln x}{\ln y}\Big)\Big)$$

成立. 特别地, 定义为 $L_\tau(\ln x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}A_\tau(x)}$ 的函数 L_τ 是缓升函数, 也就是说它对于 $u, v \to \infty$ 和 $u \asymp v$ 满足

$$L_\tau(u) \sim L_\tau(v).$$

利用该性质, 通过简单的分部积分可从 (4.27) 得到 (4.25). 为后文作准备, 注意到可将 (4.25) 写成

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n) = K_\tau x^{\mathrm{i}\tau} L_\tau(\ln x) + o(1) \tag{4.28}$$

的形式, 其中 K_τ 是适当的常数, L_τ 是模为 1 的缓升函数.

稍后再证明 Halász 定理的第二部分. 在此之前, 先从定理导出以下重要的推论, 最初是 Wirsing (1967) 证明的.

定理 4.6 (Wirsing) *设 g 为取值在 $[-1,1]$ 中的实值乘性函数, 那么有*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n) = \prod_p \Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g(p^\nu)}{p^\nu}, \tag{4.29}$$

其中当无穷乘积发散时应将其值视为零.

证明 命题的假设推出级数 $\sum_p \big(1 - \Re e\{g(p)p^{-i\tau}\}\big)/p$ 对任意 $\tau \neq 0$ 发散. 它易从如下关系可得

$$\sum_{|\cos(\tau\ln p)|\leqslant 1/2}\frac{1}{p} = \infty,$$

该关系由素数定理易得. ② 从而只用考虑在 $\tau = 0$ 情形下的 Halász 定理. □

注 Wirsing 定理的深刻程度至少与素数定理相当, 这是因为函数 $g(n) = \mu(n)$ 在其适用范围之内.

将就 Halász 定理的发散情形给出一个实效估计, 它基本上是 Montgomery (1978b) 的结果. 根本上讲, 其方法与 Halász 1971 年的文章相同, 该文章部分是为了研究同一作者 1968 年结果的实效形式. 但 Montgomery 对其进行了一些细化, 并作了许多简化. 在此给出比 Montgomery 的结果略为精细的一个版本.

② 实际上用对任意常数 $c > 1$ 成立的估计 $\sum_{x<n\leqslant cx}\Lambda(n) \gg x$ $(x\to\infty)$ 就可以了.

令

$$G(x) := \sum_{n \leqslant x} g(n), \qquad F(s) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{g(n)}{n^s} \qquad (\sigma > 1),$$

并对 $T > 0$ 令

$$H_T(\alpha)^2 := \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ |k| \leqslant T}} \frac{1}{k^2+1} \max_{\substack{\sigma = 1+\alpha \\ |\tau - k| \leqslant \frac{1}{2}}} |F(s)|^2 \qquad (\alpha > 0). \tag{4.30}$$

定理 4.7 在上述记号下，对任意单位圆盘中取值的乘性函数 g 及 $T > 0$ 一致地有

$$G(x) \ll \frac{x}{\ln x} \int_{1/\ln x}^{1} H_T(\alpha) \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} + \frac{x}{T}. \tag{4.31}$$

Montgomery 的结果相应于 (4.31) 在 $T = \infty$ 的情形.

先证如何从 Halász 定理的第二部分得出该结论. 为此要用到如下引理.

引理 4.8 设 $\{\varphi_n(\tau)\}_{n=1}^{\infty}$ 为一列连续函数，使得对每个 τ, $|\tau| \leqslant 1$, $\varphi_n(\tau)$ 单调上升地趋于 ∞, 那么收敛性是一致的.

证明 用反证法. 若结论不真, 那么 $\inf_{|\tau| \leqslant 1} \varphi_n(\tau)$ 不趋于 $+\infty$, 且存在常数 A 以及指标列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$, $n_j \to \infty$ 使得 $\inf_{|\tau| \leqslant 1} \varphi_{n_j}(\tau) \leqslant A$ 对 $j \geqslant 1$ 成立. 由于 φ_{n_j} 连续, 对每个整数 j, 存在 $\tau_j \in [-1, 1]$ 使得 $\varphi_{n_j}(\tau_j) = \inf_{|\tau| \leqslant 1} \varphi_{n_j}(\tau)$. 抽取新的子列后, 可设当 $j \to +\infty$ 时 $\tau_j \to \tau_0$. 设 n 是任意固定的整数. 对足够大的 j, 有

$$\varphi_{n_j}(\tau_j) \geqslant \varphi_n(\tau_j) \geqslant \tfrac{1}{2} \varphi_n(\tau_0),$$

这是因为 $\varphi_n(\tau_j) \to \varphi_n(\tau_0)$. 从而 $\varphi_n(\tau_0) \leqslant 2A$, 这与 $n \to \infty$ 时 $\varphi_n(\tau_0) \to +\infty$ 的假设矛盾. □

现在补充 Halász 定理的证明. 由引理 4.3, 有

$$\begin{aligned} \frac{F(s)}{\zeta(\sigma)} &= \prod_p \left(1 - \frac{1 - g(p) p^{-\mathrm{i}\tau}}{p^\sigma} + \sum_{\nu \geqslant 2} \frac{g(p^\nu) - g(p^{\nu-1}) p^{\mathrm{i}\tau}}{p^{\nu s}} \right) \\ &\ll \exp\left\{ - \sum_p \frac{1 - \Re e\left(g(p) p^{-\mathrm{i}\tau}\right)}{p^\sigma} \right\}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

而且在级数 (4.24) 对任意 τ 发散的假设下, 由引理 4.8 推出, 当 $\sigma \to 1+$ 时, 右边的项在任意紧集上关于 τ 一致趋于 0. 从中推出当 $\alpha \to 0+$ 时 $H_T(\alpha) = o(1/\alpha)$ 对 T 一致成立, 代入 (4.31) 便得到 $G(x) = o(x)$ $(x \to \infty)$.

§4.3.2 引理

为证定理 4.7, 需要三个辅助结果. 首先是 Gallagher (1970) 的一个关于三角多项式均值的一个一般的不等式.

引理 4.9 (Gallagher) 设$N \in \mathbb{N}^*$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ 是相异实数的有限列. 令 $\delta_n := \min_{m\neq n} |\lambda_m - \lambda_n|$. 对任意 $\{a_n\}_{n=1}^N \in \mathbb{C}^N$ 及 $T > 0$, 有

$$\int_{-T}^{T} \Big| \sum_{1\leqslant n\leqslant N} a_n \mathrm{e}(\lambda_n t) \Big|^2 \mathrm{d}t \ll \sum_{1\leqslant n\leqslant N} |a_n|^2 \Big\{ T + \frac{1}{\delta_n} \Big\}, \tag{4.33}$$

其中隐含的常数是绝对常数. 特别地, 对任意收敛坐标 $< \alpha$ 的 Dirichlet 级数 $F(s) := \sum_{n\geqslant 1} a_n/n^s$ 以及任意 $T > 0$ 一致地有

$$\int_{-T}^{T} |F(s)|^2 \,\mathrm{d}\tau \ll \sum_{n\geqslant 1} \frac{|a_n|^2}{n^{2\alpha}} (T + n) \qquad (\sigma \geqslant \alpha). \tag{4.34}$$

证明 不等式 (4.34) 由 $\lambda_n := \ln n$ $(n \geqslant 1)$ 情形下的 (4.33) 对 N 取极限即得.

为证明 (4.33), 观察到若令

$$A(x) := T \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N \\ |x-\lambda_n|\leqslant 1/2T}} a_n, \qquad S(t) := \sum_{1\leqslant n\leqslant N} a_n \mathrm{e}(\lambda_n t),$$

则有

$$\widehat{A}(t) := \int_{\mathbb{R}} A(x) \mathrm{e}(-tx) \,\mathrm{d}x = S(-t) \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}.$$

由 Plancherel 公式得

$$\int_{-T}^{T} |S(t)|^2 \,\mathrm{d}t \ll \int_{\mathbb{R}} \Big| S(-t) \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \Big|^2 \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |A(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

然而, 根据 Cauchy–Schwarz 不等式, 有

$$|A(x)|^2 \leqslant T^2 \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N \\ |x-\lambda_n|\leqslant 1/2T}} |a_n|^2 \sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant N \\ |x-\lambda_m|\leqslant 1/2T}} 1,$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |A(x)|^2 \,\mathrm{d}x &\leqslant T^2 \sum_{1\leqslant n\leqslant N} |a_n|^2 \int_{\lambda_n - 1/2T}^{\lambda_n + 1/2T} \Big(\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant N \\ |x-\lambda_m|\leqslant 1/2T}} 1 \Big) \mathrm{d}x \\
&\leqslant T^2 \sum_{1\leqslant n\leqslant N} |a_n|^2 \int_{\lambda_n - 1/2T}^{\lambda_n + 1/2T} \Big(\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant N \\ |\lambda_n-\lambda_m|\leqslant 1/T}} 1 \Big) \mathrm{d}x \\
&\leqslant T^2 \sum_{1\leqslant n\leqslant N} |a_n|^2 \int_{\lambda_n - 1/2T}^{\lambda_n + 1/2T} \Big(\frac{2}{T\delta_n} + 1 \Big) \mathrm{d}x \leqslant \sum_{1\leqslant n\leqslant N} |a_n|^2 \Big(T + \frac{2}{\delta_n} \Big).
\end{aligned}$$

第二个引理是一个关于殆周期函数均方的一般的不等式③, 我们在 Dirichlet 级数的框架下来叙述它.

引理 4.10 (Montgomery–Wirsing) 设

$$A(s) := \sum_{n\geqslant 1} a_n/n^s, \qquad B(s) := \sum_{n\geqslant 1} b_n/n^s$$

为两个对 $\sigma > 1$ 收敛的 Dirichlet 级数, 使得对任意 $n \geqslant 1$ 有 $|a_n| \leqslant b_n$. 这样对任意 $T \geqslant 0$ 及任意 $\sigma > 1$ 有

$$\int_{-T}^{T} |A(s)|^2 \,\mathrm{d}\tau \leqslant 3 \int_{-T}^{T} |B(s)|^2 \,\mathrm{d}\tau. \tag{4.35}$$

证明 考虑函数 $\chi(\tau) := \max(0, 1 - |\tau|/T)$, 其 Fourier 级数等于

$$\widehat{\chi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau t}\chi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = T\Big(\frac{\sin(tT/2)}{tT/2}\Big)^2.$$

对任意 $\tau_0 \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\tau - \tau_0)|A(s)|^2 \,\mathrm{d}\tau &= \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{a_m \overline{a}_n}{(mn)^\sigma}\Big(\frac{n}{m}\Big)^{\mathrm{i}\tau_0} \widehat{\chi}\Big(\ln \frac{m}{n}\Big) \\ &\leqslant \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{b_m b_n}{(mn)^\sigma} \widehat{\chi}\Big(\ln \frac{n}{m}\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\tau)|B(s)|^2 \,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

倘若 $h(\tau)$ 表示 $[-T, T]$ 的示性函数, 那么有

$$h(\tau) \leqslant \chi(\tau - T) + \chi(\tau) + \chi(\tau + T),$$

从而

$$\int_{-T}^{T} |A(s)|^2 \,\mathrm{d}\tau \leqslant 3 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\tau)|B(s)|^2 \,\mathrm{d}\tau \leqslant 3 \int_{-T}^{T} |B(s)|^2 \,\mathrm{d}\tau. \qquad \square$$

第三个辅助结果是 Euler 乘积 $F(s)$ 好用的分解.

引理 4.11 设 g 为模 $\leqslant 1$ 的乘性函数. 有

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{g(n)}{n^s} = \big\{1 + D(s)\big\} F_1(s) J(s) \qquad (\sigma > 1), \tag{4.36}$$

其中

$$D(s) := \sum_{\nu\geqslant 1} \frac{g(2^\nu)}{2^{\nu s}}, \qquad F_1(s) := \exp \sum_{p>2} \frac{g(p)}{p^s},$$

$J(s)$ 对于 $\sigma > \frac{1}{2}$ 全纯, 且满足

$$1 \ll J(s) \ll 1, \qquad J'(s) \ll 1 \qquad (\sigma \geqslant 1). \tag{4.37}$$

③ 见 Montgomery (1971), 第 158 页, 也见 Montgomery (1994) § 7.3, 其中提到这里使用的方法由 Wirsing 得出.

证明 有

$$J(s) = \prod_{p>2} \mathrm{e}^{-g(p)/p^s} \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{g(p^\nu)}{p^{\nu s}}.$$

该乘积的一般项等于 $1 + O(p^{-2\sigma})$, $J(s)$ 对于 $\sigma > \frac{1}{2}$ 全纯, 且对于 $\sigma \geqslant \frac{3}{4}$ 一致有界. 特别地, 这推出 (4.37) 中 $J(s)$ 和 $J'(s)$ 的上界估计. 另外, 由于

$$\Big|\sum_{\nu \geqslant 1} g(p^\nu) p^{-\nu s}\Big| \leqslant \frac{1}{p-1} \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad (p > 2, \sigma \geqslant 1),$$

从 (4.6) 中得出 $|\log J(s)| \leqslant \sum_{p>2} 2/(p-1)^2$, 故得 (4.37) 中 $|J(s)|$ 的下界估计. □

§4.3.3 定理 4.7 的证明

不失一般性, 可设 T 任意大. 使用下列下界估计将会比较方便:

$$H_T(\alpha) \gg 1 \qquad (\alpha > 0). \tag{4.38}$$

为证明它, 先注意到, 若记 $\vartheta_\nu := \arg g(2^\nu)$, $|\vartheta_\nu| \leqslant \pi$, 有

$$|1 + D(1 + \alpha + \mathrm{i}\tau)| \geqslant 1 - \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{|\cos(\vartheta_\nu - \tau\nu \ln 2)|}{2^\nu} \geqslant \tfrac{1}{2}(1 - |\cos(\vartheta_1 - \tau \ln 2)|).$$

用 k_0 表示距 $(\vartheta_1 - \frac{1}{2}\pi)/\ln 2$ 最近的整数 (在有疑问的情况下任取其中之一), 于是对 $\sigma \geqslant 1$, $|\tau - k_0| \leqslant \frac{1}{2}$ 有 $|1 + D(s)| \geqslant \frac{1}{2}(1 - \sin \ln 2) > 0$. 注意到 $|k_0| \leqslant 8$. 另外有

$$\int_{k_0 - \frac{1}{2}}^{k_0 + \frac{1}{2}} \log F_1(s)\, \mathrm{d}\tau = \sum_{p>2} \frac{g(p)}{p^\sigma} \int_{k_0 - \frac{1}{2}}^{k_0 + \frac{1}{2}} p^{-\mathrm{i}\tau}\, \mathrm{d}\tau \ll \sum_p \frac{1}{p \ln p} \ll 1.$$

这说明 $\max_{|\tau - k_0| \leqslant \frac{1}{2}} |F_1(s)| \gg 1$, 于是

$$\max_{\substack{\sigma = 1+\alpha \\ |\tau - k_0| \leqslant \frac{1}{2}}} |F(s)| \geqslant \min \big|\big(1 + D(s)\big) J(s)\big| \max |F_1(s)| \gg 1,$$

故 (4.38) 成立.

证明的第一步是将 $G(x)$ 用该函数均值的函数来作上界估计, 即

$$|G(x)| \leqslant \frac{x}{\ln x} \int_1^x \frac{|G(t)|}{t^2}\, \mathrm{d}t + O\Big(\frac{x}{\ln x}\Big). \tag{4.39}$$

令 $K(x) := \sum_{n \leqslant x} g(n) \ln n$, 有

$$G(x) \ln x - K(x) = \sum_{n \leqslant x} g(n) \ln(x/n) \ll \sum_{n \leqslant x} \ln(x/n) \ll x. \tag{4.40}$$

从而, 为证明(4.39), 只须验证

$$|K(x)| \leqslant x\int_1^x \frac{|G(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t + O(x). \tag{4.41}$$

有

$$\begin{aligned} K(x) &= \sum_{n\leqslant x} g(n)\sum_{p^\nu|n}\ln p = \sum_{p^\nu\leqslant x}\ln p \sum_{m\leqslant x/p^\nu} g(mp^\nu)\\ &= \sum_{p^\nu\leqslant x}(\ln p)\Big\{g(p^\nu)G(x/p^\nu) + O\big(x/p^{\nu+1}\big)\Big\} \\ &= \sum_{d\leqslant x}\Lambda(d)g(d)G(x/d) + O(x). \end{aligned} \tag{4.42}$$

从中得到, 若记 $R(v) := \psi(v) - v$, 其中 ψ 是 Tchébychev 函数, 则有

$$\begin{aligned} |K(x)| &\leqslant \sum_{d\leqslant x}\Lambda(d)|G(x/d)| + O(x) = \int_1^x |G(x/t)|\,\mathrm{d}\psi(t) + O(x)\\ &= \int_1^x |G(x/t)|\,\mathrm{d}t + \int_1^x |G(x/t)|\,\mathrm{d}R(t) + O(x). \end{aligned}$$

注意到 $\big|\mathrm{d}|G(v)|\big| \leqslant \mathrm{d}\lfloor v\rfloor$, 用 Abel 求和法可估计最后的积分. 有

$$\begin{aligned} \int_1^x |G(x/t)|\,\mathrm{d}R(t) &= |G(x)| - \int_1^x R(x/t)\,\mathrm{d}|G(t)| \\ &\ll |G(x)| + \sum_{n\leqslant x}|R(x/n)| \ll x + \sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{x}{n(\ln 2x/n)^2} \ll x, \end{aligned}$$

其中用了形如

$$R(v) \ll v/(\ln 2v)^2 \qquad (v\geqslant 1)$$

的素数定理. 这便推出 (4.41).

第二步则在于上界估计

$$\int_1^x \frac{|G(t)|\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t \ll H_T\Big(\frac{2}{\ln x}\Big)\ln x + \frac{(\ln x)^2}{T} \qquad (x\geqslant 2). \tag{4.43}$$

在 (4.43) 中可将 $|G(t)|\ln t$ 换成 $|K(t)|$. 事实上, 由 (4.40), 这样导致的余项是 $O(\ln x)$, 考虑到 (4.38), 这是可以接受的. 现在用 Cauchy–Schwarz 不等式

$$\int_1^x \frac{|K(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \Big\{\int_1^x \frac{|K(t)|^2}{t^3}\,\mathrm{d}t\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big\}^{1/2}$$

可将 (4.43) 的证明归结到

$$\int_1^\infty \frac{|K(t)|^2}{t^{3+2\alpha}}\,\mathrm{d}t \ll \frac{H_T(\alpha)^2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3T^2} \qquad (\alpha > 0) \tag{4.44}$$

的证明. 事实上, 选 $\alpha=2/\ln x$ 便得需要的上界估计.

用等式

$$\int_0^{\infty} K(\mathrm{e}^u)\mathrm{e}^{-u\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u\tau}\,\mathrm{d}u=\frac{-F'(s)}{s}\qquad(\sigma>1)$$

可将 Plancherel 公式写成

$$\int_1^{\infty}\frac{|K(t)|^2}{t^{3+2\alpha}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{|K(\mathrm{e}^u)|^2}{\mathrm{e}^{2u(1+\alpha)}}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{F'(1+\alpha+\mathrm{i}\tau)}{1+\alpha+\mathrm{i}\tau}\right|^2\mathrm{d}\tau \tag{4.45}$$

的形式. 用 Gallagher 引理 (引理 4.9) 估计区域 $|\tau|>T$ 上的贡献. 有

$$\begin{aligned}\int_{|\tau|>T}\left|\frac{F'(1+\alpha+\mathrm{i}\tau)}{1+\alpha+\mathrm{i}\tau}\right|^2\mathrm{d}\tau&\leqslant\sum_{|k|\geqslant1}\int_{-T}^{T}\frac{|F'(1+\alpha+2\mathrm{i}kT+\mathrm{i}\tau)|^2}{k^2T^2}\,\mathrm{d}\tau\\&\ll\frac{1}{T^2}\sum_{n\geqslant1}\frac{(T+n)(\ln n)^2}{n^{2+2\alpha}}\ll\frac{1}{T}+\frac{1}{\alpha^3T^2}.\end{aligned} \tag{4.46}$$

用

$$\int_{|\tau|\leqslant T}\left|\frac{F'(1+\alpha+\mathrm{i}\tau)}{1+\alpha+\mathrm{i}\tau}\right|^2\mathrm{d}\tau\ll\sum_{|k|\leqslant T}\frac{1}{k^2+1}\int_{k-\frac12}^{k+\frac12}|F'(1+\alpha+\mathrm{i}\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau \tag{4.47}$$

估计补集 $|\tau|\leqslant T$ 上的贡献. 最后的积分不超过

$$\max_{\substack{\sigma=1+\alpha\\|\tau-k|\leqslant\frac12}}|F(s)|^2\int_{k-\frac12}^{k+\frac12}\left|\frac{F'}{F}(1+\alpha+\mathrm{i}\tau)\right|^2\mathrm{d}\tau. \tag{4.48}$$

此时应用形如

$$\frac{F'}{F}(s)=\frac{D'(s)}{1+D(s)}+\frac{F_1'}{F_1}(s)+\frac{J'}{J}(s)$$

的引理 4.11. 由 (4.37), 最后一项一致有界. 故它对 (4.48) 中积分的贡献为 $O(1)$. 另外

$$\frac{F_1'}{F_1}(s)=-\sum_{p>2}\frac{g(p)\ln p}{p^s}.$$

由引理 4.10, 有

$$\begin{aligned}\int_{k-\frac12}^{k+\frac12}\left|\frac{F_1'}{F_1}(1+\alpha+\mathrm{i}\tau)\right|^2\mathrm{d}\tau&=\int_{-\frac12}^{\frac12}\left|\frac{F_1'}{F_1}(1+\alpha+\mathrm{i}k+\mathrm{i}\tau)\right|^2\mathrm{d}\tau\\&\leqslant3\int_{-\frac12}^{\frac12}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\alpha+\mathrm{i}\tau)\right|^2\mathrm{d}\tau\ll\int_{-\frac12}^{\frac12}\frac{\mathrm{d}\tau}{\alpha^2+\tau^2}\ll\frac{1}{\alpha}.\end{aligned}$$

另外有

$$\frac{1}{1+D(s)}=1+\sum_{\nu\geqslant1}\big(-D(s)\big)^{\nu}\qquad(\sigma>1).$$

作为 Dirichlet 级数, 其系数的绝对值不超过

$$1+\sum_{\nu\geqslant 1}\Big(\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{2^{ms}}\Big)^{\nu}=\frac{2^s-1}{2^s-2}\ll\frac{1}{|s-1|}.$$

根据对 $\sigma\geqslant 1$ 一致成立的上界估计 $D'(s)\ll 1$, 由引理 4.10 得出

$$\int_{k-\frac12}^{k+\frac12}\left|\frac{D'(1+\alpha+\mathrm{i}\tau)}{1+D(1+\alpha+\mathrm{i}\tau)}\right|^2\mathrm{d}\tau\ll\int_{-\frac12}^{\frac12}\frac{\mathrm{d}\tau}{|1+D(1+\alpha+\mathrm{i}k+\mathrm{i}\tau)|^2}$$
$$\ll\int_{-\frac12}^{\frac12}\left|\frac{2^{1+\alpha+\mathrm{i}\tau}-1}{2^{1+\alpha+\mathrm{i}\tau}-2}\right|^2\mathrm{d}\tau\ll\frac{1}{\alpha}.$$

由前述计算得到 (4.48) 中的积分对 k 一致地为 $O(1/\alpha)$. 由 (4.46), 代入 (4.47) 后得

$$\int_1^{\infty}\frac{|K(t)|^2}{t^{3+2\alpha}}\,\mathrm{d}t\ll\frac{H_T(\alpha)^2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^3T^2}+\frac{1}{T}.$$

最后一项被前两项的和所控制, 于是得到 (4.44), 进而可得 (4.43).

现在可完成证明了. 由于 $H_T(\alpha)\gg 1$, 上界估计 (4.39) 第二项的阶满足要求. 为估计第一项, 用以下形式的 (4.43):

$$\int_{\sqrt{y}}^{y}\frac{|G(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t\ll H_T\Big(\frac{2}{\ln y}\Big)\qquad(y\geqslant\mathrm{e}),$$

得

$$\int_{\mathrm{e}^2}^{x}\frac{|G(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t\ll\int_{\mathrm{e}^2}^{x}\frac{|G(t)|}{t^2}\int_t^{t^2}\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}\,\mathrm{d}t\ll\int_{\mathrm{e}^2}^{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}\int_{\sqrt{y}}^{y}\frac{|G(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$\ll\int_{\mathrm{e}^2}^{x^2}H_T\Big(\frac{2}{\ln y}\Big)\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\int_{1/\ln x}^{1}\frac{H_T(\alpha)}{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha.$$

于是定理 4.7 得证. □

§4.3.4　应用

第一个应用是 Halász 定理 4.5 的实效形式.

推论 4.12　设 g 是模 $\leqslant 1$ 的乘性函数. 假设对 $x\geqslant 2, T\geqslant 2$ 有

$$m(x,T):=\min_{|\tau|\leqslant T}\sum_{p\leqslant x}\frac{1-\Re e\big(g(p)p^{-\mathrm{i}\tau}\big)}{p},\qquad R(x,T):=\frac{1+m(x,T)}{\mathrm{e}^{m(x,T)}}+\frac{1}{T}.$$

那么

$$\sum_{n\leqslant x}g(n)\ll x\,R(x,T).\tag{4.49}$$

证明 令

$$\mu(x,\tau) := \sum_{p\leqslant x} \Re e\,\big(g(p)/p^{1+\mathrm{i}\tau}\big), \qquad \mu^*(x,T) := \max_{|\tau|\leqslant T} \mu(x,\tau),$$

这样 $m(x,T) = \ln_2 x - \mu^*(x,T) + O(1)$.

从函数 $x \mapsto \mu^*(x,T)$ 的拟单调性开始. 显然

$$\left|\frac{\partial\mu(x,\tau)}{\partial\tau}\right| \leqslant \sum_{p\leqslant x} \frac{|g(p)|\ln p}{p} \ll \ln x,$$

故 $\mu(x,\vartheta) = \mu(x,\tau) + O(1)$ 对 $|\vartheta - \tau| \leqslant 1/\ln x$ 成立, 且

$$\mu(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\ln x \int_{\tau-1/\ln x}^{\tau+1/\ln x} \mu(x,\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta + O(1).$$

令 τ_y, $|\tau_y| \leqslant T - 1/\ln y$, 使得 $\mu(y,\tau_y) = \mu^*(y, T - 1/\ln y)$. 由前述, 有 $\mu^*(y,T) \leqslant \mu(y,\tau_y) + O(1)$, 故对 $x \geqslant y$ 有

$$\begin{aligned}
\mu^*(y,T) &= \frac{\ln y}{2}\int_{\tau_y-1/\ln y}^{\tau_y+1/\ln y} \mu(y,\tau)\,\mathrm{d}\tau + O(1)\\
&= \frac{\ln y}{2}\int_{\tau_y-1/\ln y}^{\tau_y+1/\ln y} \Big(\mu(x,\tau) - \{\mu(x,\tau) - \mu(y,\tau)\}\Big)\,\mathrm{d}\tau + O(1)\\
&\leqslant \mu^*(x,T) - \frac{\ln y}{2}\int_{\tau_y-1/\ln y}^{\tau_y+1/\ln y} \sum_{y<p\leqslant x} \Re e\,\frac{g(p)}{p^{1+i\tau}}\,\mathrm{d}\tau + O(1)\\
&\leqslant \mu^*(x,T) + \ln y \sum_{y<p\leqslant x} \frac{|g(p)|}{p\ln p} + O(1) \leqslant \mu^*(x,T) + O(1).
\end{aligned} \tag{4.50}$$

现在可完成证明了. 由 (4.32), 因为 $\sum_{p\leqslant\exp(1/\alpha)}(1/p - 1/p^{1+\alpha}) \ll 1$, 有

$$\begin{aligned}
\alpha F(1+\alpha+\mathrm{i}\tau) &\ll \exp\Big\{-\sum_{p\leqslant\exp(1/\alpha)} \frac{1-\Re e\big(g(p)p^{-\mathrm{i}\tau}\big)}{p^{1+\alpha}}\Big\}\\
&\ll \exp\Big\{-\sum_{p\leqslant\exp(1/\alpha)} \frac{1-\Re e\big(g(p)p^{-\mathrm{i}\tau}\big)}{p}\Big\}.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

故对 $|\tau| \leqslant T$, $1/\ln x \leqslant \alpha \leqslant 1$ 一致地有

$$F(1+\alpha+\mathrm{i}\tau) \ll \mathrm{e}^{-m(\exp(1/\alpha),T)}\alpha^{-1} \ll \mathrm{e}^{-m(x,T)}\ln x, \tag{4.52}$$

其中第二个估计来自 (4.50). 同样的上界估计对 (4.30) 中定义的函数 $H_T(\alpha)$ 也成立. 将该估计代入 $\alpha \leqslant \alpha_0 := \mathrm{e}^{m(x,T)}/\ln x$ 情形下的 (4.31) 并在相反的情形下用显然的上界估计 $H_T(\alpha) \ll 1/\alpha$, 得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n) &\ll \frac{1}{\ln x}\int_{1/\ln x}^{1} \frac{H_T(\alpha)}{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{T}\\
&\ll \mathrm{e}^{-m(x,T)}\ln(\alpha_0\ln x) + \frac{1}{\alpha_0\ln x} + \frac{1}{T} \ll R(x,T).
\end{aligned}$$

□

现在得出定理 4.7 的第二个推论, 与实乘性函数均值有关. 将用到如下引理.

引理 4.13 设 h 为 2π-周期函数, 在 $[0,2\pi]$ 上, 均值为

$$\overline{h} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\,\mathrm{d}t.$$

对任意实数 τ, w, z, 满足 $\tau \neq 0, 1 < w < z$, 有

$$\sum_{w<p\leqslant z}\frac{1}{p}h(\tau\ln p) = \overline{h}\ln\left(\frac{\ln z}{\ln w}\right) + O\left(\frac{V(h)}{|\tau|\ln w} + \frac{M(h)+(1+|\tau|)V(h)}{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln w}}}\right), \tag{4.53}$$

其中 $M(h) := \sup_t |h(t)|$, $V(h) := \int_0^{2\pi} |\mathrm{d}h(t)|$.

证明 可设 $\tau > 0$. 用形如 $R(t) := \pi(t) - \mathrm{li}(t) \ll t\exp\{-2\sqrt{\ln t}\}$ 的素数定理. 由 Abel 求和法, 可将 (4.53) 左边写成

$$\begin{aligned}&\int_w^z \frac{h(\tau\ln t)}{t\ln t}\,\mathrm{d}t + \left[\frac{R(t)h(\tau\ln t)}{t}\right]_w^z - \int_w^z R(t)\,\mathrm{d}\left(\frac{h(\tau\ln t)}{t}\right)\\ &\quad= \overline{h}\ln\left(\frac{\ln z}{\ln w}\right) + \int_{\tau\ln w}^{\tau\ln z}\left(h(t)-\overline{h}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_w^z \frac{R(t)}{t}\,\mathrm{d}h(\tau\ln t) + O\left(\frac{M(h)}{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln w}}}\right).\end{aligned}$$

注意到对任意 a, b 有

$$\left|\int_a^b \left(h(t)-\overline{h}\right)\mathrm{d}t\right| \ll V(h),$$

由第二中值定理知前式和中第二项 $\ll V(h)/(\tau\ln w)$. 而对 k 的和 $\ll (1+|\tau|)$, 故第三项

$$\ll \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln w}}\int_{\tau\ln w}^{\tau\ln w+2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{(v+2\pi k)/\tau}}\,|\,\mathrm{d}h(v)| \ll (1+|\tau|)V(h)\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln w}},$$

这推出了 (4.53). □

定理 4.14 (Hall 和 Tenenbaum, 1991) 设 φ_0 是方程

$$\sin\varphi_0 + (\pi-\varphi_0)\cos\varphi_0 = \tfrac{1}{2}\pi$$

在 $]0,2\pi[$ 中的唯一解. 令 $K = \cos\varphi_0 \approx 0.328\,67$. 那么对于任意实数 $x \geqslant 2$, 对取值在 $[-1,1]$ 中的乘性函数 g 一致地有

$$\sum_{n\leqslant x} g(n) \ll x\exp\left\{-K\sum_{p\leqslant x}\frac{1-g(p)}{p}\right\}. \tag{4.54}$$

注 Hall 和 Tenenbaum 证明了命题中的常数 K 是最优的.

证明 设 $h(\vartheta) := |\cos(\vartheta) - K|$. 先证对 $0 < \alpha \leqslant 1$, $\tau \in \mathbb{R}$ 一致地有

$$\sum_{p \leqslant \exp(1/\alpha)} \frac{h(\tau \ln p)}{p} \leqslant (1 - K)\ln(1/\alpha) + O\big(\ln_2\big(|\tau| + 3\big)\big). \tag{4.55}$$

可设 $\tau > 0$. 当 $\tau \leqslant \alpha$ 时, 将估计

$$h(\tau \ln p) = 1 - K + O(\tau \ln p) \tag{4.56}$$

对 p 求和即得关系 (4.55).

当 $0 < \alpha < \tau \leqslant 1$, 令 $w := \exp(1/\tau)$. 从 (4.56) 得出

$$\sum_{p \leqslant w} \frac{h(\tau \ln p)}{p} \leqslant (1 - K)\ln_2 w + O(1). \tag{4.57}$$

令 $z := \exp(1/\alpha)$ 并应用引理 4.13 于函数 h, 后者的均值为

$$\begin{aligned}\overline{h} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\cos\vartheta - \cos\varphi_0|\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{2}{\pi}\{\sin\varphi_0 - \varphi_0\cos\varphi_0\} + \cos\varphi_0 \\ &= 1 - \cos\varphi_0 = 1 - K.\end{aligned}$$

于是得

$$\sum_{w < p \leqslant z} \frac{h(\tau \ln p)}{p} \leqslant (1 - K)\big(\ln(1/\alpha) - \ln_2 w\big) + O(1), \tag{4.58}$$

从而由 (4.57) 知关系 (4.55) 在此情形仍成立.

现在设 $1 < |\tau| \leqslant \exp(1/\sqrt{\alpha}) - 3$, 并在引理 4.13 中选

$$w := \exp\{\ln^2(3 + |\tau|)\} \leqslant z = \exp(1/\alpha).$$

不等式 (4.58) 仍成立. 对 (4.57) 作显然估计便得 (4.55).

当 $|\tau| > \exp(1/\sqrt{\alpha}) - 3$ 时有 $\ln(1/\alpha) \ll \ln_2(3 + |\tau|)$, 且可对 (4.55) 中的整个和式作显然估计. 于是 (4.55) 无论如何都成立.

现在考虑由关系式

$$\sum_{p \leqslant \exp(1/\alpha)} \frac{1 - g(p)}{p} = \lambda \sum_{p \leqslant \exp(1/\alpha)} \frac{1}{p} \tag{4.59}$$

定义的值 $\lambda = \lambda(\alpha) \in [0, 2]$. 不等式

$$\begin{aligned}\Re e\,\big(g(p)p^{\mathrm{i}\tau}\big) &= g(p)\big(\cos(\tau \ln p) - K\big) + Kg(p) \\ &\leqslant |\cos(\tau \ln p) - K| + Kg(p) = h(\tau \ln p) + Kg(p)\end{aligned}$$

除以 p 再对 $p \leqslant \exp(1/\alpha)$ 求和, 应用 (4.55) 和 (4.59) 后得

$$\Re e \sum_{p \leqslant \exp(1/\alpha)} \frac{g(p)}{p^{1+i\tau}} \leqslant (1-K\lambda)\ln(1/\alpha) + O\big(\ln_2(|\tau|+3)\big). \tag{4.60}$$

现在讨论证明的最后一步. 由 Abel 求和法, 从素数定理中得到估计

$$\sum_{p \leqslant \exp(1/\alpha)} \frac{1-p^{-\alpha}}{p} + \sum_{p > \exp(1/\alpha)} \frac{1}{p^{1+\alpha}} \ll 1.$$

用 $F(s)$ 表示 (4.30) 中的 Dirichlet 级数. 从上述估计中知对 $s = 1+\alpha+i\tau$ 有

$$F(s) \ll \exp\left\{\Re e \sum_{p} \frac{g(p)}{p^s}\right\} \ll \exp\left\{\Re e \sum_{p \leqslant \exp(1/\alpha)} \frac{g(p)}{p^{1+i\tau}}\right\}. \tag{4.61}$$

从 (4.60) 和 (4.61) 中得到

$$F(s) \ll \alpha^{K\lambda-1} \ln^B(|\tau|+3),$$

其中 B 是适当的绝对常数. 于是 Montgomery 函数 $H(\alpha) := \lim_{T\to\infty} H_T(\alpha)$ 满足

$$H(\alpha)^2 \ll \alpha^{2K\lambda-2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\ln^B(|k|+4)}{k^2+1},$$

其中 H_T 在 (4.30) 中定义. 故

$$H(\alpha) \ll \alpha^{K\lambda-1}. \tag{4.62}$$

令 $S := \sum_{p\leqslant x}\{1-g(p)\}/p$. 对 $1/\ln x \leqslant \alpha \leqslant 1$ 有

$$\begin{aligned}\lambda\ln(1/\alpha)+O(1) = \sum_{p\leqslant\exp(1/\alpha)} \frac{1-g(p)}{p} &\geqslant \sum_{p\leqslant x}\frac{1-g(p)}{p} - \sum_{\exp(1/\alpha)<p\leqslant x}\frac{2}{p} \\ &\geqslant S - 2\ln_2 x + 2\ln(1/\alpha) + O(1).\end{aligned}$$

故

$$\alpha^\lambda \ll \alpha^2 \mathrm{e}^{-S} \ln^2 x.$$

代入 (4.62), 得

$$H(\alpha) \ll \alpha^{2K-1}\mathrm{e}^{-KS}(\ln x)^{2K},$$

于是由定理 4.7 知

$$G(x) \ll \frac{x}{\ln x}\mathrm{e}^{-KS}(\ln x)^{2K}\int_{1/\ln x}^{1} \alpha^{2K-2}\,\mathrm{d}\alpha \ll x\mathrm{e}^{-KS},$$

此即所欲证. □

§4.4 Erdős–Kac 定理

几率

$$\nu_N\{n : f(n) \leqslant A_N + zB_N\} \qquad (N \to \infty) \tag{4.63}$$

弱收敛的问题比极限分布存在性问题要更棘手. 在 f 是加性函数的情形很容易理解这一点：既然相应的特征函数等于

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\{f(n)-A_N\}/B_N}, \tag{4.64}$$

需要估计某依赖于 N 的乘性函数在前 N 个整数上的均值. 从定理 4.2、定理 4.4、定理 4.5 中不能得到这样的计算所需要的一致性；而且定理 4.7 的应用有时取决于对函数 $H_T(\alpha)$ 的微妙的估计, 参考文献见 §4.3 的注记.

我们打算在此讨论历史上关于正态化分布函数的第一个例子. 它是关于数论函数 $\omega(n)$ 的, 但同样的结果对 $\Omega(n)$ 也成立. 实效的均值定理来自第二部分 Selberg–Delange 型定理 5.2. 特征函数和分布函数的关系具体由 Berry–Esseen 不等式 (第二部分定理 7.16) 给出. 用

$$\Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

表示正态分布的分布函数, 其特征函数为

$$\varphi(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau y}\,\mathrm{d}\Phi(y) = \mathrm{e}^{-\tau^2/2}.$$

定理 4.15 (Erdős 和 Kac, 1939；Rényi 和 Turán, 1958) *对 $N \geqslant 2$, $y \in \mathbb{R}$ 一致地有*

$$\nu_N\Big\{n : \omega(n) \leqslant \ln_2 N + y\sqrt{\ln_2 N}\Big\} = \Phi(y) + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\ln_2 N}}\Big). \tag{4.65}$$

证明 令 $F_N(y)$ 为 (4.65) 的左边, 并令 $\varphi_N(\tau)$ 为相应的特征函数, 即

$$\varphi_N(\tau) := \frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} \exp\Big\{\frac{\mathrm{i}\tau}{\sqrt{\ln_2 N}}\big(\omega(n) - \ln_2 N\big)\Big\} \qquad (\tau \in \mathbb{R}).$$

由第二部分定理 6.1, 对 $N \geqslant 2$, $t \in \mathbb{R}$ 一致地有

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega(n)} = A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\big(\ln N\big)^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1} + O\big((\ln N)^{\cos t-2}\big), \tag{4.66}$$

其中 $A(z)$ 是 z 的整函数, 使得 $A(1) = 1$.

令 $T := \sqrt{\ln_2 N}$, 并取 $t = \tau/T$. 由于 $\cos t - 1 \leqslant -2(t/\pi)^2$ 对 $|t| \leqslant 1$ 成立, 得

$$\varphi_N(\tau) \ll \mathrm{e}^{-2\tau^2/\pi^2} \qquad (|\tau| \leqslant T). \tag{4.67}$$

下面将对 $T^{1/3} < |\tau| \leqslant T$ 用该估计.

注意到

$$A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = 1 + O(t), \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1 = \mathrm{i}t - \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^3) \qquad (|t| \leqslant 1),$$

另外, 由 (4.66) 知

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\omega(n)/T} = \Big\{1 + O\Big(\frac{\tau}{T}\Big)\Big\}\exp\Big\{\mathrm{i}\tau T - \tfrac{1}{2}\tau^2 + O\Big(\frac{\tau^3}{T}\Big)\Big\} + O\Big(\frac{1}{\ln N}\Big),$$

从而

$$\varphi_N(\tau) = \mathrm{e}^{-\tau^2/2}\Big\{1 + O\Big(\frac{|\tau| + |\tau|^3}{T}\Big)\Big\} + O\Big(\frac{1}{\ln N}\Big) \qquad (|\tau| \leqslant T^{1/3}). \tag{4.68}$$

下面将对 $1/\ln N < |\tau| \leqslant T^{1/3}$ 用这个估计.

当 $|\tau| \leqslant 1/\ln N$, 只须将估计 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = 1 + O(y)$ $(y \in \mathbb{R})$ 代入 $\varphi_N(\tau)$ 的定义中即可. 对 n 的求和依次用 Cauchy–Schwarz 和 Turán–Kubilius 不等式来估计, 得

$$\varphi_N(\tau) = 1 + O\Big(\frac{|\tau|}{TN}\sum_{n\leqslant N}|\omega(n) - \ln_2 N|\Big) = 1 + O(|\tau|). \tag{4.69}$$

考虑 Berry–Esseen 不等式

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}|F_N(y) - \Phi(y)| \ll \frac{1}{T} + \int_{-T}^{T}\Big|\varphi_N(\tau) - \mathrm{e}^{-\tau^2/2}\Big|\frac{\mathrm{d}\tau}{|\tau|}.$$

将积分分解成三个部分 I_1, I_2, I_3, 分别对应于积分区域 $T^{1/3} < |\tau| \leqslant T$, $1/\ln N < |\tau| \leqslant T^{1/3}$ 和 $0 \leqslant |\tau| \leqslant 1/\ln N$. 由 (4.67), (4.68), (4.69), 得

$$I_1 \ll \int_{T^{1/3}}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\tau^2/\pi^2}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \ll \frac{1}{T},$$

$$I_2 \ll \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1+\tau^2}{T}\Big)\mathrm{e}^{-\tau^2/2}\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{\ln N}\int_{1/\ln N}^{T^{1/3}}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \ll \frac{1}{T},$$

及

$$I_3 \ll \int_{-1/\ln N}^{1/\ln N}\mathrm{d}\tau \ll \frac{1}{T}.$$

命题得证. □

注意到 (4.65) 的余项是最优的. 事实上, 对 $k := \lfloor \ln_2 N \rfloor$, 由第二部分定理 6.4 知

$$\nu_N\{n : \omega(n) = k\} \sim \frac{1}{\ln N}\frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln_2 N}}. \tag{4.70}$$

然而, 若用 $R(N)$ 表示 (4.65) 中余项关于 $y \in \mathbb{R}$ 的上确界, 由用形如 (4.65) 的两个几率之差来计算 (4.70), 得

$$\frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi \ln_2 N}} = \Phi\Big(\frac{\vartheta}{\sqrt{\ln_2 N}}\Big) - \Phi\Big(\frac{\vartheta - 1/2}{\sqrt{\ln_2 N}}\Big) + O\big(R(N)\big),$$

其中 $\vartheta := k - \ln_2 N$. 从而

$$R(N) \gg 1/\sqrt{\ln_2 N}.$$

注记

§4.1　Erdős–Wintner 定理的纯概率证明 (应用 Kolmogorov 定理) 见 Novoselov (1964) 和 Babu (1973). 在 Galambos (1970) 出色的综述中有另一个概率表述.

Erdős 对定理 4.1 充分性的证明是通过三个步骤 (1935/1937/1938) 得到的.④ 必要性是 Erdős 和 Wintner 于 1939 年证明的.

在这里阐述的直接 (即不用 2.7 (a)) 得到极限分布连续性的方法是 Szüsz (1974) 证明的一个变体, 在 Elliott (1985) 著作第 437~439 页中有他自己对此的补充. 另外的证明见 Elliott (1979), 第 220~224 页.

Elliott 给出了定理 4.2 深刻的推广. 特引用下列结论, 在他 1997 年著作的第九章有证明. 对 $\alpha > 0$, 用 $\mathcal{L}^\alpha(\mathbb{N}^*)$ 表示使得

$$\|g\|_\alpha := \Big\{\limsup_{x\to\infty} \sum_{n\leqslant x} |g(n)|^\alpha\Big\}^{1/\alpha} < \infty$$

的数论函数 g 构成的集合.

定理 4.16 (Elliott)　*设 $\alpha > 1$. 乘性数论函数 $g \in \mathcal{L}^\alpha(\mathbb{N}^*)$ 有非零均值 $M(g)$ 的充要条件是级数*

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{g(p)-1}{p}, \quad \sum_{|g(p)|\leqslant 3/2} \frac{|g(p)-1|^2}{p}, \quad \sum_{|g(p)|>3/2} \frac{|g(p)|^\alpha}{p}, \quad \sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{\nu\geqslant 2} \frac{|g(p^\nu)|^\alpha}{p^\nu}$$

收敛且

$$\sum_{\nu\geqslant 0} \frac{g(p^\nu)}{p^\nu} \neq 0 \qquad (p \in \mathbb{P}).$$

④ 第 427 页习题 280 中有应用 Turán–Kubilius 不等式的一个直接证明.

此时有

$$M(g)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g(p^\nu)}{p^\nu}.$$

§4.2 Delange 并未发表定理 4.4, 但在报告中多次提到.

定理 4.2 (i) 的另一个证明是 Daboussi (1982, 1989) 的结果. 在习题 282 中提出第三个证明, 它参考了 Delange 的证明, 基于某 Tauber 型定理的应用.

Elliott 给出了定理 4.4 另一个著名的推广, 见 Elliott (1997) 定理 11.1.

§4.3 文献中有 Wirsing 定理 (定理 4.6) 的许多推广. 比如见 Elliott (1997) 第十七章. Tenenbaum (2007) 证明了, 对任意实乘性函数 g, 若 g^2 有均值, 那么 g 亦然. 且在此情形下有, 只要

$$\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\{g(p)-1\}^2}{p}=\infty,$$

便有 $M(g)=0$. 考虑到简单的第一部分定理 3.12, 这立即推出定理 4.6.

Montgomery (1994) 从 Hilbert 型不等式中得出了 (4.34) 的如下加强

$$\left|\int_{-T}^{T}\Big|\sum_{1\leqslant n\leqslant N}a_n\mathrm{e}(\lambda_n t)\Big|^2\mathrm{d}t-T\sum_{1\leqslant n\leqslant N}|a_n|^2\right|\leqslant\tfrac{3}{2}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\frac{|a_n|^2}{\delta_n}.\tag{4.71}$$

定理 4.7 中 $T=\infty$ 且 g 为完全乘性函数的情形由 Montgomery (1978b) 提出并证明. 一般情形的推广是纯技术性的. 在同一篇文章中 Montgomery 注意到他的结果可用来证明形如定理 4.14 的估计. 也见 Montgomery 和 Vaughan (2001). 这类估计称作均值的*实效上界估计*, 抑或均值的*定量定理*. 其特征是对某类被加函数是一致的, 但可依赖于 x. 定理 3.5 是这类结果的一个简单的例子. 定理 4.14 的估计可推广到使得 $|g|\leqslant 1$ 且对任意 p 来说 $g(p)$ 位于椭圆

$$\Im m\,(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}z)^2\leqslant\delta^2\big\{1-\Re e\,(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}z)^2\big\}$$

中的复值函数 g 的情形, 其中 δ,φ 是任意参数, 使得 $0\leqslant\delta<1$, $0\leqslant\varphi<\pi$. Hall 和 Tenenbaum (1991) 对每个数对 (δ,φ) 确定了使得

$$G(x)\ll x\mathrm{e}^{-K(\delta,\varphi)\sum_{p\leqslant x}\{1-\Re e\,g(p)\}/p}$$

的最好的常数 $K(\delta,\varphi)>0$.

定理 4.7 证明中上界估计 (4.39) 的原理由 Granville 和 Soundararajan (2003) 得出. 同一工作中还有许多关于乘性函数和上界估计的结果, 尤其是定理 4.7 的变体以及推论 4.12 的一个版本, 其中数值常数基本上是具体给出了的. 他们还构造了一些反例, 说明了这些估计从质量上说是最优的.

关于其他一般的结论以及所需技巧见 Elliott (1980), 第十九章, 其中讲述并细化了 Halász (1971) 的估计. Elliott 证明了下列结论；第一个对应于定理 4.14, 第二个则是 Delange 定理 (定理 4.2) 的一个实效形式.

定理 4.17 设 g 为完全乘性函数, 使得对适当的常数 $\lambda > 0$, 对任意 p 有 $g(p) = 0$ 或 $\lambda \leqslant |g(p)| \leqslant 2 - \lambda$. 当 $g(p) \neq 0$ 时令 ϑ_p 为 $g(p)$ 的幅角. 假设存在实数 ϑ_0, δ, $|\vartheta_0| \leqslant \pi$, $\delta > 0$, 使得 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_p} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_0}| \geqslant \delta$ $\big(g(p) \neq 0\big)$. 那么

$$\Big|\sum_{n\leqslant x} g(n)\Big| \ll x \exp\Big\{\sum_{p\leqslant x} \frac{|g(p)| - 1}{p} - c\sum_{p\leqslant x} \frac{|g(p)| - \Re e\, g(p)}{p} + 2\lambda \sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)=0}} \frac{1}{p}\Big\},$$

其中 c 是仅依赖于 δ 和 λ 的常数.

定理 4.18 设 g 为完全乘性函数, 使得对任意 p 有 $|g(p) - 1| \leqslant \eta \leqslant \eta_0 < 1$. 那么

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n\leqslant x} g(n) - Ax\Big| &\ll \eta x \exp\Big\{-\sum_{p\leqslant x} \frac{1 - \Re e\, g(p)}{p}\Big\}\\ &\quad + x\Big(\mathrm{e}^{-c_1/\eta} + (\ln x)^{-c_2}\Big) \exp\Big\{\sum_{p\leqslant x} \frac{|g(p)| - 1}{p}\Big\},\end{aligned}$$

其中 $A := \exp\big\{\sum_{p\leqslant x} (g(p) - 1)/p\big\}$, c_1, c_2 是仅依赖于 η_0 的正常数.

定理 4.5 完全回答了平移后的加性函数极限分布, 也就是分布函数

$$\nu_N\{n : f(n) \leqslant A_N + z\} \qquad (N \to \infty) \tag{4.72}$$

弱收敛的问题. 下列结论分别独立由 Elliott 和 Ryavec (1971), Levin 和 Timofeev (1971), Delange 以及 Kubilius (这两者未发表) 得到, 在 Elliott (1979) 第七章中有证明.

定理 4.19 设 f 为实加性函数, 存在函数 A_N 使得几率 (4.72) 弱收敛到某分布函数的充要条件是, 对适当的常数 c, 记 $h(n) := f(n) - c\ln n$ $(n \geqslant 1)$, 有

$$\sum_p \frac{1}{p} \min(1, |h(p)|^2) < \infty.$$

在此情形下, 可选择 $A_N := \sum_{p\leqslant N,\, |h(p)|\leqslant 1} h(p)/p + c\ln N$.

对于该 A_N, F 的特征函数等于

$$\frac{1}{1 + \mathrm{i}c\tau} \prod_{|h(p)|>1} w_p(\tau) \prod_{|h(p)|\leqslant 1} w_p(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau h(p)/p},$$

其中 $w_p(\tau) := \big(1 - 1/p\big) \sum_{\nu\geqslant 0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau h(p^{-\nu})} p^{-\nu}$. 另外, F 是纯粹的, 它连续当且仅当

$$\sum_{f(p)\neq 0} \frac{1}{p} = \infty.$$

§4.4　如同第 287 页习题 218 所暗示的, 显然可以从几率 $\nu_N\{n:\omega(n)=k\}$ 估计对适当的 k 值求和中导出 Erdős–Kac 定理. 在第二部分第六章中这些估计是用与这里相同的基本工具即 Selberg–Delange 方法而得到的.

Erdős 和 Kac (1939) 原来的证明没有具体的余项. LeVeque 于 1949 年猜想其界 $\ll 1/\sqrt{\ln_2 N}$ 并证明了它 $\ll (\ln_3 N)/(\ln_2 N)^{1/4}$. Kubilius 于 1956 年改进了该结果. 最终, LeVeque 猜想于 1958 年被 Rényi 和 Turán 通过这里所用的方法证明了. 利用对复值 z 时 $\sum_{n\leqslant x} z^{\omega(n)}$ 的估计 (见第二部分定理 6.1), Delange (1959) 得到了更精确的估计: 有⑤

$$\begin{aligned}&\nu_N\{n:\omega(n)\leqslant \ln_2 N+y\sqrt{\ln_2 N}\}\\&\quad=\Phi(y)+\frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi\ln_2 N}}\Big\{a-\tfrac{1}{6}y^2+\big\langle \ln_2 N+y\sqrt{\ln_2 N}\big\rangle\Big\}+O\Big(\frac{1}{\ln_2 N}\Big),\end{aligned}$$

其中 $a\approx 0.405\,16$.

习题

281. 证明对加性函数来说三种类型的分布函数 都可能出现. [提示: 见习题 256–259.]

282. 通过 Tauber 型定理证明 Delange 定理 必要性部分. ⑥ 设 g 为单位圆盘中取值的复值乘性函数, 具有非零的均值 $M(g)$. 对 $\sigma>0$ 及 $p\in\mathbb{P}$, 令 $G_p(\sigma):=\sum_{\nu\geqslant 0} g(p^\nu)/p^{\nu\sigma}$ 并用 log 表示对应于幅角主值的复对数函数.

(a) 证明 $\lim_{\sigma\to 1+}\zeta(\sigma)^{-1}\prod_{p\in\mathbb{P}} G_p(\sigma)=M(g)$.

(b) 证明对任意 $\sigma>1$ 有 $G_p(\sigma)\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$, 且极限

$$\lim_{\sigma\to 1+}\sum_{p\in\mathbb{P}}\log\Big\{\big(1-p^{-\sigma}\big)G_p(\sigma)\Big\},\qquad \lim_{\sigma\to 1+}\Big\{\log G_2(\sigma)+\sum_{p>3}\frac{g(p)-1}{p^\sigma}\Big\}$$

在 $\mathbb{C}$ 中良定义.

(c) 由前推出 $G_2(1)\neq 0$ 且当 $\sigma\to 1+$ 时 $\sum_p\{g(p)-1\}/p^\sigma$ 趋于某有限的极限.

(d) 对 $\omega=0$ 应用第二部分定理 7.7, 证明级数 $\sum_p\{g(p)-1\}/p$ 的收敛性.

283. 关于乘性函数的分布. 设 g 为实乘性函数.

⑤ $\langle t\rangle$ 表示 $t\in\mathbb{R}$ 的分数部分.

⑥ 同 Delange (1961) 的证明一样, 该证明利用了 Hardy–Littlewood–Karamata 的 Tauber 型定理 (我们用第二部分定理 7.7 的推广形式), 但细节明显不同.

(a) 证明 (比如应用第一部分定理 3.12)

$$\mathbf{d}\{n : g(n) = 0\} = 1 - \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geqslant 0,\, g(p^\nu) \neq 0} \frac{1}{p^\nu},$$

其中若无穷乘积发散则视之为 0. 特别地, 推出 $g(n) = 0$ a.e. 当且仅当 $\sum_{g(p)=0} 1/p = \infty$.

(b) 假设 g a.e. 非零, 并令

$$g^*(n) := \prod_{p^\nu \| n,\, g(p^\nu) \neq 0} g(p^\nu).$$

证明 g 和 g^* 同时有极限分布函数. 可先处理强乘性函数的情形再用 Elliott (1979) 的引理 1.45. [7]

(c) 现在假设 $g(n) \neq 0$ $(n \geqslant 1)$. 设 E 为素数类, 使得 $\sum_{p \in E} 1/p < \infty$. 令 $h(n) := \prod_{p^\nu \| n,\, p \notin E} g(p^\nu)$, $A := \{a : p|a \Rightarrow p \in E\}$, 并用符号 a 表示 A 中一般的整数. 证明 $\sum_{a \in A} 1/a < \infty$. 证明对任意 $N \geqslant 1$, $z \in \mathbb{R}$, 有

$$\nu_N\{n : g(n) \leqslant z\} = \frac{1}{N} \sum_{a \leqslant N} \sum_{a' \leqslant N/a} \mu(a') \sum_{m \leqslant N/aa',\, g(a)h(m) \leqslant z} 1.$$

推出若 h 有分布函数 H, 那么 g 有分布函数 G, 几乎处处等于

$$G(z) = \prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{a \in A} \frac{H_a\big(z/g(a)\big)}{a},$$

其中若 $g(a) > 0$, $H_a(z) := H(z)$; 若 $g(a) < 0$, $H_a(z) := 1 - H(z)$.

(d) 证明 Galambos 和 Szüsz (1986) 某定理的如下推广: 设 g 为乘性函数, 使得当 $n \geqslant 1$ 时 $g(n) \neq 0$, 且 $\sum_{g(p)<0} 1/p < \infty$. 那么 g 有在原点连续的极限分布当且仅当加性函数 $\ln|g(n)|$ 满足 Erdős–Wintner 定理的条件.[8]

284. Daboussi (1974) 定理. 若数论函数 f 使得对任意 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 来说函数 $n \mapsto f(n)\mathrm{e}(\alpha n)$ 均值都为零, 则说它有 (D) 性质.

---

⑦ 这里涉及连续性定理的一个变体, 称乘性函数 g 有分布函数, 当且仅当对任意固定的 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $j \in \{0, 1\}$, 数论函数

$$G_{j\tau}(n) := \begin{cases} |g(n)|^{\mathrm{i}\tau} \operatorname{sgn} g(n)^j, & \text{若 } g(n) \neq 0, \\ 0, & \text{若 } g(n) = 0 \end{cases}$$

有在 $\tau = 0$ 处连续的均值 $\varphi_j(\tau)$.

⑧ Galambos (1971) 给出了实强乘性函数有分布函数的一个充要条件. 一般的情形见 Elliott (1979), 定理 7.11.

(a) 证明若 g 有 (D) 性质, $\sum_{n\leqslant x}|g(n)| \ll x$ 且 $\sum_{n\geqslant 1}|h(n)|/n < +\infty$, 那么 $h*g$ 亦有 (D) 性质.

(b) 设 f 为模不超过 1 的乘性函数. 证明若 $g(n)=\mu(n)^2 f(n)$ 有 (D) 性质, f 亦然.

(c) 以下对 $y\geqslant 2$ 定义完全乘性函数 u_y, v_y 为

$$u_y(p):=1 \quad (p>y), \qquad u_y(p):=0 \quad (p\leqslant y), \qquad v_y(p):=1-u_y(p).$$

证明 $u_y := \mathbf{1}*v_y\mu$, 并推出 u_y 有 (D) 性质.

(d) 设 f 为模不超过 1 的乘性函数, 使得 $\nu\geqslant 2$ 时 $f(p^\nu)=0$. 证明 $f=fu_y*fv_y$. 适当应用 Cauchy–Schwarz 不等式, 证明对 $x\geqslant 1$ 有

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n)\mathrm{e}(\alpha n)\right|^2 \leqslant A(x)\{B_1(x)+B_2(x)\},$$

其中 $A(x):=(1/x)\sum_{n\leqslant x}u_y(n)$ 且

$$B_1(x):=\frac{1}{x}\sum_{d\leqslant x}\left|f(d)v_y(d)\right|^2\sum_{n\leqslant x/d}u_y(n),$$

$$B_2(x):=\sum_{1\leqslant d,d'\leqslant x,\, d\neq d'} fv_y(d)\overline{fv_y(d')}\,\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x/d',\, n\leqslant x/d}u_y(n)\mathrm{e}\big(\alpha n(d-d')\big).$$

(e) 证明 $\lim_{x\to\infty}A(x)=\prod_{p\leqslant y}(1-1/p)$ 且 $B_1(x)\leqslant 1$. 利用 $fv_y(d)$ 仅在有限个整数 d 处非零的事实, 证明当 $x\to+\infty$ 时 $B_2(x)\to 0$.

(f) 令 $y\to\infty$, 证明 Daboussi 定理: 任意模不超过 1 的乘性函数均有 (D) 性质.⑨

285. Montgomery 和 Vaughan (2001) 的一个估计. 令 $M(n,x)=\sum_{d|n,d\leqslant x}\mu(d)$.

(a) 用引理 4.13 证明对 $0<\alpha\leqslant 1, \tau\neq 0$ 一致地有

$$-\sum_{p>\exp(1/|\tau|)}\frac{\cos(\tau\ln p)}{p^{1+\alpha}}\leqslant 2\ln_2(3+|\tau|)+O(1),$$

$$\sum_{p>\exp(1/|\tau|)}\frac{|\cos(\tau\ln p)|}{p^{1+\alpha}}\leqslant \frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{\alpha}+\Big(2-\frac{4}{\pi}\Big)\ln_2(3+|\tau|)+O(1).$$

(b) 证明对任意整数 $n\geqslant 1$ 有

$$\left|\prod_{p|n}\left(1-p^{-1-\alpha-i\tau}\right)\right| \ll \alpha^{-1/\pi}\Big(\ln(3+|\tau|)\Big)^{2-2/\pi} \quad (0<\alpha\leqslant 1, \tau\neq 0).$$

⑨ 这里提出的证明异于 Daboussi 原来的证明 (见 Daboussi 和 Delange, 1982), 也是 Daboussi (1989) 的结果.

(c) 由定理 4.7 推出

$$\max_{n\geqslant 1}|M(n,x)| \ll x\big(\ln x\big)^{(1/\pi)-1} \qquad (x\geqslant 2). \tag{4.73}$$

(d) 证明 (4.73) 的左边 $\gg x/\ln x$. 对 $n_x := \prod_{\substack{p\leqslant x\\ \cos\ln p\leqslant 0}} p$ 估计

$$\int_1^\infty M(n_x,t)\,\mathrm{d}t/t^{2+\mathrm{i}},$$

并推出 (4.73) 中的常数 $1/\pi$ 最优. [10]

286. Halász (1971) 的一个定理. 设 E 为素数类. 令 $E(x) := \sum_{p\leqslant x,\, p\in E} 1/p$ 并考虑如 $\Omega(n;E) := \sum_{p^\nu\|n,\, p\in E}\nu$ 定义的乘性函数.

(a) 用定理 4.17 证明若 $\delta>0$, $\delta\leqslant |z|\leqslant 2-\delta$, 对不超过 δ 的某常数 $c_1>0$ 有

$$\sum_{n\leqslant x} z^{\Omega(n;E)} \ll x\exp\big\{\big(|z|-1-c_1(|z|-\Re e z)\big)E(x)\big\}.$$

(b) 用定理 4.18 证明, 若 $|z-1|\leqslant \frac{1}{2}$, 对某些绝对常数 $c_2>0$, $c_3>0$ 有

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} z^{\Omega(n;E)} - \mathrm{e}^{(z-1)E(x)}\right| \ll |z-1|\mathrm{e}^{(\Re e z-1)E(x)} + \mathrm{e}^{(|z|-1)E(x)}\Big\{\mathrm{e}^{-c_2/|z-1|}+(\ln x)^{-c_3}\Big\}.$$

(c) 如第二部分定理 6.3 证明那样用 Cauchy 公式, 从 (a) 和 (b) 中推出对 $E(x)\geqslant 2$, $\delta E(x)\leqslant m\leqslant (2-\delta)E(x)$ 一致地有[11]

$$\sum_{n\leqslant x,\,\Omega(n;E)=m} 1 = x\frac{E(x)^m}{m!}\mathrm{e}^{-E(x)}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{E(x)}}+\frac{|m-E(x)|}{E(x)}\Big)\Big\}.$$

287. 收敛到 Gauss 分布.

本习题中记 $y=y(x)=x^{1/\ln_2 x}$.

(a) 设 $\mathcal{A}(x)$ 为单位圆盘中取值且对 $p>y$ 及 $\nu\geqslant 1$ 满足 $G(p^\nu)=1$ 的乘性函数 G 组成的集合. 证明对 $x\geqslant 2$, $G\in\mathcal{A}(x)$ 一致地有

$$\sum_{n\leqslant x} G(n) = x\prod_{p\leqslant y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{G(p^\nu)}{p^\nu} + O\Big(\frac{x}{\ln x}\Big).$$

(b) 设 $\{g_x : x\geqslant 2\}$ 为一类模至多为 1 的乘性函数, 使得

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{y<p\leqslant x}|g_x(p)-1|/p = 0.$$

---

[10] 其实用 Hall 和 Tenenbaum (1991) 的方法可证明在 (4.73) 中可将 $\ll$ 换成 $\asymp$.

[11] 更精确的结论见 Halász (1972), Sárközy (1977b).

引进 $G_x(n) := \prod_{p\leqslant y,\, p^\nu \| n} g_x(p^\nu)$ 并用 (a) 证明

$$\sum_{n\leqslant x} g_x(n) = x\prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g_x(p^\nu)}{p^\nu} + o(x).$$

(c) 设 f 为实加性函数, 当 x 趋于无穷时满足下列关系:

i) $D(x)^2 := \sum_{p\leqslant x} f(p)^2/p \to +\infty$, ii) $\sum_{p\leqslant x} f(p)/p = o\big(D(x)\big)$,
iii) $\sum_{y<p\leqslant x} |f(p)|/p = o\big(D(x)\big)$, iv) $\max_{p\leqslant x} |f(p)| = o\big(D(x)\big)$.

对 $\tau\in\mathbb{R}$, 令 $g_x(n,\tau) := \exp\{\mathrm{i}\tau f(n)/D(x)\}$. 证明对固定的 τ 及 $p\leqslant x$ 有

$$1+\frac{g_x(p,\tau)-1}{p} = \exp\Big\{\frac{\mathrm{i}\tau f(p)}{pD(x)}-\frac{\tau^2 f(p)^2}{2pD(x)^2}+O\Big(\frac{|f(p)|^3}{pD(x)^3}+\frac{|f(p)|^2}{p^2D(x)^2}\Big)\Big\}.$$

从中推出 $\lim_{x\to+\infty} x^{-1}\sum_{n\leqslant x} g_x(n,\tau)$ 的存在性及其值. 证明对任意 $z\in\mathbb{R}$ 有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\big|\{n\leqslant x : f(n)\leqslant zD(x)\}\big| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

(d) 应用: 形如 $f(n) := \sum_{p|n}(-1)^{\lfloor \ln_2 p\rfloor}$ 的强加性函数是否有正规阶?

第五章 脆数和鞍点法

§5.1 简介, Rankin 方法

若整数 n 的最大素因子 $P^+(n)$ 不超过 y, 则称之为 y-脆数. 记

$$S(x,y) := \{n \leqslant x : P^+(n) \leqslant y\} \tag{5.1}$$

为不超过 x 的 y-脆数构成的集合. 本章中将讲述文献中研究的值

$$\Psi(x,y) := \big|S(x,y)\big| \tag{5.2}$$

估计的各种方法. 该问题在许多数论问题中很关键, 使用的方法从各方面来说都是典范.

对每个固定的 $y \geqslant 1$, $\Psi(x,y)$ 是乘性函数

$$\chi(n,y) := \begin{cases} 1, & \text{若 } P^+(n) \leqslant y, \\ 0, & \text{若 } P^+(n) > y \end{cases} \tag{5.3}$$

的和函数. 对应的 Dirichlet 级数是 Riemann 函数 Euler 乘积展开的前部, 即

$$\zeta(s,y) := \prod_{p \leqslant y} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\chi(n,y)}{n^s}. \tag{5.4}$$

在 1938 年一篇关于相邻素数之间的大差距的文章中, [①]Rankin 设想了对 $\Psi(x,y)$ 作上界估计的一种方法, 大体基于 $\zeta(s,y)$ 的收敛坐标是 $\sigma = 0$ 这一事

① 见定理 5.26.

实. 事实上, 对任意 $\sigma > 0$, 有

$$\Psi(x,y) \leqslant \sum_{n\geqslant 1,\, P^+(n)\leqslant y} \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} = x^{\sigma}\zeta(\sigma,y). \tag{5.5}$$

选取最优的 σ 便得到一个具体的上界估计. 该过程很简单但效果很显著, 可以许多方式推广. 如今称它为 Rankin*方法*. 将在定理 5.1 的证明中使用它的一个简单形式.

在 $\Psi(x,y)$ 渐进性质的研究中数值

$$u := \frac{\ln x}{\ln y} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2) \tag{5.6}$$

有决定性作用. 本章将系统地使用 (5.6) 的记号.

定理 5.1 *有*

$$\Psi(x,y) \ll x\mathrm{e}^{-u/2} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{5.7}$$

证明 可设 $y \geqslant 11$; 否则 $\Psi(x,y) \leqslant \Psi(x,7) \ll (\ln x)^4$, 而上界估计 (5.7) 的阶是 x 的多项式. 在此情形下, 对任意 $\alpha \geqslant 0$, 有

$$\Psi(x,y) \leqslant x^{3/4} + \sum_{n\leqslant x}\left(\frac{n}{x^{3/4}}\right)^{\alpha}\chi(n,y). \tag{5.8}$$

对于 $\alpha := 2/(3\ln y)$, 乘性函数 $n \mapsto n^{\alpha}\chi(n,y)$ 满足推论 3.6 的条件. 于是便得

$$\sum_{n\leqslant x} n^{\alpha}\chi(n,y) \ll x\prod_{p\leqslant y}\left(1+\frac{p^{\alpha}-1}{p}\right) \leqslant x\exp\left\{O\Big(\sum_{p\leqslant y}\frac{\alpha\ln p}{p}\Big)\right\} \ll x.$$

代入 (5.8) 并注意到对于 $y \geqslant 11$ 有 $\frac{1}{4}\ln x > \frac{1}{2}u$, 便得要证的结论. □

显然上述证明并非最优. 通过深刻地应用 Rankin 上界估计 (5.5), Bruijn (1966) 得到了一个一致的渐近估计, 给出了 $\ln\Psi(x,y)$ 当 u 和 y 趋于无穷时的一个等价形式. 以下给出稍为精确的一个版本, 其相对余项当 $y \to \infty$ 时趋于零. 令

$$Z := \frac{\ln x}{\ln y}\ln\left(1+\frac{y}{\ln x}\right) + \frac{y}{\ln y}\ln\left(1+\frac{\ln x}{y}\right) = u\int_0^1 \ln\left(1+\frac{y}{v\ln x}\right)\mathrm{d}v. \tag{5.9}$$

定理 5.2 *对 $x \geqslant y \geqslant 2$ 一致地有*

$$\ln\Psi(x,y) = Z\left\{1+O\Big(\frac{1}{\ln y}+\frac{1}{\ln_2 2x}\Big)\right\}. \tag{5.10}$$

证明 不妨设 x 足够大. 令

$$\varphi_y(\sigma) := \frac{-\zeta'(\sigma,y)}{\zeta(\sigma,y)} = \sum_{p\leqslant y}\frac{\ln p}{p^\sigma - 1} \qquad (0<\sigma\leqslant 1). \tag{5.11}$$

(5.5) 中参数 σ 的最优值是方程

$$\varphi_y(\alpha) = \ln x$$

的唯一解 $\alpha = \alpha(x,y)$.

证明的第一步是找到 $\alpha(x,y)$ 的一个具体的逼近. 为此要用素数定理来对 $\varphi_y(\sigma)$ 对于 $y\geqslant 2$, $0<\sigma\leqslant 1$ 一致地作估计, 得

$$\varphi_y(\sigma) = \frac{y}{y^\sigma - 1}\cdot\frac{1-y^{-(1-\sigma)}}{1-\sigma}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\ln y}\Big)\Big\}. \tag{5.12}$$

该估计的证明比较技巧化, 但复杂程度尚可, 这里略去, 但在习题 288 中指明推理的主要步骤.

从 (5.12) 中可推出估计

$$\alpha(x,y) = \beta(x,y)\Big\{1+O\Big(\frac{\ln_2 y}{\ln y}\Big)\Big\} \qquad (x\geqslant y\geqslant 2), \tag{5.13}$$

其中 $\beta = \beta(x,y)$ 是方程 $y/(y^\beta - 1) = \ln x$ 的解, 即

$$\beta(x,y) := \frac{\ln(1+y/\ln x)}{\ln y}. \tag{5.14}$$

为证明 (5.13), 先观察到 $\frac{1}{2}\leqslant(1-y^{-(1-\sigma)})/(1-\sigma)\leqslant \ln y \quad (0\leqslant\sigma\leqslant 1)$, 代入 (5.12) 后得到 $\alpha = \beta + O(\ln_2 y/\ln y)$. 这便对 $\beta > \frac{1}{2}$ 的情形证明了 (5.13). 若 $\beta\leqslant\frac{1}{2}$, 重新将该估计代入 (5.12) 中, 得

$$\ln x = \frac{y}{y^\beta - 1} = \frac{y}{(1-\beta)(y^\alpha - 1)}\Big\{1+O\Big(\frac{\ln_2 y}{\ln y}\Big)\Big\},$$

从而 $y^\alpha = y^\beta\{1+O(\beta\ln_2 y)\}$, 故终得 (5.13).

在 (5.5) 中选取 $\sigma=\beta$ 便得到定理 5.2 中的上界估计. 注意到

$$Z = \beta\ln x + \frac{y}{\ln y}\ln\Big(\frac{1}{1-y^{-\beta}}\Big). \tag{5.15}$$

由 (5.5), 有

$$\Psi(x,y)\leqslant x^\beta\zeta(\beta,y) = \zeta(1,y)\exp\Big\{\beta\ln x + \int_\beta^1 \varphi_y(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\Big\}. \tag{5.16}$$

当 $y \leqslant (\ln x)^2$ 时, 当然有 $\beta \leqslant \frac{2}{3}$. 从 (5.12) 便得

$$\int_\beta^1 \varphi_y(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\ln y}\Big)\Big\}\frac{y}{\ln y}\int_\beta^{2/3}\frac{(\ln y)\,\mathrm{d}\sigma}{(1-\sigma)(y^\sigma - 1)} + O\Big(\int_{2/3}^1 y^{1-\sigma}\ln y\,\mathrm{d}\sigma\Big).$$

第二个余项 $\ll y^{1/3}$. 对 σ 的积分等于

$$\int_\beta^{2/3}\frac{\ln y}{y^\sigma - 1}\,\mathrm{d}\sigma + O\Big(\int_\beta^{2/3}\frac{\sigma\ln y}{y^\sigma - 1}\,\mathrm{d}\sigma\Big) = \ln\Big(\frac{1-y^{-2/3}}{1-y^{-\beta}}\Big) + O\Big(\frac{1}{\ln y}\int_{\beta\ln y}^\infty\frac{t\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - 1}\Big)$$
$$= \ln\Big(\frac{1}{1-y^{-\beta}}\Big) + O\Big(\frac{1}{y^{2/3}} + \frac{1+\beta\ln y}{y^\beta\ln y}\Big).$$

于是

$$\int_\beta^1 \varphi_y(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\ln y}\Big)\Big\}\frac{y}{\ln y}\ln\Big(\frac{1}{1-y^{-\beta}}\Big) + O\Big(\frac{y(1+\beta\ln y)}{y^\beta(\ln y)^2}\Big).$$

第二个余项 $\ll Z/\ln y$. 事实上, 当 $y \leqslant \ln x$ 时 $\beta\ln y \ll 1$, 故 $Z \gg y/\ln y$; 当 $\ln x < y \leqslant (\ln x)^2$ 时有 $\beta\ln y \gg 1$, 故

$$\frac{y(1+\beta\ln y)}{y^\beta(\ln y)^2} \asymp \frac{\beta y^{1-\beta}}{\ln y} \asymp \beta u \ll \frac{Z}{\ln y}.$$

代入 (5.16), 便对 $y \leqslant (\ln x)^2$ 得到上界估计

$$\ln\Psi(x,y) \leqslant Z\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\ln y}\Big)\Big\}. \tag{5.17}$$

当 $(\ln x)^2 < y \leqslant x$ 时有 $\beta \gg 1$. 从 (5.12) 中得

$$\varphi_y(\sigma) = \frac{y^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\ln y}\Big)\Big\} \qquad (\beta \leqslant \sigma \leqslant 1).$$

这立即推出

$$\int_\beta^1 \varphi_y(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\ln y}\Big)\Big\}\int_0^{(1-\beta)\ln y}\frac{\mathrm{e}^v - 1}{v}\,\mathrm{d}v \ll \frac{y^{1-\beta}}{(1-\beta)\ln y}.$$

注意到 $y^{1-\beta} = \Big(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{\ln x}\Big)^{-1} \asymp \ln x$, 故

$$\int_\beta^1 \varphi_y(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \ll \frac{\ln x}{\ln_2 x},$$

从而

$$\ln\Psi(x,y) \leqslant \beta\ln x + O\Big(\frac{\ln x}{\ln_2 x}\Big) \leqslant Z\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\ln_2 x}\Big)\Big\}.$$

于是便在各种情形下均证明了 (5.10) 中的上界估计. 为得到下界估计, 令 $v := \lceil u \rceil$, $z := x^{1/v}$, $k := \pi(z)$. 于是 $\Psi(x,y) \geqslant \Psi(x,z)$, 而显然每个使得 $\sum_{j=1}^{k} \nu_j \leqslant v$ 的非负整数 k-元组 $(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ 至少对应于一个计入 $\Psi(x,z)$ 中的整数, 即 $\prod_{j=1}^{k} p_j^{\nu_j}$ (其中 p_j 表示第 j 个素数). 于是

$$\Psi(x,y) \geqslant \binom{k+v}{v},$$

从而应用 Stirling 公式便得

$$\ln \Psi(x,y) \geqslant (k+v)\ln(k+v) - k\ln k - v\ln v + O\big(1 + \ln \min(k,v)\big).$$

该下界估计的主项还可写成 $\int_0^k \ln(1+v/t)\,\mathrm{d}t$. 于是看到将 k 换成 $z/\ln z$ 带来的误差

$$\ll \frac{z}{(\ln z)^2} \ln\left(1 + \frac{v}{k}\right) \ll \frac{z}{(\ln z)^2} \ln\left(1 + \frac{\ln x}{z}\right).$$

这样有

$$\ln \Psi(x,y) \geqslant W(z)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\ln z}\Big)\Big\}, \tag{5.18}$$

其中

$$W(z) := \frac{\ln x}{\ln z} \ln\left(1 + \frac{z}{\ln x}\right) + \frac{z}{\ln z} \ln\left(1 + \frac{\ln x}{z}\right).$$

容易验证

$$W'(t) = -\frac{W(t)}{t\ln t} + \frac{1}{\ln t} \ln\left(1 + \frac{\ln x}{t}\right).$$

简单计算后得到, 对 $\sqrt{y} \leqslant t \leqslant y^2$ 有

$$W'(t) \ll \begin{cases} \dfrac{\ln x}{t\ln t}, & 若\ y \leqslant (\ln x)^4, \\ \dfrac{(\ln x)\ln_2 x}{t(\ln t)^2}, & 若\ (\ln x)^4 < y \leqslant x. \end{cases}$$

注意到 $(\ln y)/\ln z = 1 + O(1/u)$, 通过简短的计算, 从中得到

$$Z - W(z) = W(y) - W(z) \ll \min(\ln y, \ln_2 x) \ll Z\Big(\frac{1}{\ln y} + \frac{1}{\ln_2 x}\Big).$$

代入 (5.18), 得

$$\ln \Psi(x,y) \geqslant Z\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\ln y} + \frac{1}{\ln_2 x}\Big)\Big\}.$$

于是定理 5.2 得证. □

定理 5.2 阐明了当 y 穿过值 $\ln x$ 时 $\Psi(x,y)$ 性态的变化. 在以下各节中将详细描述这个现象. 它可以至少部分地用以下事实来解释: 当 y 值较小时, 对于 $y \leqslant (1-\varepsilon)\ln x$ 成立的关系

$$\prod_{p \leqslant y} p = o(x), \quad (x \to \infty)$$

赋 $\Psi(x,y)$ 所计数的整数集以一种特殊结构：在典则分解中某些指数必须"较大".

§5.2 几何方法

从前述定理 5.2 的下界估计的证明中看到, 数量 $\Psi(x,y)$ 可解释为 $\mathbb{R}^k$ 中某多面体中的整点个数, 其中 $k := \pi(y)$. 当 k 不太大时, 容易得到一个好的估计.

设 $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为一列正实数. 令

$$N_k(z) := \left|\left\{(\nu_1,\ldots,\nu_k)\in\mathbb{N}^k : \textstyle\sum_{1\leqslant j\leqslant k}\nu_j a_j \leqslant z\right\}\right|.$$

定理 5.3 对 $k\geqslant 1$, $z\geqslant 0$, 有

$$\frac{z^k}{k!}\prod_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{1}{a_j} < N_k(z) \leqslant \frac{\left(z+\sum_{1\leqslant j\leqslant k}a_j\right)^k}{k!}\prod_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{1}{a_j}. \tag{5.19}$$

对 $k := \pi(y)$, $z := \ln x$, $a_j := \ln p_j$ (其中 p_j 表示第 j 个素数), 有 $N_k(z) = \Psi(x,y)$ 及 $\sum_{1\leqslant j\leqslant k}a_j = \vartheta(y) \ll y$. 于是立即得到如下结论.

推论 5.4 (Ennola, 1969) 对 $2\leqslant y\leqslant\sqrt{\ln x\ln_2 x}$ 一致地有

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{\pi(y)!}\prod_{p\leqslant y}\left(\frac{\ln x}{\ln p}\right)\left\{1+O\left(\frac{y^2}{\ln x\ln y}\right)\right\}. \tag{5.20}$$

定理 5.3 的证明 对 k 归纳. $k=1$ 时结论成立. 这是因为

$$\frac{z}{a_1} < N_1(z) = 1+\left\lfloor\frac{z}{a_1}\right\rfloor \leqslant \frac{z+a_1}{a_1}.$$

假设 (5.19) 中的两个不等式对 $k-1$ 成立, 其中 $k\geqslant 2$. 有

$$N_k(z) = \sum_{0\leqslant\nu\leqslant z/a_k} N_{k-1}(z-\nu a_k),$$

从而

$$\frac{1}{(k-1)!}\prod_{1\leqslant j<k}\frac{1}{a_j}S_k(z) < N_k(z) \leqslant \frac{1}{(k-1)!}\prod_{1\leqslant j<k}\frac{1}{a_j}S_k(w),$$

其中 $S_k(t) := \sum_{0\leqslant\nu\leqslant z/a_k}(t-\nu a_k)^{k-1}$, $w := z+\sum_{1\leqslant j<k}a_j$.

设 $n := \lfloor z/a_k\rfloor$. 由 0 阶 Euler–Maclaurin 公式 (见第一部分定理 0.7) 得

$$S_k(z) = \sum_{0\leqslant\nu\leqslant n}(z-\nu a_k)^{k-1} = \int_0^n (z-ta_k)^{k-1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left\{(z-na_k)^{k-1}+z^{k-1}\right\} - (k-1)a_k\int_0^n B_1(t)(z-ta_k)^{k-2}\,\mathrm{d}t,$$

其中 $B_1(t) := \langle t\rangle - \frac{1}{2}$. 最后的积分的绝对值不超过

$$-\frac{1}{2}\int_0^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{(z-ta_k)^{k-1}\}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\{z^{k-1}-(z-na_k)^{k-1}\}.$$

由 $(z-na_k)/ka_k \leqslant 1/k < 1$, 得

$$S_k(z) \geqslant \frac{1}{a_k}\left\{\frac{z^k}{k} - \frac{(z-na_k)^k}{k}\right\} + (z-na_k)^{k-1} > \frac{z^k}{ka_k},$$

这便证明了要求的下界估计.

为得到上界估计, 重新应用 Euler–Maclaurin 公式, 但把 z 换成 w. 得

$$S_k(w) \leqslant \int_0^n (w-ta_k)^{k-1}\,\mathrm{d}t + w^{k-1} \leqslant \frac{w^k + ka_kw^{k-1}}{ka_k} < \frac{(w+a_k)^{k-1}}{ka_k}.$$

命题得证. □

除了提供关于 $\Psi(x,y)$ 的整体性态的信息之外, Ennola 定理还明确了该函数变化的局部信息. 当 y 小的时候, 看到 $\Psi(x,y)$ 对于素数分布的奇异性非常敏感. 比如容易从 (5.20) 中推知当 $y \leqslant \sqrt{\ln x}$ 时不存在与 $\Psi(x,y)$ 等价的关于 x 和 y 的连续函数. 事实上, 若 y 是素数, 当 x 和 y 趋于无穷时有

$$\frac{\Psi(x,y)}{\Psi(x,y-)} \sim \frac{\ln x}{\pi(y)\ln y} \sim \frac{\ln x}{y} \to \infty.$$

§5.5 中还将回顾这一点.

§5.3 函数方程

像大部分筛法问题中涉及的量一样, $\Psi(x,y)$ 满足一个函数方程.

定理 5.5 对 $x \geqslant 1, y \geqslant 1$, 有

$$\Psi(x,y) = 1 + \sum_{p\leqslant y}\Psi(x/p,p). \tag{5.21}$$

证明 若 $n>1$ 计入 $\Psi(x,y)$ 中, 可将 n 写成 $n=mp$, 其中 $p=P^+(n)$. 最后一个条件等价于 $P^+(m)\leqslant p$. 从而

$$\Psi(x,y) = 1 + \sum_{p\leqslant y}\ \sum_{n\leqslant x,\, P^+(n)=p} 1 = 1 + \sum_{p\leqslant y}\ \sum_{m\leqslant x/p,\, P^+(m)\leqslant p} 1,$$

此即 (5.21). □

实际应用中, 常用该方程来表示差值 $\Psi(x,z)-\Psi(x,y)$.

推论 5.6 (Buchstab 恒等式) 对 $x \geqslant 1, z \geqslant y \geqslant 1$, 有

$$\Psi(x,y) = \Psi(x,z) - \sum_{y<p\leqslant z} \Psi(x/p,p). \tag{5.22}$$

通过对 $\lfloor u \rfloor = \lfloor \ln x/\ln y \rfloor$ 递归, 该等式可用来渐近地计算 $\Psi(x,y)$. 事实上, 当 $y \geqslant x$, 即 $u \leqslant 1$ 时有 $\Psi(x,y) = \lfloor x \rfloor$. 注意到只要 $y \geqslant \sqrt{x}$, 在 (5.22) 中便有 $x/p \leqslant p$. 于是 (取 $z = x$) 对 $\sqrt{x} \leqslant y \leqslant x$, 有

$$\Psi(x,y) = \lfloor x \rfloor - \sum_{y<p\leqslant x} \lfloor x/p \rfloor \sim x(1-\ln u),$$

其中用到了素数定理. 注意到可再将该估计代入 (5.22). 取 $z = \sqrt{x}$, 可得对 $x^{1/3} \leqslant y \leqslant x^{1/2}$, 有

$$\Psi(x,y) \sim x(1-\ln 2) - \sum_{y<p\leqslant\sqrt{x}} \frac{x}{p}\Big\{1 - \ln\Big(\frac{\ln(x/p)}{\ln p}\Big)\Big\} \sim x\varrho(u),$$

其中

$$\varrho(u) := 1 - \ln u + \int_2^u \ln(v-1)\frac{\mathrm{d}v}{v} \qquad (2 \leqslant u \leqslant 3).$$

显然该过程对于任意 $\varepsilon > 0$ 给出了渐近关系

$$\Psi(x,y) \sim x\varrho(u) \qquad (x^\varepsilon < y \leqslant x), \tag{5.23}$$

其中 ϱ 是由初值条件 $\varrho(u) = 1 \quad (0 \leqslant u \leqslant 1)$ 和方程 (5.22) 的光滑化版本, 即

$$\varrho(u) = \varrho(k) - \int_k^u \varrho(v-1)\frac{\mathrm{d}v}{v} \qquad (k < u \leqslant k+1) \tag{5.24}$$

所决定的常数.

该函数是 Dickman 于 1930 年发现的, 如今以他的名字命名. 它在 $u = 1$ 处连续, 在 $u > 1$ 时可微, 且是微分差分方程

$$u\varrho'(u) + \varrho(u-1) = 0 \qquad (u > 1) \tag{5.25}$$

的解. 对 (5.24) 求导便得该方程. 出现反映 Buchstab 等式的这类方程是筛法问题的特征.

定理 5.7 Dickman 函数 $\varrho(u)$ 满足以下性质:

(i) $u\varrho(u) = \int_{u-1}^u \varrho(v)\,\mathrm{d}v \quad (u \geqslant 1)$,

(ii) $\varrho(u) > 0 \quad (u \geqslant 0)$,

(iii) $\varrho'(u) < 0 \quad (u > 1)$,

(iv) $\varrho(u) \leqslant 1/\Gamma(u+1) \quad (u \geqslant 0)$.

证明 (i) 由 (5.25) 以及 ϱ 的初值条件立得. 事实上, (i) 的两部分在 $u>1$ 上有相同的导数, 且在 $u=1$ 处有相同的值.

现证 (ii). 设 $\tau := \inf\{u : \varrho(u)=0\}$. 若 τ 有限则 $\tau>1$. 这是因为 ϱ 连续, 且 $\varrho(u)=1$ 对于 $0\leqslant u\leqslant 1$ 成立. 由 (i) 得

$$0=\tau\varrho(\tau)=\int_{\tau-1}^{\tau}\varrho(v)\,\mathrm{d}v.$$

于是由 τ 的定义, ϱ 的连续性推出等式的右边为正. 这说明 τ 无限, 故 (ii) 成立.

(iii) 由 (ii) 及函数方程 (5.25) 立得.

对 $k:=\lfloor u\rfloor$ 归纳来证明 (iv). 由于 $\varrho(u)=1$ $(0\leqslant u\leqslant 1)$, 当 $k=0$ 时命题成立. 若 $k\geqslant 1$, 从 (i), (ii), (iii) 及归纳假设得

$$\varrho(u)=\frac{1}{u}\int_{u-1}^{u}\varrho(v)\,\mathrm{d}v\leqslant\frac{\varrho(u-1)}{u}\leqslant\frac{1}{u\Gamma(u)}=\frac{1}{\Gamma(u+1)}\qquad\square$$

后文中 (推论 5.19) 将看到渐近关系 (5.23) 在 x,y 的很大的一个区域中成立. 如下定理是在该方向上的中间结果, 是归纳应用 Buchstab 恒等式的初步尝试.

定理 5.8 对 $x\geqslant y\geqslant 2$ 一致地有

$$\Psi(x,y)=x\varrho(u)+O\Big(\frac{x}{\ln y}\Big). \tag{5.26}$$

证明 鉴于 $u\to\infty$ 时 $\varrho(u)$ 速降, 可仅对 $u\leqslant 2\ln_2 y$ 的情形证明命题. 相反的情形下, (5.26) 余项的阶大于其主项, 结论由定理 5.1 可得.

于是令 $\Delta(x,y)$ 为关系

$$\Psi(x,y)=x\varrho(u)+\frac{x\Delta(x,y)}{\ln y}$$

所隐性决定的量. 如前述所见, 对 $y\geqslant 2$, $1\leqslant u\leqslant 2$ 有 $\Delta(x,y)\ll 1$. 事实上, 由 $z=x$ 下的关系 (5.22) 推出

$$\Psi(x,y)=\lfloor x\rfloor-\sum_{y<p\leqslant x}\lfloor x/p\rfloor=x(1-\ln u)+O\big(\pi(x)\big)=x\varrho(u)+O\Big(\frac{x}{\ln x}\Big).$$

下面将对 $k\leqslant 1+2\ln_2 y$ 归纳, 证明数量

$$\Delta_k(y):=1+\sup\big\{|\Delta(X,Y)|:y\leqslant Y\leqslant X\leqslant Y^k\big\}$$

有限且一致有界. 设 $\Delta_k(y)<\infty$ $(k\geqslant 2)$, 并考虑 X,Y, 使得 $Y\geqslant y$,

$Y^2 < X \leqslant Y^{k+1}$. 取 $z = \sqrt{X}$, 对 (X,Y) 用 (5.22), 并记 $U := (\ln X)/\ln Y$, 得

$$\begin{aligned}\Psi(X,Y) &= \Psi(X,\sqrt{X}) - \sum_{Y<p\leqslant\sqrt{X}} \Psi(X/p,p) \\ &= X\left\{\varrho(2) - \int_2^U \varrho(v-1)\,\mathrm{d}L(v)\right\} \\ &\quad + \frac{X}{\ln Y}\left\{\frac{2}{U}\Delta(X,\sqrt{X}) - \sum_{Y<p\leqslant\sqrt{X}} \frac{\Delta(X/p,p)\ln Y}{p\ln p}\right\},\end{aligned} \tag{5.27}$$

其中

$$L(v) := -\sum_{Y<p\leqslant X^{1/v}} \frac{1}{p} = \ln(v/U) + O\big(\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln Y}}\big).$$

定理 5.7 的性质 (iii) 说明 ϱ 单调下降. 由 Abel 求和法立即得到

$$\int_2^U \varrho(v-1)\,\mathrm{d}L(v) = \int_2^U \varrho(v-1)\frac{\mathrm{d}v}{v} + O\Big(\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln Y}}\Big) = \varrho(2) - \varrho(U) + O\Big(\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln Y}}\Big).$$

另外, 对 $Y < p \leqslant \sqrt{X}$, 有

$$1 \leqslant \frac{\ln(X/p)}{\ln p} \leqslant U - 1 \leqslant k.$$

于是对这样的 p, 可将 $\Delta(X/p,p)$ 放大为 $\Delta_k(y) - 1$. 代入 (5.27) 便由素数定理得

$$\begin{aligned}1 + |\Delta(X,Y)| &\leqslant 1 + C_0\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln Y}} + \big(\Delta_k(y) - 1\big)\left\{\frac{2}{U} + \sum_{Y<p\leqslant\sqrt{X}} \frac{\ln Y}{p\ln p}\right\} \\ &\leqslant \Delta_k(y)\Big(1 + C_1\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln Y}}\Big),\end{aligned}$$

对 $X, Y, Y \geqslant y$, $k < U \leqslant k+1$ 取上确界并迭代, 得

$$\Delta_{\lfloor 2\ln_2 y\rfloor}(y) \ll \Big(1 + C_1\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln y}}\Big)^{2\ln_2 y} \ll 1,$$

此即要证的结论. □

如果采用与 $\Psi(x,y)$ 所满足的 Buchshtab 恒等式更为吻合的主项, 那么定理 5.8 的证明可以细化. 如此可改进余项 $O(x/\ln y)$, 但这样一来余项便依赖于 u, 从而当 u 很大时反而不好. 这是该方法所固有的不便之处. 在这一方向上 de Bruijn (1951b) 选择了主项

$$\Lambda(x,y) = \begin{cases} x\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(u-v)\,\mathrm{d}\big(\lfloor y^v\rfloor/y^v\big), & \text{若 } x \notin \mathbb{N}^*, \\ \Lambda(x+,y), & \text{若 } x \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{5.28}$$

将在 §5.5 中看到该定义的另一个直观说明, 在注记中给出其一个渐近展开, 点明该函数在 x, y 一个大的区域内的性态. 现在仅限于指出有

$$\Lambda(x,y) = \lfloor x \rfloor \qquad (x \leqslant y) \tag{5.29}$$

及

$$\Lambda(x,y) = \Lambda(x,z) - \int_y^z \Lambda\Big(\frac{x}{t}, t\Big) \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \qquad (y \leqslant z). \tag{5.30}$$

这样 $\Lambda(x,y)$ 和 $\Psi(x,y)$ 具有相同的初值条件, 并满足一个函数方程, 是 Buchstab 不等式的连续形式.

用与定理 5.8 类似的方法, de Bruijn 得到公式

$$\Psi(x,y) = \Lambda(x,y) + O\Big(\frac{xu^2}{L_\varepsilon(y)}\Big) \qquad (x \geqslant y \geqslant 2), \tag{5.31}$$

其中

$$L_\varepsilon(y) := \exp\big\{(\ln y)^{(3/5)-\varepsilon}\big\}. \tag{5.32}$$

在 §5.5 中将证明, 当 $y \geqslant (\ln x)^2$ 时 (5.31) 主项的阶为 $x\varrho(u)$. 由定理 5.7 (iv) 的上界估计知 (5.31) 只可能在区域

$$\exp\big\{(\ln x)^{(5/8)+\varepsilon}\big\} \leqslant y \leqslant x \tag{5.33}$$

中给出 $\Psi(x,y)$ 的等价形式. 可将该区域看成 Buchstab 恒等式迭代方法的极限适用域.

用另一个函数方程, Hildebrand (1986a) 可观地改进了 de Bruijn 的结果. 在 (5.1) 的记号下, 该函数方程为

$$\Psi(x,y) \ln x = \int_1^x \Psi(t,y) \frac{\mathrm{d}t}{t} + \sum_{d \in S(x,y)} \Lambda(d) \Psi\Big(\frac{x}{d}, y\Big). \tag{5.34}$$

相对于 (5.22) 来说, 方程 (5.34) 有两个优点：一方面, 由于它将 y 视为常数, 故具有一元方程的形式, 较易迭代；另一方面, 它将 $\Psi(x,y)$ 表示成自己的平均, 迭代后具有强大的正则化效果. 后者在 Buchstab 等式中已有朦胧的体现. 若要在方法本身中寻找该现象的缘由, 那便是从 $\Psi(x,z)$ 出发截取正的项来计算 $\Psi(x,y)$. 这样可以合理地想象, Buchstab 恒等式的迭代制造了交错项, 这些正负相消应视为余项中还可改进的部分.

Hildebrand 证明了对每个 $\varepsilon > 0$, 公式

$$\Psi(x,y) = x\varrho(u)\Big\{1 + O\Big(\frac{\ln(u+1)}{\ln y}\Big)\Big\} \tag{5.35}$$

在区域

$$\exp\left\{(\ln_2 x)^{(5/3)+\epsilon}\right\} \leqslant y \leqslant x \tag{5.36}$$

上一致成立.

它作为一个同时推广 (5.31) 和 (5.35) 的定理的推论, 将在 §5.5 中证明. 该定理的证明方法是纯解析的. 这里就不试图从 (5.34) 推出 (5.35) 了. 但阐述如何证明 (5.34).

实际上, 只须用两种方法计算数量

$$S := \sum_{n\in S(x,y)} \ln n.$$

一方面, 用 Abel 求和法, 得

$$S = \Psi(x,y)\ln x - \int_1^x \Psi(t,y)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

另一方面, 由 Λ 函数的卷积等式得

$$S = \sum_{n\in S(x,y)} \sum_{d|n}\Lambda(d) = \sum_{d\in S(x,y)} \Lambda(d)\Psi\big(x/d,y\big).$$

(5.34) 的另一应用见注记中的定理 5.27.

§5.4　Dickman 函数

在此补充上节引入的 Dickman 函数 $\varrho(u)$ 的解析性质, 特别阐明其渐近性态.

回顾将 $\varrho(u)$ 定义成微分差分方程

$$u\varrho'(u) + \varrho(u-1) = 0 \qquad (u>1) \tag{5.37}$$

在 $u=1$ 处连续, 在 $u>1$ 上可微且满足初始条件 $\varrho(u)=1$ $(0\leqslant u\leqslant 1)$ 的解. 为方便计, 以下将 $\varrho(u)$ 延拓到整个 $\mathbb{R}$ 上使得 (5.37) 处处成立. 令

$$\varrho(u) = 0 \qquad (u<0). \tag{5.38}$$

这样定义的 $\varrho(u)$ 右连续, 且在 $u=0$ 处有唯一的第一类不连续点. 显然 k 阶微分 $\varrho^{(k)}(u)$ 在 $\mathbb{R}\setminus\{0,1,\ldots,k\}$ 上有定义, 且在例外点 $u=j$ $(0\leqslant j\leqslant k)$ 处有第一类不连续点. 将其右连续延拓到 $\mathbb{R}$ 上.

Dickman 研究的方法基于 Laplace 变换

$$\widehat{\varrho}(s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\varrho(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.39}$$

以及用 Laplace 逆变换来研究 $\varrho(u)$. 由定理 5.7 (iv), 积分 (5.39) 对每个复数 s 绝对收敛, 于是定义了 s 的整函数.

通过变量替换 $v = ts$ 知对 $s \in \mathbb{R}^{+*}$ 有

$$s\widehat{\varrho}(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-v}\varrho(v/s)\,\mathrm{d}v, \tag{5.40}$$

从而由 (5.37) 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{s\widehat{\varrho}(s)\} = \frac{1}{s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-v}\varrho\Big(\frac{v}{s}-1\Big)\,\mathrm{d}v = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ts}\varrho(t-1)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-s}\widehat{\varrho}(s).$$

解这个微分方程知对适当的常数 C 有

$$s\widehat{\varrho}(s) = C\,\mathrm{e}^{-J(s)}, \tag{5.41}$$

其中

$$J(s) := \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-s-t}}{s+t}\,\mathrm{d}t. \tag{5.42}$$

积分 $J(s)$ 显然可延拓成 $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$ 上的全纯函数. 下列引理有关键的用处, 它提供了该解析延拓的附加信息. 令

$$I(s) := \int_0^s \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (s \in \mathbb{C}). \tag{5.43}$$

引理 5.9 对 $s \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$, 有

$$I(-s) + J(s) + \gamma + \log s = 0, \tag{5.44}$$

其中 γ 表示 Euler 常数.

证明 用分部积分, 从等式 $\gamma = -\Gamma'(1)$ 立即推出

$$-\gamma = \int_0^{-1} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{-\infty} \mathrm{e}^t\,\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

不改变该表达式的值, 可将实积分路径 $[-1,-\infty[$ 换成由线段 $[-1,-s]$ 和半直线 $\{-s-t : t \geqslant 0\}$ 组成的折线, 得

$$-\gamma = \int_0^{-1} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{-s} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{-s} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-s-t}}{s+t}\,\mathrm{d}t.$$

合并前两个积分便得到 (5.44). □

通过该结果可补充 $\widehat{\varrho}(s)$ 的计算.

定理 5.10 对任意复数 s 有

$$\widehat{\varrho}(s) = \mathrm{e}^{\gamma+I(-s)}. \tag{5.45}$$

证明 根据 (5.41) 和 (5.44), 当 s 不是非正实数时, 有

$$s\widehat{\varrho}(s) = C\,\mathrm{e}^{-J(s)} = Cs\mathrm{e}^{\gamma+I(-s)},$$

从而

$$\widehat{\varrho}(s) = C\,\mathrm{e}^{\gamma+I(-s)}.$$

而一方面由 (5.40) 得

$$\lim_{s\to+\infty} s\widehat{\varrho}(s) = \varrho(0+) = 1,$$

另一方面, 由 (5.41) 推出

$$\lim_{s\to+\infty} s\widehat{\varrho}(s) = C.$$

从而 $C=1$, (5.45) 得证. □

在习题 289 中将提出等式 $\widehat{\varrho}(0) = \mathrm{e}^{\gamma}$ 的一个数论证明, 归结到定理 5.1 和定理 5.8, 其值由 Mertens 公式给出.

$\varrho(u)$ 的正则性及速降性说明了 Laplace 逆变换

$$\varrho(u) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\alpha-\mathrm{i}\infty}^{\alpha+\mathrm{i}\infty} \widehat{\varrho}(s)\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}s \tag{5.46}$$

对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$, $u\neq 0$ 收敛②. 与鞍点方法的原理一致③, 当选取 α 为被积函数导数的某个零点时, 可期望实数 α 的某个小邻域中的贡献占整个积分 (5.46) 的大部分. 将 $\widehat{\varrho}(s)\mathrm{e}^{us}$ 在 $s=\alpha$ 处 Taylor 展开便得到 $\varrho(u)$ 的一个渐近等价.

从公式 (5.45) 立即得出 α 的值. 需选取 $\alpha = -\xi(u)$, 其中 $\xi=\xi(u)$ 是方程

$$\mathrm{e}^{\xi} = 1 + u\xi \qquad (u>0,\ u\neq 1) \tag{5.47}$$

唯一的非零实根. 约定 $\xi(1)=0$. 以下两个技术性引理可将积分 (5.46) 的估计引入正轨.

引理 5.11 对 $u\geqslant 3$ 有

$$\xi(u) = \ln(u\ln u) + O\Big(\frac{\ln_2 u}{\ln u}\Big). \tag{5.48}$$

② 可见 Widder (1946) 定理 Ⅱ. 7.3 或 Ⅱ. 7.5.

③ 见 Bruijn (1970) 第五章.

证明 显然 $1 \ll \xi(u) \ll \ln u$. 对 (5.47) 迭代后这个简单的初步估计便推出要证的结论. 事实上, 有

$$\begin{aligned}\xi &= \ln u + \ln(\xi + 1/u) = \ln u + \ln\big(\ln u + \ln(\xi + 1/u) + 1/u\big)\\ &= \ln(u \ln u) + O\Big(\frac{\ln(\xi + 1/u)}{\ln u}\Big).\end{aligned}$$ □

引理 5.12 对 $u > 1$, $s = -\xi(u) + \mathrm{i}\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, 有

$$\widehat{\varrho}(s) \ll \begin{cases}\exp\{I(\xi) - \tau^2 u/2\pi^2\}, & 若\ |\tau| \leqslant \pi,\\ \exp\{I(\xi) - u/(\pi^2 + \xi^2)\}, & 若\ |\tau| > \pi,\end{cases} \tag{5.49}$$

及

$$\widehat{\varrho}(s) = \frac{1}{s}\Big\{1 + O\Big(\frac{1 + u\xi}{s}\Big)\Big\} \qquad (|\tau| > 1 + u\xi). \tag{5.50}$$

证明 首先注意到 (5.50) 由 (5.45) 和形如

$$s\widehat{\varrho}(s) = \mathrm{e}^{-J(s)} \tag{5.51}$$

的 (5.44) 立即可得. 事实上, 只须用显然的上界估计 $J(s) \ll \mathrm{e}^{-\sigma}|\tau|^{-1}$, 其中 $\sigma = -\xi(u)$.

为证明 (5.49), 引进数量

$$H(\tau) := I(\xi) - \Re e\, I(-s) = \int_0^1 \mathrm{e}^{h\xi}\, \frac{1 - \cos(h\tau)}{h}\, \mathrm{d}h.$$

当 $|\tau| \leqslant \pi$ 时, $1 - \cos(h\tau) \geqslant 2\tau^2 h^2/\pi^2$ 对 $0 \leqslant h \leqslant 1$ 成立, 从而

$$H(\tau) \geqslant \frac{2\tau^2}{\pi^2} \int_0^1 h\, \mathrm{e}^{\xi h}\, \mathrm{d}h.$$

要求的结论于是来自下界估计

$$\int_0^1 h\, \mathrm{e}^{h\xi}\, \mathrm{d}h \geqslant \tfrac{1}{2} \int_{1/2}^1 \mathrm{e}^{h\xi}\, \mathrm{d}h \geqslant \tfrac{1}{4} \int_0^1 \mathrm{e}^{h\xi}\, \mathrm{d}h = \tfrac{1}{4} u.$$

当 $|\tau| > \pi$ 时, 注意到可设 u 足够大, 否则结论显然. 根据 (5.48), 可假定处于

$$u > \pi^2 + \xi^2$$

的情形. 于是

$$\begin{aligned}H(\tau) &\geqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{h\xi}\{1 - \cos(h\tau)\}\, \mathrm{d}h = u - \Re e\Big(\frac{\mathrm{e}^{\xi + \mathrm{i}\tau} - 1}{\xi + \mathrm{i}\tau}\Big)\\ &= u - \Re e\Big(\frac{u\xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} - 1}{\xi + \mathrm{i}\tau}\Big) \geqslant u\Big(1 - \frac{\xi \cos\vartheta}{\sqrt{\pi^2 + \xi^2}}\Big) - \frac{2}{\sqrt{\tau^2 + \xi^2}},\end{aligned}$$

其中 $\vartheta := \tau - \arctan(\tau/\xi)$. 最后的表达式中 u 的系数至少等于 $\pi^2/(2\pi^2+2\xi^2)$. 从而

$$H(\tau) \geqslant \frac{u\pi^2}{2(\pi^2+\xi^2)} - \frac{2u}{\pi^2+\xi^2} > \frac{u}{\pi^2+\xi^2}. \qquad \square$$

现在可以证明下列结论, 它给出 $u \to \infty$ 时 $\varrho(u)$ 带余项的渐近公式.

定理 5.13 (de Bruijn, Alladi) 对 $u \geqslant 1$ 有

$$\varrho(u) = \sqrt{\frac{\xi'(u)}{2\pi}} \exp\{\gamma - u\xi + I(\xi)\}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big\}. \tag{5.52}$$

注 将 (5.47) 对 u 求导, 立得 $\xi'(u) = \xi/\big(1+u(\xi-1)\big)$. 特别地, 当 $u \to \infty$ 时有 $\xi'(u) \sim 1/u$. 另外, 需注意到 (5.52) 的主项可用等式

$$u\xi - I(\xi) = \int_1^u \xi(t)\,\mathrm{d}t \qquad (u > 0) \tag{5.53}$$

来变形.

证明 令 $\delta = \delta(u) := \pi\sqrt{2\ln(u+1)/u}$ 及

$$K(u) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \widehat{\varrho}(s)\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}\tau,$$

其中 $s = -\xi(u) + \mathrm{i}\tau$. 首先证明差值

$$\varrho(u) - K(u) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\tau|>\delta} \widehat{\varrho}(s)\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}s \tag{5.54}$$

可纳入 (5.52) 的余项之中.

为达到该目的, 将用到引理 5.12. 区域 $\delta < |\tau| \leqslant \pi$ 对积分 (5.54) 的贡献

$$\ll \mathrm{e}^{-u\xi+I(\xi)}\int_{\delta}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau^2 u/2\pi^2}\,\mathrm{d}\tau \ll \frac{\mathrm{e}^{-u\xi+I(\xi)}}{\sqrt{u}}\int_{\ln(u+1)}^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \ll \frac{\mathrm{e}^{-u\xi+I(\xi)}}{u^{3/2}}.$$

同样, 区域 $\pi < |\tau| \leqslant 1 + u\xi$ 上的贡献

$$\ll (1+u\xi)\exp\{-u\xi + I(\xi) - u/(\pi^2+\xi^2)\}.$$

这些估计均可纳入余项之中.

最后, 可用 (5.50) 来估计区域 $|\tau| > 1 + u\xi$ 上的贡献. 有

$$\int_{1+u\xi}^{\infty} \widehat{\varrho}(s)\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}\tau = \int_{1+u\xi}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u\xi+\mathrm{i}\tau u}}{\tau}\Big\{1 + O\Big(\frac{u\xi}{\tau}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}\tau \ll \mathrm{e}^{-u\xi},$$

其中用了第二中值公式来处理含 $1/\tau$ 的项. 由于 $I(\xi) \sim u$, 该估计的阶仍然在容许的范围之内.

只剩下 $K(u)$ 的估计. 为此要用到 $\widehat{\varrho}(s)$ 在 $\tau=0$ 的邻域内的 Taylor 展式. 注意到, 对 $\Re e\, s=-\xi$ 和 $k\geqslant 1$, 有

$$\left|I^{(k)}(s)\right|=\left|\int_0^1 h^{k-1}\mathrm{e}^{hs}\,\mathrm{d}h\right|\leqslant I^{(k)}(\xi)\leqslant I'(\xi)=u,$$

从而

$$I(\xi-\mathrm{i}\tau)=I(\xi)-\mathrm{i}\tau u-\tfrac{1}{2}\tau^2I''(\xi)-\tfrac{1}{6}\mathrm{i}\tau^3I'''(\xi)+O(u\tau^4).$$

故对 $\tau\ll u^{-1/4}$ 有

$$\exp\left\{I(\xi-\mathrm{i}\tau)+us\right\}=\exp\left\{I(\xi)-u\xi-\tfrac{1}{2}\tau^2I''(\xi)\right\}\left(1+h(u)\right),$$

其中

$$h(u)=\exp\left\{-\tfrac{1}{6}\mathrm{i}\tau^3I'''(\xi)+O(u\tau^4)\right\}-1=-\tfrac{1}{6}\mathrm{i}\tau^3I'''(\xi)+O(u\tau^4+u^2\tau^6).$$

代入定义 $K(u)$ 的积分并注意到由对称性知含 τ^3 项积分等于零, 得

$$K(u)=\frac{\mathrm{e}^{-u\xi+I(\xi)}}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\mathrm{e}^{-\tau^2I''(\xi)/2}\left\{1+O(u\tau^4+u^2\tau^6)\right\}\mathrm{d}\tau. \tag{5.55}$$

余项的贡献

$$\ll\frac{\mathrm{e}^{-u\xi+I(\xi)}}{u\sqrt{I''(\xi)}}.$$

将积分延拓到无穷并对 $|\tau|>\delta$ 上的贡献作上界估计来估计主项的贡献. 注意到

$$I''(\xi)=1/\xi'(u)=u-(u-1)/\xi, \tag{5.56}$$

得

$$\int_{-\delta}^{\delta}\mathrm{e}^{-\tau^2I''(\xi)/2}\,\mathrm{d}\tau=\sqrt{\frac{2\pi}{I''(\xi)}}\left\{1+O\Big(\frac{1}{u}\Big)\right\}.$$

将该估计代入 (5.55) 并考虑 (5.56) 便得到命题结论 (5.52). □

推论 5.14 设 k 为 $\geqslant 0$ 的整数, u_0 为 >1 的实数. 有

$$\varrho^{(k)}(u)=(-1)^k\xi(u)^k\varrho(u)\left\{1+O(1/u)\right\}\qquad(u\geqslant u_0). \tag{5.57}$$

证明 对函数方程 (5.37) 求 k 阶导, 得

$$u\varrho^{(k+1)}(u)=-\varrho^{(k)}(u-1)-k\varrho^{(k)}(u)\qquad(u>1). \tag{5.58}$$

对 k 作归纳即知

$$(-1)^k\varrho^{(k)}(u)>0\qquad(u>1). \tag{5.59}$$

于是 (5.57) 对有界的 u 成立.

关系 (5.56) 说明了

$$\xi'(u) \sim 1/u, \qquad \xi''(u) \sim -1/u^2 \qquad (u \to \infty). \tag{5.60}$$

从中推出, 对足够大的 u, 有

$$\xi'(u-1) = \xi'(u)\{1+O(1/u)\}, \qquad \int_{u-1}^{u} \xi(t)\,\mathrm{d}t = \xi(u) + O(1/u). \tag{5.61}$$

代入渐近公式 (5.52), 考虑到 (5.53), 得

$$\varrho(u-1) = \varrho(u)\mathrm{e}^{\xi(u)}\{1+O(1/u)\} = u\xi(u)\varrho(u)\{1+O(1/u)\}. \tag{5.62}$$

对 k 作归纳便可证明 (5.57). 假设该式对 k 成立, 由 (5.58) 和 $\xi(u-1) = \xi(u)\big(1+O(1/u)\big)$ 形式下的 (5.60) 以及 (5.62), 得

$$\begin{aligned} u\varrho^{(k+1)}(u) &= (-1)^k \xi(u)^k \{-u\xi(u)\varrho(u) + O\big(\xi(u)\varrho(u)\big)\}\{1+O(1/u)\} \\ &= (-1)^{k+1}\xi(u)^{k+1} u\varrho(u)\{1+O(1/u)\}. \end{aligned}$$

于是 (5.57) 得证. □

推论 5.15 对 $0 \leqslant v \leqslant u$ 一致地有

$$\varrho(u-v) \ll \varrho(u)\mathrm{e}^{v\xi(u)}. \tag{5.63}$$

证明 当 $u-1 < v \leqslant u$ 时有 $\varrho(u-v) = 1$. 由于 $I(\xi) \sim u$, 估计 (5.63) 由 (5.52) 可得. 当 $0 \leqslant v \leqslant u-1$ 时, 由 (5.52) 和 (5.53) 知,

$$\frac{\varrho(u-v)}{\varrho(u)} \ll \frac{u}{u-v} \exp\Big\{\int_0^v \xi(u-t)\,\mathrm{d}t\Big\}.$$

由 (5.60), $\xi(u-t) \leqslant \xi(u) - ct/u$ 对适当的绝对正常数 c 成立. 要求的结论于是由基础的不等式

$$\frac{cv^2}{2u} \geqslant \ln\left(\frac{u}{u-v}\right) + O(1) \qquad (0 \leqslant v \leqslant u-1) \tag{5.64}$$

而得. □

§5.5 用鞍点法逼近 $\Psi(x,y)$

由 Perron 公式, 对任意 $\alpha > 0$, 有

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\alpha-\mathrm{i}\infty}^{\alpha+\mathrm{i}\infty} \zeta(s,y) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} \qquad (x \notin \mathbb{N}^*). \tag{5.65}$$

将看到上节估计 Dickman 函数时用到的鞍点法也可用来估计积分(5.65).

参数 α 的最优选择是超越方程

$$\frac{-\zeta'}{\zeta}(\alpha, y) = \sum_{p \leqslant y} \frac{\ln p}{p^{\alpha} - 1} = \ln x \tag{5.66}$$

的唯一解 $\alpha(x, y)$. 如同定理 5.2 证明中所见到的, 数值 $\alpha(x, y)$ 等于 Rankin 方法中的最好参数值, 而且 (5.13) 给出了 $y \to \infty$ 时等价于 $\alpha(x, y)$ 的量. 然而, $\alpha(x, y)$ 的隐含性暗示了这样的处理得出的渐近公式一定程度上不易使用. 本节所寻求的主要目的是证明在适当的关于 x, y 的区域上, 可无妨地将 $\alpha(x, y)$ 换成一个显式逼近. 其结果是 (5.31) 和(5.35) 的同时推广, 分别由 de Bruijn 和 Hildebrand 得出.

下述引理自然暗示了 $\alpha(x, y)$ 的具体逼近. 令

$$Y_{\varepsilon} := \exp\left\{(\ln y)^{(3/2)-\varepsilon}\right\},$$

并在全节中使用记号

$$u := \frac{\ln x}{\ln y}, \qquad L_{\varepsilon}(y) := \exp\left\{(\ln y)^{(3/5)-\varepsilon}\right\}.$$

为今后的应用方便, 将给出比所需更一般的结论.

引理 5.16 对任意 $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, 存在实数 $y_0 = y_0(\varepsilon)$ 使得在条件

$$y \geqslant y_0(\varepsilon), \qquad \sigma \geqslant 1 - \frac{1}{(\ln y)^{2/5+\varepsilon} + \mathcal{L}_{\tau}^{2/3+\varepsilon}}, \qquad |\tau| \leqslant Y_{3\varepsilon} \tag{5.67}$$

下一致地有

$$\zeta(s, y) = \zeta(s)(s-1)\ln y\, \widehat{\varrho}\big((s-1)\ln y\big)\left\{1 + O\Big(\frac{1}{L_{\varepsilon}(y)} + y^{-1/\mathcal{L}_{\tau}^{2/3+\varepsilon}}\Big)\right\}, \tag{5.68}$$

其中 $\mathcal{L}_{\tau} := \ln(2 + |\tau|)$.

证明 首先观察到在上述假设下有

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s, y) = \sum_{n \leqslant y} \frac{\Lambda(n)}{n^s} + O\big(y^{\frac{1}{2}-\sigma}\big). \tag{5.69}$$

事实上, 余项的绝对值至多为

$$\sum_{\substack{n > y \\ P^+(n) \leqslant y}} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} = \sum_{p \leqslant y} \sum_{\nu > \frac{\ln y}{\ln p}} \frac{\ln p}{p^{\nu\sigma}} \ll \sum_{p \leqslant \sqrt{y}} \frac{\ln p}{y^{\sigma}} + \sum_{\sqrt{y} < p \leqslant y} \frac{\ln p}{p^{2\sigma}} \ll y^{\frac{1}{2}-\sigma}.$$

对于 $\sigma \leqslant 1$, 由实效 Perron 公式 (第二部分推论 2.4) 推出 (5.69) 的主项可写成

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+w)\frac{y^w}{w}\,dw + O\Big(\frac{y^{1-\sigma}\ln^2 y}{T}+\frac{\ln y}{y^\sigma}\Big) \tag{5.70}$$

的形式, 其中 $\kappa := 1-\sigma+1/\ln y$, $T := (|\tau|+1)L_\varepsilon(y)^3$. 为估计对 w 的积分, 将积分线段向左平移到

$$-\eta := 1-\sigma-1/(\ln T)^{2/3+\varepsilon}.$$

$-\zeta'/\zeta$ 幅角的实部总不小于 $\sigma-\eta$, 平移后的线段位于 $\zeta(s)$ 的 Korobov–Vinogradov 无零点区域之中. ④ 这样, 积分线段恰穿过被积函数的两个极点, 即 $w=0$ 和 $w=1-s$. 由留数定理, 积分 (5.70) 等于

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+\frac{y^{1-s}}{1-s}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{W}}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+w)\frac{y^w}{w}\,dw, \tag{5.71}$$

其中 $\mathcal{W}$ 表示连接 $\kappa\pm iT$ 并经过 $-\eta\pm iT$ 的顺时针方向的折线. 当 $w\in\mathcal{W}$ 时有⑤

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s+w) \ll \ln T \ll (\ln y)^2.$$

于是可得 $\mathcal{W}$ 的竖直线段对积分 (5.71) 的贡献

$$\begin{aligned}\ll y^{-\eta}\int_0^T\frac{(\ln y)^2}{\eta+t}\,dt &\ll y^{1-\sigma}(\ln y)^2\ln(T/\eta)\,y^{-1/(\ln T)^{2/3+\varepsilon}}\\ &\ll (\ln y)^4\big\{L_\varepsilon(y)^{-2}+y^{-1/\mathcal{L}_\tau^{2/3+2\varepsilon/3}}\big\}.\end{aligned}$$

而水平线段上的贡献则可用

$$\ll y^{1-\sigma}T^{-1}(\ln y)^2 \ll y^{1-\sigma}L_\varepsilon(y)^{-2}$$

来估计.

　　考虑到 (5.69), 最终得到, 当 $\sigma\leqslant 1$ 时,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s,y)=\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+\frac{y^{1-s}}{s-1}+O\Big(y^{1-\sigma}\Big\{\frac{1}{L_\varepsilon(y)^2}+y^{-1/\mathcal{L}_\tau^{2/3+2\varepsilon/3}}\Big\}\Big). \tag{5.72}$$

当 $\sigma>1$ 时, 鉴于 (5.69), 用分部积分可说明, 只要将余项乘以 σ, 该关系仍成立. 具体细节很容易, 故略去. 暂时假设 $\tau\neq 0$ 并对修改后的关系 (5.72) 在半直线 $\{s+t : t\geqslant 0\}$ 上积分, 得

$$\zeta(s,y)=\zeta(s)e^{-J((s-1)\ln y)}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}+y^{-1/\mathcal{L}_\tau^{2/3+\varepsilon}}\Big)\Big\},$$

④ 见第二部分第三章的注记.

⑤ 见关于第二部分 §3.10 的注记.

其中记号 $J(s)$ 的定义见 (5.42). 命题结论于是由公式 $s\widehat{\varrho}(s)=\mathrm{e}^{-J(s)}$ 而得; 取极限便得 $\tau=0$ 的情形. □

可以在直线 $\sigma=-\xi(u)$ 上很好地估计 $\widehat{\varrho}(s)$ 的 Laplace 逆变换积分以及 $\zeta(s,y)$ 逼近中出现了该函数这两个事实是我们在 Perron 积分 (5.65) 中选取坐标 α 使得 $(\alpha-1)\ln y=-\xi(u)$, 也就是

$$\alpha=\alpha_0:=1-\frac{\xi(u)}{\ln y} \tag{5.73}$$

的除了该坐标选择适用以外的诱因. 此外用从素数定理导出的估计容易验证 (见习题 288), 对函数 $\varphi_y(\sigma)$, ⑥ α_0 在 x,y 很大的区域内是 $\alpha(x,y)$ 良好的估计:

$$\alpha(x,y)=\alpha_0+O\Big(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}+\frac{1}{(\ln x)\ln y}\Big) \tag{5.74}$$

对 $x\geqslant x_0(\varepsilon)$, $(\ln x)^{1+\varepsilon}\leqslant y\leqslant x$ 一致成立.

为使引理 5.16 能用在积分坐标为 $\sigma=\alpha_0$ 的情形并给出相对余项 $1+O(1/L_\varepsilon(y))$, $\xi(u)\leqslant(\ln y)^{2/5-\varepsilon}$ 必须对某适当的 $\varepsilon>0$ 成立. 考虑到引理 5.11, 这也等于说 x 和 y 位于平面上由关系

$$x>x_0(\varepsilon),\qquad \exp\big\{(\ln_2 x)^{(5/3)+\varepsilon}\big\}\leqslant y\leqslant x \tag{H_ε}$$

所确定的区域中, 其中 $\varepsilon>0$ 是任意固定的实数. 此时引理 5.16 说明在此假设下, 数量

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\alpha_0-\mathrm{i}\infty}^{\alpha_0+\mathrm{i}\infty}\zeta(s)(s-1)\ln y\,\widehat{\varrho}\big((s-1)\ln y\big)x^s\frac{\mathrm{d}s}{s} \tag{5.75}$$

是 $\Psi(x,y)$ 好的逼近. 作变量替换 $(s-1)\ln y\mapsto s$, 表达式 (5.75) 变成

$$\frac{x}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\xi(u)-\mathrm{i}\infty}^{-\xi(u)+\mathrm{i}\infty}\widehat{\varrho}(s)\zeta\Big(1+\frac{s}{\ln y}\Big)\frac{s}{s+\ln y}\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}s. \tag{5.76}$$

然而容易验证对任意复数 s 有

$$\frac{s}{s+\ln y}\zeta\Big(1+\frac{s}{\ln y}\Big)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}\Big(\frac{\lfloor y^t\rfloor}{y^t}\Big). \tag{5.77}$$

卷积定理说明 (5.76) 中 x 项的系数是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varrho(u-v)\,\mathrm{d}\big(\lfloor y^v\rfloor/y^v\big)=\Lambda(x,y)/x$$

的 Laplace 逆变换积分.

⑥ 在 (5.11) 中定义.

这样 de Bruijn 函数 $\Lambda(x,y)$ 在解析研究的鞍点方法中是作为 $\Psi(x,y)$ 的自然逼近出现的. 实际上, 上述直观考虑蕴含了真正的证明思路.

现在可以叙述本节的主要定理了.

定理 5.17 (Saias, 1989) 令 $\varepsilon>0$. 当 (x,y) 位于区域 (H_ε) 之中时, 有

$$\Psi(x,y)=\Lambda(x,y)\Big\{1+O\Big(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\Big)\Big\}. \tag{5.78}$$

在证明定理之前, 先说明如何用它来重新证明 Hildebrand 的渐近公式 (5.35).

推论 5.18 令 $\varepsilon>0$. 在条件

$$x>x_0(\varepsilon),\qquad (\ln x)^{1+\varepsilon}\leqslant y\leqslant x \tag{5.79}$$

下有

$$\Lambda(x,y)=x\varrho(u)\Big\{1+O\Big(\frac{\ln(u+1)}{\ln y}\Big)\Big\}. \tag{5.80}$$

证明 由 Abel 求和法得

$$\Lambda(x,y)=x\varrho(u)-\langle x\rangle-x\int_0^u\varrho'(u-v)\frac{\langle y^v\rangle}{y^v}\,\mathrm{d}v. \tag{5.81}$$

由推论 5.14 和推论 5.15, 对任意 v, $0\leqslant v\leqslant u$, 有

$$\varrho'(u-v)\ll\xi(u)\varrho(u-v)\ll\ln(u+1)\varrho(u)\mathrm{e}^{\xi(u)v}.$$

而在区域 (5.79) 中有

$$\xi(u)\leqslant\ln_2 x+O(1)\leqslant\big(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon\big)\ln y.$$

这推出

$$\begin{aligned}\int_0^u\varrho'(u-v)y^{-v}\,\mathrm{d}v&\ll\ln(u+1)\varrho(u)\int_0^u\Big(\frac{\mathrm{e}^{\xi(u)}}{y}\Big)^v\mathrm{d}v\\&\ll\frac{\varrho(u)\ln(u+1)}{\ln y},\end{aligned} \tag{5.82}$$

于是欲证的结论成立. □

推论 5.19 (Hildebrand) 设 $\varepsilon>0$. 在条件

$$x\geqslant 3,\qquad \exp\big\{(\ln_2 x)^{(5/3)+\varepsilon}\big\}\leqslant y\leqslant x$$

下一致地有

$$\Psi(x,y)=x\varrho(u)\Big\{1+O\Big(\frac{\ln(u+1)}{\ln y}\Big)\Big\}. \tag{5.83}$$

证明 当 $x > x_0(\varepsilon)$ 时, 这由 (5.78) 和 (5.80) 立得. 由于 $u \geqslant 1$ 时 $\varrho(u) > 0$, 结论对于 $3 \leqslant x \leqslant x_0(\varepsilon)$ 来说是显然的. □

注意到估计 (5.78) 含有比公式 (5.83) 精确地多的信息. 特别地, 从中可导出 $\Psi(x,y)$ 关于 $\ln(u+1)/\ln y$ 的幂的渐近展式, 见注记.

定理 5.17 证明的第一步是截断 Perron 积分以便用引理 5.16 来逼近被积函数. 我们提出如下结论.

推论 5.20 设 $\varepsilon > 0$. 令 $T := L_{\varepsilon/2}(y)$. 对 (H_ε) 中的 x, y, 有

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\alpha_0 - \mathrm{i}T^2}^{\alpha_0 + \mathrm{i}T^2} \zeta(s,y) \frac{x^s}{s} \,\mathrm{d}s + O\Big(\frac{x\varrho(u)}{L_\varepsilon(y)}\Big). \tag{5.84}$$

证明 将应用第二部分定理 2.3. 用 R 表示 (5.84) 的余项, 有

$$R \ll x^{\alpha_0} \sum_{P^+(n) \leqslant y} \frac{n^{-\alpha_0}}{1 + T^2 |\ln(x/n)|} \ll \frac{x^{\alpha_0}\zeta(\alpha_0, y)}{T} + R_T,$$

其中 $R_T := \Psi(x + x/T, y) - \Psi(x - x/T, y)$. 当 u 不太大时应用显然的上界估计

$$R_T \ll x/T.$$

否则就像第 207 页习题 171 那样引入权函数

$$w(t) := \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\sin(tT/2)}{tT/2}\Big)^2 \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

其 Fourier 变换为

$$\widehat{w}(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\tau} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\Big(1 - \Big|\frac{\tau}{T}\Big|\Big)^+.$$

于是有

$$R_T \ll \sum_{P^+(n) \leqslant y} \Big(\frac{x}{n}\Big)^{\alpha_0} w\Big(\ln \frac{x}{n}\Big) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\alpha_0 - \mathrm{i}T}^{\alpha_0 + \mathrm{i}T} \zeta(s,y) x^s \widehat{w}(\tau) \,\mathrm{d}s.$$

最终得

$$R \ll \frac{x^{\alpha_0}\zeta(\alpha_0, y)}{\sqrt{T}} + \min\Big\{\frac{x}{T}, x^{\alpha_0} \max_{\sqrt{T} \leqslant |\tau| \leqslant T} \big|\zeta(\alpha_0 + \mathrm{i}\tau, y)\big|\Big\}. \tag{5.85}$$

由引理 5.16 和 定理 5.13 得

$$x^{\alpha_0}\zeta(\alpha_0, y) \sim x\,\mathrm{e}^{-u\xi(u)}\zeta\Big(1 - \frac{\xi(u)}{\ln y}\Big)\big(-\xi(u)\big)\widehat{\varrho}\big(-\xi(u)\big) \ll x \ln y \sqrt{u}\,\varrho(u). \tag{5.86}$$

(5.85) 右边的第一项可接受. 若 $u \leqslant 2\ln L_\varepsilon(y)$, 第二项也可以. 事实上, 有

$$\frac{1}{T} \ll \frac{u^{-2u}}{\sqrt{T}} \ll \frac{\varrho(u)}{L_\varepsilon(y)}.$$

当 $u > 2\ln L_\varepsilon(y)$ 时, 可应用引理 5.16 (用 $\frac{1}{2}\varepsilon$ 代替 ε) 及引理 5.12. 由于 $|\tau|\ln y \geqslant \sqrt{T} \geqslant 1 + u\xi(u)$, 对 $\sqrt{T} < |\tau| \leqslant T$, $s = \alpha_0 + \mathrm{i}\tau$ 有

$$\zeta(s,y) \ll \zeta(s)(s-1)\ln y\,\widehat{\varrho}\big((s-1)\ln y\big) \ll \zeta(s) \ll \ln T.$$

根据定理 5.13, 由上述知 (5.85) 右边第二项

$$\ll x^{\alpha_0}\ln T \ll x\mathrm{e}^{-u\xi(u)}\ln y \ll x\varrho(u)/L_\varepsilon(y),$$

其中用到 $u \to \infty$ 时 $I(\xi) \sim u$ 的事实. 推论 5.20 得证. □

现在可以完成定理 5.17 的证明了. 第一步是在 (5.84) 中将 $\zeta(s,y)$ 换成其正则逼近. 应用引理 5.16, 并用 $\frac{1}{2}\varepsilon$ 来代替 ε 知该操作带来的余项不超过

$$\ll \frac{x^{\alpha_0}\zeta(\alpha_0,y)}{T}\int_0^{T^2}\frac{\mathrm{d}\tau}{|\alpha_0+\mathrm{i}\tau|},$$

其中 $T = L_{\varepsilon/2}(y)$. 由 (5.86) 得该上界估计具有要求的阶.

作变量替换 $(s-1)\ln y \mapsto s$, 可将新的主项写成

$$\begin{aligned} P &:= \frac{x}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\xi(u)-\mathrm{i}T^2\ln y}^{-\xi(u)+\mathrm{i}T^2\ln y}\widehat{\varrho}(s)\zeta\Big(1+\frac{s}{\ln y}\Big)\frac{s}{s+\ln y}\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{x}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\xi(u)-\mathrm{i}T^2\ln y}^{-\xi(u)+\mathrm{i}T^2\ln y}\widehat{\lambda}_y(s)\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

的形式, 其中

$$\lambda_y(u) := \int_{-\infty}^{\infty}\varrho(u-v)\,\mathrm{d}\big(\lfloor y^v\rfloor/y^v\big) \qquad (y^u \notin \mathbb{N}^*), \tag{5.87}$$

并约定当 $y^u \in \mathbb{N}^*$ 时 $\lambda_y(u) = \lambda_y(u+)$, 这样总有 $\Lambda(x,y) = x\lambda_y(u)$.

将积分 (5.87) 按 $v \leqslant u/2$ 和 $v > u/2$ 分解, 即知对 $u \geqslant 0$, $y \geqslant 2$ 一致地有

$$\lambda_y(u) \ll \varrho(u/2) + y^{-u/2}. \tag{5.88}$$

这说明只要 $\xi(u) < \frac{1}{2}\ln y$, $y^u \notin \mathbb{N}^*$, Laplace 逆变换积分

$$\lambda_y(u) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\xi(u)-\mathrm{i}\infty}^{-\xi(u)+\mathrm{i}\infty}\widehat{\lambda}_y(s)\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}s \tag{5.89}$$

便收敛. 于是该积分在除去使得 $y^u \in \mathbb{N}^*$ 的 (u,y) 外的区域 (H_ε) 上收敛. 当 $x=y^u\in\mathbb{N}^*$ 时, 积分 (5.89) 按主值收敛到

$$\tfrac{1}{2}\{\lambda_y(u)+\lambda_y(u-)\}=\lambda_y(u)+\frac{1}{2x}.$$

于是今后可假设 x 为半整数, 得

$$P=\Lambda(x,y)+O\Big(x\int_{\substack{\sigma=-\xi(u)\\ |\tau|>T^2\ln y}}\widehat{\lambda}_y(s)\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}s\Big). \tag{5.90}$$

当 $s=-\xi(u)+\mathrm{i}\tau,\ |\tau|>T^2$ 时, 由引理 5.12, 得

$$s\widehat{\varrho}(s)=1+O\Big(\frac{1+u\xi}{s}\Big). \tag{5.91}$$

而且从 ζ-函数通常的估计知

$$\frac{1}{s+\ln y}\zeta\Big(1+\frac{s}{\ln y}\Big)\ll|s|^{-1/2}. \tag{5.92}$$

(5.90) 的余项于是

$$\begin{aligned}&\ll x\int_{\substack{\sigma=-\xi(u)\\ |\tau|>T^2\ln y}}\zeta\Big(1+\frac{s}{\ln y}\Big)\frac{\mathrm{e}^{us}}{s+\ln y}\,\mathrm{d}s+O\Big(x\frac{\mathrm{e}^{-u\xi(u)}(1+u\xi(u))}{T\sqrt{\ln y}}\Big)\\ &=\int_{\substack{\sigma=\alpha_0\\ |\tau|>T^2}}\zeta(s)\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s+O\Big(\frac{x\varrho(u)}{L_\varepsilon(y)}\Big).\end{aligned}$$

为对最后的积分作上界估计, 将 $\zeta(s)$ 用其级数部分和 (依第二部分定理 3.5 的形式) 来逼近, 即

$$\zeta(s)=\sum_{n\leqslant|\tau|}\frac{1}{n^s}-\frac{|\tau|^{1-s}}{1-s}+O\Big(\frac{1}{|\tau|^\sigma}\Big)=\sum_{n\leqslant|\tau|}\frac{1}{n^s}+O\Big(\frac{1}{|\tau|^\sigma}\Big).$$

得

$$\int_{\substack{\sigma=\alpha_0\\ |\tau|>T^2}}\zeta(s)x^s\frac{\mathrm{d}s}{s}=\sum_{n\geqslant1}\int_{|\tau|\geqslant\max(n,T^2)}\Big(\frac{x}{n}\Big)^s\frac{\mathrm{d}s}{s}+O\Big(\frac{x^{\alpha_0}}{T}\Big).$$

最后一项完全可以接受. 用第二部分公式 (2.7) 可将对 n 的和式通项估计为

$$\ll\Big(\frac{x}{n}\Big)^{\alpha_0}\frac{1}{1+(n+T^2)|\ln(x/n)|}.$$

比较 $|x-n|$ 和 $x^{3/4}$, 分别考虑两种情形, 可得对 n 的和式

$$\ll\sum_{n\geqslant1}\frac{x^{\alpha_0}}{n^{3/2}+T^2}+x^{3/4}\ll\frac{x\varrho(u)}{T}.$$

这说明 (5.90) 的余项具有要求的阶, 定理 5.17 得证.

当条件 (H_ε) 不满足时, 鞍点法仍适用, 只是需选取 (5.66) 中定义的理论积分坐标 $\sigma = \alpha(x,y)$. Hildebrand 和作者 (1986) 由该过程得到以下对 $x \geqslant y \geqslant 2$ 成立的结论. 回顾记号

$$\varphi_y(\sigma) = \sum_{p \leqslant y} \frac{\ln p}{p^\sigma - 1}, \qquad \varphi_y'(\sigma) = \frac{\mathrm{d}\varphi_y(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} = -\sum_{p\leqslant y} \frac{p^\sigma (\ln p)^2}{(p^\sigma - 1)^2}.$$

定理 5.21 (Hildebrand–Tenenbaum) 对 $x \geqslant y \geqslant 2$ 一致地有

$$\Psi(x,y) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha,y)}{\alpha\sqrt{2\pi|\varphi_y'(\alpha)|}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u} + \frac{\ln y}{y}\Big)\Big\}, \tag{5.93}$$

$$|\varphi_y'(\alpha)| = \Big(1 + \frac{\ln x}{y}\Big)\ln x \ln y\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\ln(u+1)} + \frac{1}{\ln y}\Big)\Big\}. \tag{5.94}$$

另外, 若 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $y \geqslant (\ln x)^{1+\varepsilon}$, 有

$$\Psi(x,y) = x\varrho(u)\exp\Big\{O\Big(\frac{\ln(u+1)}{\ln y} + \frac{u}{L_\varepsilon(y)}\Big)\Big\}. \tag{5.95}$$

这里不证该结论, 只作一些讨论.

首先, 注意到由对 α 的估计 (5.13) 以及公式 (5.94) 推出

$$\ln y \ll \alpha\sqrt{2\pi|\varphi_y'(\alpha)|} \sim \ln\Big(1 + \frac{y}{\ln x}\Big)\sqrt{2\pi u\Big(1 + \frac{\ln x}{y}\Big)} \ll \sqrt{\frac{y}{\ln y}}. \tag{5.96}$$

该估计可用来将 Rankin 上界估计与 $\Psi(x,y)$ 真正的范围作比较. 即使该上界估计总不能达到精确的阶, Rankin 方法仍相当有效: 比如对 $y = \ln x$ 的情形, 文献中所有的估计都导致一个 $\gg \exp\{y^{1+o(1)}\}$ 的不确定因子.

接下来, 注意到 (5.95) 实际上等价于推论 5.19: 只要稍微加强定理 5.8 便可得到该结论.

最后, 需要提醒读者注意像 (5.93) 那样依赖于隐含参数 $\alpha(x,y)$ 的公式的作用. 已经看到加入对 α 的逼近后可得到真正的渐近公式. 此外还有另一类应用, 基于 $\alpha(x,y)$ 值小的变动容易研究的事实. 这可用来研究 $\Psi(x,y)$ 的局部性质, 即便其整体性质未必完全清楚. 下述结论是该方法的典型之作, 可从 Hildebrand 和 Tenenbaum (1986) 定理 3 的一个明显的推广而得.

定理 5.22 对 $x \geqslant y \geqslant 2$, $c \geqslant 1$ 及 $t := (\ln c)/\ln y$ 一致地有

$$\Psi(cx,y) = \Psi(x,y)c^{\alpha(x,y)}\Big\{1 + O\Big((t^2+1)\Big(\frac{1}{u} + \frac{\ln y}{y}\Big)\Big)\Big\}. \tag{5.97}$$

这样便可得到

$$\Psi(2x,y) \sim \Psi(x,y) \Leftrightarrow y \leqslant (\ln x)^{1+o(1)}$$

及

$$\Psi(2x,y) \sim 2\Psi(x,y) \Leftrightarrow (\ln y)/\ln_2 x \to \infty.$$

定理 5.22 的另一个应用见习题 296.

估计 (5.93) 还提供关于变量 y 的局部信息. 比如, 容易从 (5.93) 和对 $\alpha(x,y)$ 的估计 (5.13) 中得到, 只要 y 是素数, $y \leqslant (\ln x)^{1-\varepsilon}$, 便有

$$\Psi(x,y)/\Psi(x,y-) \sim (\ln x)/y, \tag{5.98}$$

于是在此区域内不存在与 $\Psi(x,y)$ 等价的连续函数. Hildebrand (1986f) 证明了在区域 $y \leqslant (\ln x)^{2-\varepsilon}$ 中的连续逼近不能太精确.

下列定理给出了 $\Psi(x,y)$ 局部性质单边的一致估计. 它是 (5.93) 的简单推论.

定理 5.23 对 $x \geqslant y \geqslant 2$, $c \geqslant 1$ 一致地有

$$\Psi(cx,y) \leqslant c^{\alpha}\Psi(x,y)\Big\{1+O\Big(\frac{1}{u}+\frac{\ln y}{y}\Big)\Big\}. \tag{5.99}$$

证明 令 $\alpha_1 := \alpha(cx,y)$. 这样 $\alpha_1 \leqslant \alpha$. 由 (5.93), 有

$$\Psi(cx,y) = \frac{(cx)^{\alpha_1}\zeta(\alpha_1,y)}{\alpha_1\sqrt{2\pi|\varphi_y'(\alpha_1)|}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{u}+\frac{\ln y}{y}\Big)\Big\}.$$

由 α_1 的定义, 有 $(cx)^{\alpha_1}\zeta(\alpha_1,y) \leqslant (cx)^{\alpha}\zeta(\alpha,y)$. 通过繁琐的计算可证明 $\sigma \mapsto \sigma\sqrt{|\varphi_y'(\sigma)|}$ 是 σ 的单调下降函数. 再次应用 (5.93), 在右边将 α_1 换成 α, 得结论中的不等式. □

§5.6 Jacobsthal 函数和 Rankin 定理

本节将说明如何用前述 $\Psi(x,y)$ 的上界估计来证明 Rankin 的关于相邻两个素数间大差距的定理.

为此从定理 5.2 和定理 5.21 中得到[7]

$$\Psi(x,y) \ll xu^{-u}+\sqrt{x} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{5.100}$$

还将用到下列结论, 由大筛法或 Selberg 筛法可得.[8]

⑦ 具体细节很容易, 留给读者.
⑧ 亦可由 Brun 筛法给出一个证明, 但更繁琐.

引理 5.24 设 $M, N \in \mathbb{N}^*$ 并令 $\mathcal{A}$ 为包含于区间 $]M, M+N]$ 的整数集. 假设对每个素数 p, $\mathcal{A}$ 与 $w(p)$ 个模 p 剩余类不交且 $w(p) \ll 1$, 那么

$$|\mathcal{A}| \ll N \prod_{p \leqslant N} \Big(1 - \frac{w(p)}{p}\Big).$$

所谓 Jacobsthal 函数是指将自然数 n 映为相邻两个与 n 互素的整数之间最大的差距 $j(n)$ 的数论函数.

Maier 和 Pomerance (1990) 引进了最大的能被 n 的素因子筛到的连续整数串的最大长度 $j^*(n)$, 亦即

$$j^*(n) := \sup\big\{x \in \mathbb{N} : \exists\, t \in \mathbb{N}, \exists\, \{a_p\}_{p|n} : \forall m \in]t, x+t]\ \exists\, p \mid n : m \equiv a_p \,(\bmod p)\big\}.$$

容易看到

$$j^*(n) = j(n) - 1 \qquad (n \geqslant 1). \tag{5.101}$$

一方面, 倘若 $\{a_k\}_{k=1}^{\varphi(n)}$ 表示 $[1, n]$ 中与 n 互素的整数渐升列且 $j(n) = a_{m+1} - a_m$, 那么区间 $]a_m, a_{m+1} - 1]$ 被 n 的素因子筛到, 故 $j(n) - 1 \leqslant j^*(n)$. 另一方面, 若 $]t, t + j^*(n)]$ 是被 n 的素因子筛到的集合且 $\{a_p\}_{p|n}$ 是相应的余数类, 中国剩余定理保证了存在某 N 使得 $N \equiv -a_p \,(\bmod p)$ 对任意 $p \mid n$ 成立. 于是所有形如 $N + m$, $t + 1 \leqslant m \leqslant t + j^*(n)$ 的整数不能与 n 互素. 故 $j^*(n) \leqslant j(n) - 1$.

注 亦有

$$j^*(n) = \sup\big\{x \in \mathbb{N} : \exists\, \{a_p\}_{p|n} : \forall m \in]0, x]\ \exists\, p \mid n : m \equiv a_p \,(\bmod p)\big\}.$$

事实上, 这相当于在 $j^*(n)$ 的定义中将 a_p 换成 $a_p - t$.

记 $\mathbb{P} := \{p_n\}_{n \geqslant 1}$ 为素数的渐升列, 令 $d_n = p_{n+1} - p_n$ $(n \geqslant 1)$ 及

$$P(z) := \prod_{p \leqslant z} p.$$

文献中唯一对 d_n 的下界估计来自 $j(P(z))$ 的下界估计. 事实上, 若 $j(P(z)) > x$, 存在区间 $]t, t + x]$ 完全被 $\leqslant z$ 的素数筛到. 由前述便知存在 $N \leqslant P(z)$ 使得区间 $]N + t, N + t + x]$ 只含有使得 $P^-(m) \leqslant z$ 的整数 m. 特别地, 该区间不含任何素数. 由于总可选取 $t \leqslant P(z)$, 得

$$j(P(z)) > x \Rightarrow \exists\, p_k \leqslant 2P(z) : p_{k+1} - p_k \geqslant x.$$

对于使得 $P^-(n) > y$ 的 $n \leqslant x$, 保持第一部分 §4.2 中引入的记号 $\Phi(x, y)$. 下述引理定量地体现了以下思想. 长度为 x 的区间可分两步筛去, 首先除去含小素因子的整数, 然后考虑相对于大素数的剩余类.

引理 5.25 设 t, x, z, Z 为整数, 使得

$$\pi(Z) - \pi(z) \geqslant \Phi(x+t, z) - \Phi(t, z), \tag{5.102}$$

那么

$$j\big(P(Z)\big) > x. \tag{5.103}$$

证明 对每个 $]z, Z]$ 中的素数 p, 可指定 $\Phi(x+t,z) - \Phi(t,z)$ 中计数的某整数 m, 使得这个映射为满射. 用 k_p 表示 m 模 p 的余数. 令

$$a_p := \begin{cases} 0, & \text{若 } p \leqslant z, \\ -k_p, & \text{若 } z < p \leqslant Z. \end{cases}$$

由中国剩余定理, 存在整数 N, 使得 $N \equiv a_p \pmod p$ 对任意 $p \leqslant Z$ 成立. 区间 $]N+t, N+t+x]$ 不含任何使得 $P^-(n) > Z$ 的整数 n. 事实上, 若 $n = N+m$, $t < m \leqslant t+x$, 要么 $P^-(m) \leqslant z$ 且 $P^-(m) \mid N$, 故 $P^-(m) \mid n$; 要么 $P^-(m) > z$ 且存在素数 $p \in]z, Z]$ 使得 $N + m \equiv 0 \pmod p$, 故 $P^-(n) \leqslant Z$.

这样区间 $]N+t, N+t+x]$ 由 $P(Z)$ 的因子所筛到的整数构成, 故

$$j^*\big(P(Z)\big) \geqslant x,$$

从中得出 (5.103). □

定理 5.26 (Rankin) 有

$$j\big(P(Z)\big) \gg \frac{Z \ln Z \ln_3 Z}{(\ln_2 Z)^2} \qquad (Z \geqslant 100). \tag{5.104}$$

特别地, 存在常数 $c > 0$ 使得对无穷多个 $n \in \mathbb{N}$ 值, 有

$$d_n > c\frac{(\ln p_n)(\ln_2 p_n)\ln_4 p_n}{(\ln_3 p_n)^2}. \tag{5.105}$$

证明 设 $z \geqslant 2$, $M := P(z)$ 及 v, w, 使得 $2 \leqslant v \leqslant w \leqslant z$. 令

$$M_1 := P(v), \qquad M_2 := \prod_{v<p\leqslant w} p, \qquad M_3 := \prod_{w<p\leqslant z} p,$$

这样 $M = M_1M_2M_3$. 令 $t \leqslant M$ 使得

$$t \equiv 0 \pmod{M_1M_3}, \qquad t \equiv 1 \pmod{M_2}.$$

那么任意 $]t, t+x]$ 中使得 $(M, n) = 1$ 的整数 n, 亦即 $\Phi(t+x, z) - \Phi(t, z)$ 中计数的整数 n 可写成 $n = t + m$ 的形式, 其中

$$1 \leqslant m \leqslant x, \qquad (m, M_1M_3) = 1, \qquad (m+1, M_2) = 1. \tag{5.106}$$

记 $m = ab$, 其中 $a \mid M_2^\infty$ 及 $P^-(b) > z$. 若 $b \neq 1$, 那么 $b > z$, 故 $a \leqslant x/z$. 选取 $v := x/z$, 使得

$$b \neq 1 \Rightarrow a = 1.$$

还要求 $z > \sqrt{x}$, 这推出

$$b \neq 1 \Rightarrow b \in \mathbb{P}.$$

于是看到 m 满足 (5.106) 当且仅当下列两个条件之一成立:

(i) $m \mid M_2^\infty$, 从而 $P^+(m) \leqslant w$,

(ii) $m \in \mathbb{P}$, $m > z$, $(m+1, M_2) = 1$.

(5.106) 的解数 H 于是满足

$$\Phi(t+x,z) - \Phi(t,z) \leqslant H \ll \Psi(x,w) + \frac{x}{\ln x}\frac{\ln v}{\ln w},$$

其中最后一项对应于引理 5.24 中 (ii) 解数的上界估计.

选取 $x = z(\ln z)(\ln_3 z)/(\ln_2 z)^2$ 及 $w = z^{A \ln_3 z/\ln_2 z}$, 其中 A 是适当的常数. 这样 $u := \ln x/\ln w \sim \ln_2 z/(A \ln_3 z)$, 于是 $u \ln u \sim (1/A)\ln_2 z \sim (1/A)\ln_2 x$. 故当 A 足够小时,

$$\Psi(x,w) \ll xu^{-u} \ll x/(\ln x)^{1/A} \ll z/(\ln z)^2.$$

从中得出

$$\Phi(t+x,z) - \Phi(t,z) \ll \frac{z}{(\ln z)^2} + \frac{x}{\ln x}\frac{\ln v}{\ln w} \ll \frac{z}{\ln z}.$$

用引理 5.25 的记号, 可选取 $Z \ll z$.

由 Tchébychev 定理, $M = P(Z) \leqslant \mathrm{e}^{BZ}$, 于是只要 $p_n \leqslant \mathrm{e}^{Cz}$ 便有 $d_n \geqslant x$. 这便推出命题中的下界估计. □

注记

§5.1 在数论中, 将一个整数分解成两个或多个由其素因子大小所决定的部分往往很重要. 这部分说明了函数 $\Psi(x,y)$ 在解析数论中不断出现的原因. Daboussi (1984) 证明了从 y 固定时 y-脆数构成的模型出发取极限后可以证明素数定理. 该结果是基于脆数性质丰满的一般方法诸多应用之一, 见 Daboussi (1989).

关于 $\Psi(x,y)$ 渐近性质以及脆数在数论中的地位的历史性介绍可见 Norton (1971), Hildebrand 和 Tenenbaum (1993b), Pomerance (1995).

§5.2 Ennola (1969) 还对 $y \leqslant (\ln x)^{3/4}$ 的情形给出了更为复杂的渐近公式.

§5.3 Hildebrand 迭代法在以下结论中有简单的体现.

定理 5.27 (Hildebrand, 1986) 设 $\varepsilon>0$. 存在常数 $C_3>0$ 使得对 $x\geqslant y\geqslant 2$ 一致地有

$$\Psi(x,y)\geqslant x\varrho(u)\exp\{-C_3u/L_\varepsilon(u)\}. \tag{5.107}$$

证明 可设 $u\leqslant y^2$. 否则容易用定理 5.13 证明 (5.107) 的右边不超过 1. 当 $u\leqslant y^2$ 时, 改变常数 C_3 后可设 y 足够大. 固定 $y\geqslant y_0$ 并令

$$\delta(u):=\inf_{0\leqslant v\leqslant u}\Psi(y^v,y)/y^v\varrho(v).$$

由函数方程 (5.34) 推出

$$\Psi(x,y)\ln x\geqslant\sum_{d\leqslant y}\Lambda(d)\Psi(x/d,y)\geqslant x\delta(u)S_{\frac12}+x\delta\big(u-\tfrac12\big)\big(S_1-S_{\frac12}\big), \tag{5.108}$$

其中

$$S_\vartheta:=\sum_{d\leqslant y^\vartheta}\frac{\Lambda(d)}{d}\varrho\Big(u-\frac{\ln d}{\ln y}\Big)\qquad(0\leqslant\vartheta\leqslant1).$$

暂时承认估计

$$S_\vartheta=\ln y\int_0^\vartheta\varrho(u-v)\,\mathrm{d}v+O\Big(\varrho(u)\Big\{1+\frac{u\ln(u+1)}{L_\varepsilon(y)}\Big\}\Big). \tag{5.109}$$

由于$\int_0^1\varrho(u-v)\,\mathrm{d}v=u\varrho(u)$, 代入 (5.108) 并除以 $x\varrho(u)\ln x=xu\varrho(u)\ln y$ 后得

$$\frac{\Psi(x,y)}{x\varrho(u)}\geqslant\delta(u)r(u)+\delta(u-\tfrac12)\big\{1-r(u)+O\big(R_\varepsilon(u)\big)\big\},$$

其中

$$r(u):=\frac{1}{u\varrho(u)}\int_0^{\frac12}\varrho(u-v)\,\mathrm{d}v,\qquad R_\varepsilon(u):=\frac{1}{u\ln y}+\frac{\ln(u+1)}{L_\varepsilon(y)}.$$

ϱ 的单调下降性推出 $r(u)\leqslant\frac12$. 由于 δ 也是单调下降的, 有

$$\delta(u)r(u)+\delta(u-\tfrac12)\big(1-r(u)\big)\geqslant\tfrac12\Big\{\delta(u)+\delta(u-\tfrac12)\Big\},$$

于是对 $y\geqslant y_0$, $u\leqslant y^2$, 有

$$\delta(u)\geqslant\delta(u-\tfrac12)\Big\{1+O\big(R_\varepsilon(u)\big)\Big\}\geqslant\delta(u-\tfrac12)\exp\Big\{O\big(R_\varepsilon(u)\big)\Big\}.$$

迭代后得

$$\delta(u)\geqslant\exp\Big\{O\Big(\sum_{k\leqslant u}R_\varepsilon(\tfrac12k)\Big)\Big\}\geqslant\exp\Big\{O\Big(\frac{\ln(u+1)}{\ln y}+\frac{u\ln(u+1)}{L_\varepsilon(y)}\Big)\Big\}$$

$$\geqslant\exp\big\{O\big(u/L_{2\varepsilon}(u)\big)\big\}.$$

只余下 (5.109) 的证明. 由素数定理推出

$$\sum_{d\leqslant y^v}\frac{\Lambda(d)}{d}=v\ln y-\gamma+O\big(1/L_\varepsilon(y^v)\big).$$

故

$$S_\vartheta=\int_0^\vartheta \varrho(u-v)\,\mathrm{d}\{v\ln y\}+\Big[O\Big(\frac{\varrho(u-v)}{L_\varepsilon(y^v)}\Big)\Big]_0^\vartheta+O\Big(\int_0^\vartheta\frac{\varrho'(u-v)}{L_\varepsilon(y^v)}\,\mathrm{d}v\Big).$$

第一项便是 (5.109) 的主项. 令 $\kappa:=\frac{3}{5}-\varepsilon$. 用推论 5.15 可将第二项放大为

$$\ll \varrho(u)+\varrho(u)\exp\Big\{\vartheta\xi(u)-(\vartheta\ln y)^\kappa\Big\}\ll\varrho(u)\Big\{1+\frac{u\ln(u+1)}{L_\varepsilon(y)}\Big\}.$$

由推论 5.14 和推论 5.15 得第三项

$$\ll\varrho(u)\ln(u+1)\int_0^1\exp\big\{v\xi(u)-(v\ln y)^\kappa\big\}\,\mathrm{d}v.$$

若 $\xi(u)\leqslant\frac{1}{2}(\ln y)^\kappa$, 上述积分至多等于

$$\int_0^1\exp\big\{-\tfrac{1}{2}(v\ln y)^\kappa\big\}\,\mathrm{d}v\ll\frac{1}{\ln y}\ll\frac{1}{\ln(u+1)}.$$

若 $\xi(u)>\frac{1}{2}(\ln y)^\kappa$, 该积分不超过

$$\int_0^{1/2}\mathrm{e}^{v\xi(u)}\,\mathrm{d}v+\int_{1/2}^1\exp\big\{v\xi(u)-(\tfrac{1}{2}\ln y)^\kappa\big\}\,\mathrm{d}v$$
$$\ll\frac{\mathrm{e}^{\xi(u)/2}}{\ln(u+1)}+\frac{\mathrm{e}^{\xi(u)}}{L_{2\varepsilon}(y)\ln(u+1)}\ll\frac{u}{L_{2\varepsilon}(y)}.$$

这样便得到 (5.109), 证毕. □

§5.4 如同 Hildebrand 和 Tenenbaum (1993) 所指出的, 渐近分析技巧的一个标准应用[⑨]是证明对足够大的 u 有

$$\xi(u)=\ln u+\ln_2 u+\sum_{m\geqslant0}\sum_{k\geqslant1}c_{mk}\Big(\frac{1}{\ln u}\Big)^m\Big(\frac{1+u\ln_2 u}{u\ln u}\Big)^k, \tag{5.110}$$

其中

$$c_{mk}=\binom{m+k}{m}\mathrm{Res}\Big(\frac{z^m}{(\mathrm{e}^z-1)^{m+k}}\Big(\frac{z\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^z-1}-\frac{m}{m+k}\Big);0\Big)\qquad(m\geqslant0,\ k\geqslant0).$$

本书形式下的定理 5.13 是 Alladi (1982) 所证明的, 它改进了 de Bruijn (1951a) 的一个渐近公式. 他们两个人的方法与本书不同, 其中用到了如下结果.

⑨ 特别地, 见 de Bruijn (1970).

定理 5.28 (de Bruijn, Alladi) 设 $f(u)$ 为在 $u>0$ 上连续的函数, 满足

$$uf(u)=\int_{u-1}^{u} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (u>1), \tag{5.111}$$

那么对适当的常数 C 及任意 λ, $0<\lambda<\frac{1}{4}$, 有

$$f(u)=\{C+O(\mathrm{e}^{-u^{\lambda}})\}\varrho(u) \qquad (u\to\infty).$$

原始的证明用到了 Volterra 方程的理论. 一个替代的方法是直接通过鞍点法用 Laplace 逆变换来研究 $f(t)$. Hildebrand 和作者 (1993a) 如此证明了形如 $uf'(u)+af(u)+bf(u-1)=0$ $(u>1)$, $a,b\in\mathbb{C}$ 的微分差分方程的一般解可表示成收敛级数

$$f(u)=\alpha F(u)+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n F_n(u) \qquad (u>2)$$

的形式, 其中常数 α, α_n 从初始条件 (即 $f(u)$ 在 $[0,1]$ 上的值) 出发可显式计算, 且 F, F_n 是方程的基本解, 仅依赖于 a 和 b, 并可确定其渐近性质. 另外, 该表达式还是一个渐近展开. 在方程 (5.111) 的情形, 其第一阶逼近给出如下结论.

定理 5.29 (Hildebrand–Tenenbaum) 设 $0<a<2\pi^2$. 在定理 5.28 的假设下有

$$f(u)=\Big\{C+O\big(\mathrm{e}^{-au/(\ln u)^2}\big)\Big\}\varrho(u) \qquad (u\to\infty),$$

其中 $C:=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 f(v)(1-\mathrm{e}^{-vt})\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t/t\widehat{\varrho}(t)$.

用这里证明定理 5.13 的方法容易得到 $\varrho(u)$ 关于 $1/u$ 的幂的渐近展开. 更确切地, 存在实解析函数列 $\{h_j\}_{j\geqslant 1}$, 使得对 $u\geqslant 1$, $N\geqslant 0$, $\xi=\xi(u)$, 有

$$\varrho(u)=\frac{\exp\{\gamma-u\xi+I(\xi)\}}{\sqrt{2\pi I''(\xi)}}\Big\{1+\sum_{1\leqslant j\leqslant N}\frac{h_j(\xi)}{I''(\xi)^j}+O_N\Big(\frac{1}{u^{N+1}}\Big)\Big\}. \tag{5.112}$$

另外 $u-(u-1)/\xi\leqslant I''(\xi)\leqslant u$ $(u\geqslant 1)$, 且对每个固定的 $j\geqslant 1$, 存在常数 c_j, 使得

$$h_j(\xi)=c_j+O(1/\xi) \qquad (u\to\infty). \tag{5.113}$$

详细的证明及在 $\varrho(u)$ 卷积 (正实数) 的幂上的推广见 Smida (1991). 它推广了 Hensley (1986a) 的一个定理. Hildebrand (1990) 处理了 $\varrho(u)$ 的卷积复的幂的情形.

Dickman 函数局部性质是研究 $\Lambda(x,y)$ 的 de Bruijn 逼近的关键工具. 推论 5.15 可细化为公式

$$\varrho(u-v)=\varrho(u)\mathrm{e}^{v\xi(u)+O(v^2/(u+v^2))}\quad(0\leqslant v\leqslant u),\tag{5.114}$$

该公式由 (5.63) 及 Fouvry 和 Tenenbaum (1996) 的引理 6.1 可得.

在此类问题中, 对数导数 $r(u):=-\varrho'(u)/\varrho(u)$ 经常起关键作用. Hildebrand (1986) 证明了 r 在 $[1,\infty[$ 上单调上升, 且 Evertse, Moree, Stewart 和 Tijdeman (2003) 注意到有

$$r(u-1)\leqslant\xi(u)\leqslant r(u)\qquad(u>1).$$

La Bretèche 和 Tenenbaum (2005b) 证明了

$$r(v)-\xi(v)\ll 1/v,\quad r'(v)-\xi'(v)\ll 1/v^2,\quad r''(v)\ll 1/v^2\qquad(v\geqslant 1).$$

§5.5 关于 $\alpha(x,y)$ 的估计 (5.74) 在 Hildebrand 和 Tenenbaum (1986) 第七章中有证明, 也见引理 6.1.

如同 Saias (1989) 所证明的, 可得到 $\Lambda(x,y)$ 的渐近展式. 达到该目的最令人赏心悦目的方法是对 $\varrho(u)$ 用 Taylor–Lagrange 公式, 见 Fouvry 和 Tenenbaum (1991) 引理 4.2. 若令

$$r_{mj}:=\varrho^{(j)}(m)-\varrho^{(j)}(m-)\qquad(0\leqslant m\leqslant j),$$

则对 $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, $k\geqslant 0$, 有

$$\varrho(u-v)=\sum_{0\leqslant j\leqslant k}\frac{(-1)^j}{j!}\varrho^{(j)}(u)v^j+R_k(u,v)+J_k(u,v),\tag{5.115}$$

其中

$$R_k(u,v):=\sum_{0\leqslant j\leqslant k}\frac{(-1)^{j+1}}{j!}\sum_{\substack{u-v<m\leqslant j\\ m\leqslant u}}r_{mj}(v+m-u)^j,$$

$$J_k(u,v):=\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_0^v(v-w)^k\varrho^{(k+1)}(u-w)\,\mathrm{d}w.$$

将该式对测度 $\mathrm{d}(\lfloor y^v\rfloor/y^v)$ 积分得对任意固定的 $\varepsilon>0$, $k\geqslant 0$, 关系

$$\Lambda(x,y)=x\sum_{0\leqslant j\leqslant k}a_j\frac{\varrho^{(j)}(u)}{(\ln y)^j}+O\Big(x\frac{\varrho^{(k+1)}(u)}{(\ln y)^{k+1}}\Big)\tag{5.116}$$

在条件

$$x\geqslant 2,\qquad(\ln x)^{1+\varepsilon}\leqslant y\leqslant x,\qquad\min_{0\leqslant j\leqslant k,\,j\leqslant u}\Big(\frac{u-j}{k+1-j}\Big)\geqslant\frac{\ln_2 y}{\ln y}\tag{5.117}$$

下一致成立, 其中 a_j 是 $s\zeta(s+1)/(s+1)$ 在点 $s=0$ 的 Taylor 系数. (5.117) 的最后一个条件实际上是必要的, 见 Saias (1989).

虽然定理 5.17 是作者指导的某博士论文的结果, 这里讲述的证明比原始证明要简单得多.

Hildebrand (1984a) 证明了关于 $y \geqslant (\ln x)^{2+\varepsilon}$ 的公式

$$\Psi(x,y) = x\varrho(u)\left\{1+O\left(\ln(u+1)/\ln y\right)\right\} \tag{5.118}$$

与 Riemann 假设等价.

推论 5.20 的证明方法给出了小区间中脆数个数的估计, 见引理 6.13 及 Hildebrand 和 Tenenbaum (1986) 的定理 4.

在作者 (1988) 的概论中有关于鞍点法及其算术应用的综述.

$\Psi(x,y)$ 局部性态的认识与形如

$$\Psi_m(x,y) := \sum_{\substack{n\in S(x,y)\\(n,m)=1}} 1 \tag{5.119}$$

的推广在用到脆数的大部分数论问题中有关键作用. 这说明了为何十多年来 $\Psi_m(x,y)$ 局部变化的研究在大量的工作中出现：特别地, 见 Hensley (1986b), Friedlander 和 Granville (1993), Hildebrand (1985, 1986f), Granville (1993), Hildebrand 和 Tenenbaum (1986) 等; 对 $m=\prod_{p\leqslant z}p$ 的特殊情形见 Saias (1995). La Bretèche 和 Tenenbaum (2005a) 的工作提供了关于数量 (5.119) 局部性质的综合资料, 包含了目前的工具所能达到的最一般和最精确的公式. 在此引用其中之一.

回顾 (5.66) 中定义的鞍点 $\alpha(x,y)$. 记 $\overline{u} := \min\{u, y/\ln y\}$, $u_y := \overline{u} + (\ln y)/\ln(u+1)$; 并对 $y \leqslant (\ln x)^2$ 令 $\delta := \frac{1}{2}$, 否则令 $\delta := 0$.

定理 5.30 (La Bretèche 和 Tenenbaum) *存在正绝对常数 b_1, b_2 以及满足 $b_1 \leqslant b \leqslant b_2$ $(x \geqslant y \geqslant 2,\ d \geqslant 1,\ m \geqslant 1)$ 的函数 $b = b(x,y;d,m)$, 使得在条件 $1 \leqslant d \leqslant x/y$ 和*

$$x \geqslant y \geqslant 2, \quad P(m) \leqslant y, \quad \omega(m) \ll \sqrt{y}/(\ln y)^{\delta} \tag{5.120}$$

下一致地有

$$\Psi_m\left(\frac{x}{d},y\right) = \left\{1+O(h_m)\right\}\left(1-\frac{t^2}{u^2+\overline{u}^2}\right)^{b\overline{u}} \prod_{p\mid m}\left(1-p^{-\alpha}\right)\frac{\Psi(x,y)}{d^{\alpha}}, \tag{5.121}$$

其中 $\alpha := \alpha(x,y)$, $t := (\ln d)/\ln y$, *及*

$$h_m = h_m(x,y;d) := \frac{1}{u_y} + (1+E_m)\left(\frac{t}{u}+\frac{E_m}{\overline{u}}\right).$$

当 $\omega(m) \ll 1$ 时, 公式 (5.121) 在条件 $1 \leqslant d \leqslant x$ 和 (5.120) 下一致成立, 而且

$$h_m \asymp h_1 \asymp \frac{1}{u_y} + \frac{t}{u}. \tag{5.122}$$

根据同一文章中的另一结论, 在区域 (H_ε) 中且在 $P(m) \leqslant y$, $\omega(m) \ll y^{1/\ln(u+2)}$ 的条件下有

$$\Psi_m(x,y) = x\varrho(u)Z(\beta)\prod_{p|m}\left(1-p^{-\beta}\right)\left\{1+O\left(\frac{\vartheta_m^2}{u}+\vartheta_m\ln(u+1)\left(\frac{y}{x}\right)^{1/(W_m+6)}\right)\right\},$$

其中 $\beta := 1 + \varrho'(u)/\{\varrho(u)\ln y\}$, $Z(s) := (s-1)\zeta(s)/s$, $W_m := \ln p_{\omega(m)}$ (p_j 表示第 j 个素数) 及 $\vartheta_m := W_m/\ln y$. 这在同样的成立域中加强了 Hildebrand 的公式 (5.118).

数论函数在脆数上的均值在非常多的文献中出现. 特别地, 见 Tenenbaum 和吴杰 (2003, 2008a, 2008b), Hanrot, Tenenbaum 和吴杰 (2008) 以及这些工作中引用的参考文献.

定理 5.30 暗示了估计

$$\frac{\Psi_p(x/p^\nu,y)}{\Psi(x,y)} \approx \frac{1}{p^{\nu\alpha}}\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right), \quad \alpha = \alpha(x,y) \tag{5.123}$$

在四个变量很大的区域内成立, 而且对 x 和 y 之间相对大小不必加以限制; 该估计的优点在于当 x 和 y 固定时它是 p 的简单函数. 这引导着我们将定义在不超过 x 的 y-脆数集 $S(x,y)$ 上的加性函数 f 用随机变量

$$Z_{f,x,y} := \sum_{p\leqslant y}\xi_p$$

来模拟, 其中 ξ_p 是抽象概率空间 (Ω,P) 上的独立随机变量, 具有几何分布

$$P(\xi_p = f(p^\nu)) = \frac{1}{p^{\nu\alpha}}\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right) \qquad (\nu = 0,1,2,\ldots),$$

其中约定, 若干 (可能无穷多) 个 $f(p^\nu)$ 相等时, 对应的概率是右端项之和. 有

$$\mathbb{E}(Z_{f,x,y}) = \sum_{p^\nu\in S(x,y)}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right),$$

$$\mathbb{V}(Z_{f,x,y}) = \sum_{p^\nu\in S(x,y)}\frac{|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu\alpha}}\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right) - \sum_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)^2\left|\sum_{p^\nu\leqslant x}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\right|^2.$$

在此记号下, 半经验方差 (3.17) 等于

$$\mathbb{V}^*_{x,y}(f) := \frac{1}{\Psi(x,y)}\sum_{n\in S(x,y)}|f(n)-\mathbb{E}(Z_{f,x,y})|^2.$$

La Bretèche 和 Tenenbaum (2005b) 证明了 Turán–Kubilius不等式的脆数版本对 $x \geqslant y \gg \ln x$ 一致成立, 也就是说, 对任意常数 $c > 0$, 有

$$C^*(x,y) := \sup_{f\neq 0} \frac{\mathbb{V}^*_{x,y}(f)}{\mathbb{V}(Z_{f,x,y})} \ll 1 \qquad (x \geqslant y \geqslant c\ln x). \tag{5.124}$$

另外,

$$C^*(x,y) = 1 + o(1) \qquad \Big(\frac{1}{u} + \frac{\ln x}{y} \to 0\Big). \tag{5.125}$$

将半经验方差换成经验方差, 同样的估计仍成立.

可推广第 427 页习题 280 中描述的过程, 从 (5.124) 得到脆数的 Erdős–Wintner 定理: 见 La Bretèche 和 Tenenbaum (2005b). 与经典情形不同的是, 在此框架下当 x 和 y 趋于无穷时 $S(x,y)$ 上数论函数 f 极限分布的存在性涉及 $1 \leqslant \nu \leqslant 1/\alpha(x,y) + o(1)$ 上的 $f(p^\nu)$ 值.

所有这些结论在概率数论中的 Kubilius 模型框架下均有自然的解释: 见第六章注记.

§5.6 自然可推断引理 5.25 还可改进. 事实上, 基于概率论的理由, 我们预期对每个 $p \in]z, Z]$, 存在同余类 k_p 含有 $\gg \ln z/\ln_2 z$ 个 $]t, t+x]$中使得 $P^-(m) > z$ 的整数 m. 从而猜想条件 (5.102) 可换成

$$\frac{(Z-z)\ln_2 z}{(\ln z)^2} \gg \Phi(x+t,z) - \Phi(t,z). \tag{5.126}$$

这可将 Rankin 下界估计乘上因子 $(\ln z)/\ln_2 z$, 即猜想

$$j\big(P(z)\big) \asymp \frac{z(\ln z)^2 \ln_3 z}{(\ln_2 z)^3}. \tag{5.127}$$

可确定 (5.105) 中的常数 c. 已知所有的结论都形如 $c > b\mathrm{e}^\gamma - \varepsilon$, 其中 $\varepsilon > 0$ 任意且 $n > n_0(\varepsilon)$. Rankin (1938) 得到了 $b = 1/3$, Maier 和 Pomerance (1990) 证明了可选取 $b \approx 1.312\ 56$. 目前最好的结论是 $b = 2$, 它是 Pintz (1997)的结果.

Iwaniec (1978) 证明了 Jacobsthal 函数满足

$$j(n) \ll \omega(n)^2(\ln\{2\omega(n)\})^2 \qquad (n \geqslant 2).$$

习题

288. 对 $\varepsilon > 0$, $y \geqslant 2$, 令 $L_\varepsilon(y) := \exp\big\{(\ln y)^{(3/5)-\varepsilon}\big\}$.

(a) 用强形式下的素数定理证明对每个 $\varepsilon>0$ 来说, 对 $y\geqslant 2,\sigma>0$ 一致地有

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{\ln p}{p^\sigma-1}=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\Big)\Big\}\int_{3/2}^{y}\frac{\mathrm{d}t}{t^\sigma-1}+O(1).$$

[可将余项 $R(t):=\vartheta(t)-t$ 对关于 p 的和式的贡献分部积分, 再根据 σ 相对于 $\frac{1}{2}$ 和 $1-2\ln L_\varepsilon(y)/\ln y$ 的位置分三种情况考虑.]

(b) 令 $\delta>0$. 证明对 $\sigma\geqslant\delta$ 一致地有

$$\int_{3/2}^{y}\frac{\mathrm{d}t}{t^\sigma-1}=\frac{1+O\big(1/L_\varepsilon(y)\big)}{1-y^{-\sigma}}\int_1^y\frac{\mathrm{d}t}{t^\sigma}+O(1).$$

证明在余项中将 $L_\varepsilon(y)$ 换成 $\ln y$ 后结论对 $\sigma\geqslant 2(\ln_2 2y)/\ln y$ 仍成立. [可利用对 $t\geqslant\frac{3}{2}$ 成立的关系

$$1/(t^\sigma-1)=t^{-\sigma}+O\big(t^{-2\sigma}/(1-2^{-\sigma})\big).]$$

(c) 现在设 $0<\sigma\leqslant 2/3$. 证明关系

$$\int_1^y\frac{\mathrm{d}t}{t^\sigma}=\Big\{1+O\big(y^{-1/6}\big)\Big\}\int_{\sqrt{y}}^{y}\frac{\mathrm{d}t}{t^\sigma},$$

$$\int_{3/2}^{y}\frac{\mathrm{d}t}{t^\sigma-1}=\Big\{1+O\Big(\frac{\ln y}{y^{1/6}}\Big)\Big\}\int_{\sqrt{y}}^{y}\frac{\mathrm{d}t}{t^\sigma-1}.$$

并证明

$$\int_{\sqrt{y}}^{y}\Big(\frac{1}{1-t^{-\sigma}}-\frac{1}{1-y^{-\sigma}}\Big)\frac{\mathrm{d}t}{t^\sigma}\ll\frac{y}{(y^\sigma-1)\ln y}.$$

[可用不等式 $1-(y/t)^{-\sigma}\leqslant\sigma\ln(y/t)$.]

(d) 证明下式对 $y\geqslant 2,\sigma>0$ 一致成立:

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{\ln p}{p^\sigma-1}=\frac{1+O(E)}{1-y^{-\sigma}}\int_1^y\frac{\mathrm{d}t}{t^\sigma}+O(1),$$

其中当 $\sigma\geqslant\delta$ 时 $E\ll_\delta 1/L_\varepsilon(y)$; 且 $E\ll 1/\ln y$ 对任意 $\sigma>0$ 成立. 证明 $(1-\sigma)(1-y^{-\sigma})\ln y\ll y^{1-\sigma}-1$ 对 $0<\sigma\leqslant 1$ 成立, 并从中推出 §5.1 中的公式 (5.12).

289. 公式 $\widehat{\varrho}(0)=\mathrm{e}^\gamma$ 的数论证明.

(a) 由定理 5.1 推出对 $x\geqslant y\geqslant 2$ 有

$$\sum_{n>x,\,P^+(n)\leqslant y}\frac{1}{n}\ll\mathrm{e}^{-u/2}\ln y.$$

(b) 由定理 5.8 推出对 $x\geqslant y\geqslant 2$ 有

$$\sum_{n\in S(x,y)}\frac{1}{n}=\ln y\int_0^u\varrho(v)\,\mathrm{d}v+O(u).$$

(c) 用 Mertens 公式证明对 $u \geqslant 1, y \geqslant 2$, 有

$$\int_0^u \varrho(v)\,\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{\gamma} + O\Big(\frac{u}{\ln y} + \mathrm{e}^{-u/2}\Big).$$

选取适当的 $u = u(y)$, 推出 $\widehat{\varrho}(0) = \mathrm{e}^{\gamma}$.

290. $\ln P^+(n)$ 的均值. 令 $S(x) := \sum_{n\leqslant x} \ln P^+(n)$.

(a) 证明 $S(x) = x\ln x - \int_1^x \big(\Psi(x,y)/y\big)\,\mathrm{d}y + O(\ln x)$.

(b) 由定理 5.8 推出

$$S(x) = \alpha x \ln x + O(x \ln_2 x),$$

其中 $\alpha := 1 - \int_1^{\infty} \frac{\varrho(v)}{v^2}\,\mathrm{d}v \approx 0.624\,33$.

(c) 由 (a) 及定理 5.17 推出对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$S(x) = x\ln x - \int_1^x \Lambda(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{y} + O\Big(x \exp\Big\{-(\ln x)^{(3/8)-\varepsilon}\Big\}\Big).$$

(d) 证明对 $|s| < 1$ 有

$$\int_{1-}^{\infty} t^{-s}\,\mathrm{d}\Big(\frac{\lfloor t\rfloor}{t}\Big) = \frac{s\zeta(s+1)}{s+1},$$

其中积分在任意紧集上收敛. 推出

$$\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}\Big(\frac{\lfloor t\rfloor}{t}\Big) = 1 - \gamma + O\Big(\frac{\ln x}{x}\Big),$$

其中 γ 是 Euler 常数.

(e) 证明

$$\begin{aligned}\int_1^x \Lambda(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{y} &= x\int_{1-}^x \ln\Big(\frac{x}{t}\Big)\int_{1-(\ln t)/\ln x}^{\infty} \frac{\varrho(v)}{v^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\Big(\frac{\lfloor t\rfloor}{t}\Big)\\ &= (1-\alpha)x\ln x + \alpha(1-\gamma)x + O(\ln x),\end{aligned}$$

并推出渐近公式

$$S(x) = \alpha x\ln x - \alpha(1-\gamma)x + O\Big(x\exp\Big\{-(\ln x)^{(3/8)-\varepsilon}\Big\}\Big).$$

291. 设 δ, $0 < \delta < 1$ 是固定的实数. 令 $g_\delta(n) := \sum_{p\mid n} (\ln p)^{\delta}$.

(a) 证明 $\sum_{n\leqslant x} g_\delta(n) \sim (x/\delta)(\ln x)^{\delta} \quad (x \to \infty)$.

(b) 设 $N(x;\lambda) := \big|\big\{n \leqslant x : g_\delta(n) \leqslant (\lambda/\delta)(\ln x)^{\delta}\big\}\big| \quad (\lambda > 1)$. 证明 $N(x;\lambda) \geqslant \big\{(\lambda-1)/\lambda + o(1)\big\}x \quad (x \to \infty)$.

(c) 对 $n > 1$, 令 $\alpha_n := \big(\ln P^+(n)\big)/\ln n$. 证明 α_n 有分布函数, 并计算之.

(d) 证明对任意 $n>1$, 有 $g_\delta(n)\geqslant(\alpha_n)^{\delta-1}(\ln n)^{\delta-1}g_1(n)$. 用第 423 页习题 266 及上一问, 证明对每个 $\lambda>0$, 存在数量 $c(\lambda,\delta)>0$, 使得

$$N(x;\lambda)\leqslant\{1-c(\lambda,\delta)+o(1)\}x\quad(x\to\infty).$$

(e) 证明 g_δ 不具有单调上升的正规阶.

292. 设 $N_k(z)$ 是 §5.2 中定义的量.

(a) 计算 $F(\sigma):=\int_{0-}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}N_k(t)$.

(b) 证明 $N_k(z)\leqslant \mathrm{e}^kF(k/z)$.

(c) 推出上界估计

$$N_k(z)\leqslant\Big(\frac{\mathrm{e}z}{k}\Big)^k\exp\Big\{\frac{k}{2z}\sum_{i=1}^k a_i\Big\}\prod_{i=1}^k\frac{1}{a_i}.$$

对何种 z 值该估计比定理 5.3 中的要更精细?

293. 小素因子之积较大的整数.

(a) 用大筛法 (第一部分推论 4.13) 证明对 $x\geqslant y\geqslant 2$ 有

$$\Phi(x,y):=\big|\{n\leqslant x:P^-(n)>y\}\big|\ll\frac{x}{\ln y}.$$

(b) 令 $\Theta(x,y,z):=\big|\{n\leqslant x:\prod_{p^\nu\|n,\,p\leqslant y}p^\nu>z\}\big|$. 证明

$$\Theta(x,y,z)\leqslant\sum_{z<a\leqslant x/y,\,P^+(a)\leqslant y}\Phi(x/a,y)+\Psi(x,y).$$

推出对 $x\geqslant z\geqslant y\geqslant 2$, $v:=(\ln z)/\ln y$ 一致地有

$$\Theta(x,y,z)\ll x\mathrm{e}^{-v/2}.$$

(c) 用定理 5.2 和定理 5.21 证明对每个 $\varepsilon>0$ 且对 $x\geqslant y\geqslant 2$ 一致地有

$$\Psi(x,y)\ll xu^{-u}+x^\varepsilon.$$

推出对每个 $\varepsilon>0$, 对 $x\geqslant z\geqslant y\geqslant 2$ 一致地有[10]

$$\Theta(x,y,z)\ll_\varepsilon xv^{-v}+xz^{-1+\varepsilon},$$

其中 $v:=(\ln z)/\ln y$.

294. 令 $\overline{u}:=\min(u,y/\ln y)$, $u_y:=\overline{u}+(\ln y)/\ln(u+1)$. 利用定理 5.30 证明对 $x\geqslant y\geqslant 2$ 一致地有[11]

$$\sum_{n\in S(x,y)}\ln n=\Big\{\ln x-\frac{1}{\alpha}+O\Big(\frac{1}{\alpha u_y}\Big)\Big\}\Psi(x,y)$$
$$=\Big\{\ln x-\frac{\ln y+O(\ln_2 y)}{\ln(1+y/\ln x)}\Big\}\Psi(x,y).$$

[10] Tenenbaum (2006) 中有 $\Theta(x,y,z)$ 的渐近公式: 见定理 6.23.

[11] 见 La Bretèche 和 Tenenbaum (2005a) 推论 2.8.

295. 保持习题 294 中 u_y 的记号. 用定理 5.30 证明对 $x \geqslant y \geqslant 2$ 一致地有[12]

$$\Psi(x,y;\Omega-\omega):=\sum_{n\in S(x,y)}\{\Omega(n)-\omega(n)\}$$
$$=\left\{1+O\Big(\frac{1}{u_y}\Big)\right\}\Psi(x,y)\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^\alpha(p^\alpha-1)},$$

由此推出

$$\inf_{2\leqslant y\leqslant z(x)}\frac{\Psi(x,y)}{\Psi(x,y;\Omega-\omega)}\to\infty\quad(x\to\infty)$$

当且仅当 $z(x)\leqslant(\ln x)^{2+o(1)}$.

296. *无平方因子脆数.*　用推论 5.19, 定理 5.22 和估计 (5.13), 证明对 $x \geqslant y \geqslant 2$, $x\to\infty$ 一致地有

$$\sum_{n\in S(x,y)}\mu(n)^2=\{1/\zeta(\beta_1)+o(1)\}\Psi(x,y),$$

其中 $\beta_1:=\max(1,2\beta(x,y))$, $\beta(x,y)$ 在 (5.14)中定义. [13]

---

[12] 见 La Bretèche 和 Tenenbaum (2005a) 推论 2.11.

[13] 更精确的结论在 Ivić 和 Tenenbaum (1986), Naïmi (1988) 中. La Bretèche 和 Tenenbaum (2005a) 证明了一致成立的公式

$$\sum_{n\in S(x,y)}\mu(n)^2=\Psi(x,y)\{1/\zeta(2\alpha,y)+O(R)\}\qquad(x\geqslant y\geqslant 2),$$

其中 $R:=\min\{\Theta_y(\ln\Theta_y)^2/u_y,\ln(\overline{u}+1)/\sqrt{\overline{u}}\}\ll(\ln_2 y)/\ln y$, $\overline{u}$ 和 u_y 如习题 294 中定义且 $\Theta_y:=\prod_{p\leqslant y}(1+1/p^{2\alpha})$, 也见 La Bretèche 和 Tenenbaum (2002).

第六章　无小因子整数

§6.1　简介

本章将着手进行与上章对偶的研究, 也就是量

$$\Phi(x,y) := \big|\{n \leqslant x : P^-(n) > y\}\big| \qquad (x \geqslant y \geqslant 2)$$

的估计. 同 $\Psi(x,y)$ 一样, 该函数在解析和概率数论中一直有用. 特别地, 它在筛法问题中起根本作用.

保持第五章中引进的记号

$$u := \frac{\ln x}{\ln y} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2).$$

已知 (第一部分定理 4.3) 纯粹 Brun 方法提供估计

$$(6.1) \qquad \Phi(x,y) = \frac{x}{\zeta(1,y)}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\ln y)^2}\Big)\Big\} \qquad (2 \leqslant y \leqslant x^{1/10\ln_2 x}),$$

而组合筛法基本定理 (第一部分定理 4.4) 则给出对 $x \geqslant y \geqslant 2$ 一致成立的估计

$$(6.2) \qquad \Phi(x,y) = \frac{x}{\zeta(1,y)}\big\{1 + O\big(u^{-u/2}\big)\big\} + O\big(\Psi(x,y)\big).$$

$\Phi(x,y)$ 估计的余项中出现 $\Psi(x,y)$ 一事并不奇怪. 事实上, 使得 $P^-(n)>y$ 的整数 n 之集的示性函数 $\eta(n;y)$ 是乘性函数, 并根据 Möbius 反转公式可写成

$$(6.3) \qquad \eta(n;y) = \sum_{d|n,\ P^+(d)\leqslant y} \mu(d) \qquad (n \geqslant 1).$$

对 $n \leqslant x$ 求和, 得

$$\Phi(x,y) = \sum_{d \leqslant x,\, P^+(d) \leqslant y} \mu(d) \lfloor x/d \rfloor \qquad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{6.4}$$

(6.2) 的主项对应于从 (6.4) 出发除去整数部分并将求和延拓到无穷而得的量. 显然该操作与 $\Psi(x,y)$ 有关.

为在该方向上得到初步的结果, 用下述关于 $\alpha(x,y)$ 的估计技巧, 其中 $\alpha(x,y)$ 在 (5.66) 中定义为方程

$$\sum_{p \leqslant y} \frac{\ln p}{p^\alpha - 1} = \ln x \tag{6.5}$$

的唯一解. 为此引进附加记号

$$\overline{u} := \min\big(u, y/\ln y\big) = \min(\ln x, y)/\ln y. \tag{6.6}$$

引理 6.1　对 $x \geqslant y \geqslant 2$ 一致地有

$$\frac{y^{1-\alpha} - 1}{(1-\alpha)\ln y} \asymp \overline{u}. \tag{6.7}$$

证明　公式 (5.12) 可用来估计 (6.5) 的左边, 得

$$u(1 - y^{-\alpha}) = \frac{y^{1-\alpha} - 1}{(1-\alpha)\ln y}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\ln y}\Big)\Big\}. \tag{6.8}$$

现在, 当 y 足够大时, 由估计式 (5.13), 即

$$\alpha = \frac{\ln(1 + y/\ln x)}{\ln y}\Big\{1 + O\Big(\frac{\ln_2 y}{\ln y}\Big)\Big\} \tag{6.9}$$

推出

$$1 - y^{-\alpha} \asymp \min\big(1, y/\ln x\big).$$

实际上, 该估计对有界的 y 仍成立: 一方面, 由 (6.5), 有 $(\ln 2)/(2^\alpha - 1) \leqslant \ln x$, 从而 $1 - y^{-\alpha} \geqslant 1 - 2^{-\alpha} \gg 1/\ln x$; 另一方面, 由 (6.9), 有 $1 - y^{-\alpha} \leqslant \alpha \ln y \ll 1/\ln x$.

代入 (6.8) 后便推出要求的结论. □

正如第五章 那样, 用 $\xi(u)$ 表示方程

$$\mathrm{e}^\xi = 1 + u\xi \tag{6.10}$$

唯一的实根, 其中 $u > 0$, $u \neq 1$; 并令 $\xi(1) = 0$. 可将 (6.7) 重写成 $(1-\alpha)\ln y = \xi(b\overline{u})$ 的形式, 其中 $b \asymp 1$. 于是用关于 $\xi(u)$ 和 $\xi'(u)$ 的估计 (5.48) 和 (5.60) 即可从引理 6.1 推出估计

$$\alpha = 1 - \frac{\ln\big(\overline{u}\ln(\overline{u}+1)\big) + O(1)}{\ln y} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{6.11}$$

定理 6.2 对 $x \geqslant y \geqslant 2$ 一致地有

$$\Phi(x,y) = \frac{x}{\zeta(1,y)} + O\big(\Psi(x,y)\big). \tag{6.12}$$

注 该估计仅在

$$y \leqslant x^{c \ln_3 x / \ln_2 x}$$

上非显然, 其中 $c = c(x) \to 1$. 在该区域外, 公式 (6.12) 比筛法上界 (如见第一部分推论 4.13)

$$\Phi(x,y) \ll \frac{x}{\ln y} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2)$$

弱.

证明 同前, 可设 u 足够大, 这样由 (6.9) 和 (6.11) 推出

$$(1-\alpha)\ln y \geqslant c_0 > 0. \tag{6.13}$$

由 (6.4), (6.12) 的余项等于

$$-\sum_{\substack{d \leqslant x \\ P^+(d) \leqslant y}} \mu(d) \left\langle \frac{x}{d} \right\rangle - x \sum_{\substack{d > x \\ P^+(d) \leqslant y}} \frac{\mu(d)}{d} \ll \Psi(x,y) + x\int_x^\infty |M(t,y)| \frac{\mathrm{d}t}{t^2},$$

其中

$$M(x,y) := \sum_{d \leqslant x,\, P^+(d) \leqslant y} \mu(d).$$

将 $|M(t,y)|$ 显然地放大为 $\Psi(t,y)$, 利用定理 5.23 得比要求的估计略弱的结论. 事实上, 有

$$x\int_x^\infty \Psi(t,y)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \ll x^{1-\alpha}\Psi(x,y)\int_x^\infty t^{\alpha-2}\,\mathrm{d}t \ll \frac{\Psi(x,y)}{1-\alpha}.$$

而作者 (1990) 的一个结果说明

$$M(x,y) \ll \Psi(x,y)\Big(\frac{\exp\{-c_1 u/\ln^2(u+1)\}}{\ln y} + \exp\big\{-(\ln y)^{(3/2)-\varepsilon}\big\}\Big) \tag{6.14}$$

对 $x \geqslant y \geqslant 2$ 一致成立, 该结果的证明仍用到鞍点法. 于是显然可将前述对 t 积分的估计除以 $\ln y$, 从而由 (6.13) 可得结论. □

§6.2 函数方程

如同 $\Psi(x,y)$ 及大多数在筛法问题中涉及的函数那样, $\Phi(x,y)$ 满足一个函数方程.

定理 6.3 对 $x \geqslant 1, y \geqslant 1$, 有

$$\Phi(x,y) = 1 + \sum_{y<p\leqslant x} \sum_{\nu\geqslant 1} \Phi(x/p^\nu, p). \tag{6.15}$$

注 正如第五章那样, 实际上使用该方程的 Buchstab 形式:

$$\Phi(x,y) = \Phi(x,z) + \sum_{y<p\leqslant z} \sum_{\nu\geqslant 1} \Phi(x/p^\nu, p) \qquad (x \geqslant z \geqslant y \geqslant 1). \tag{6.16}$$

证明 若 $n > 1$ 在 $\Phi(x,y)$ 中计数, 那么 n 可唯一地写成 $n = p^\nu m$ 的形式, 其中 $p = P^-(n)$, $p \nmid m$. 这两个条件等价于 $P^-(m) > p$. 从而

$$\Phi(x,y) = 1 + \sum_{y<p\leqslant x} \sum_{n\leqslant x,\, P^-(n)=p} 1 = 1 + \sum_{y<p\leqslant x} \sum_{\nu\geqslant 1} \sum_{m\leqslant x/p^\nu,\, P^-(m)>p} 1,$$

亦即 (6.15). □

在 $\nu \geqslant 2$ 的情形下将 $\Phi(x/p^\nu, p)$ 显然地放大成 x/p^ν, 从 (6.16) 得逼近方程

$$\Phi(x,y) = \Phi(x,z) + \sum_{y<p\leqslant z} \Phi(x/p, p) + O(x/y) \qquad (x \geqslant z \geqslant y \geqslant 1). \tag{6.17}$$

若前面 $\Phi(x,y)$ 的定义中用广义不等式 $P^-(n) \geqslant y$ 来代替严格的不等式, 那么函数方程 (6.17) 便没有余项. 可这里仍然保留前述定义. 当考虑整数因子分解中的项由其素因子大小确定的情形时, 该定义要更方便.

如 §5.3 那样, 可用函数方程来估计筛函数. 从显然情形 $u \leqslant 1$ 出发对 $\lfloor u \rfloor$ 归纳. 前两步的考量给出了逼近的一般形式.

当 $\sqrt{x} < y \leqslant x$ 时, (6.15) 内部的和式恒等于 1 (因为 $P^-(1) = \infty$!) 且有 $\Phi(x,y) = \pi(x) - \pi(y) + 1$. 代入 (6.17) 并取 $z = \sqrt{x}$ 知对 $x^{1/3} < y \leqslant x^{1/2}$ 有

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \Phi(x,\sqrt{x}) + \sum_{y<p\leqslant\sqrt{x}} \Phi(x/p,p) + O(x^{2/3}) \\ &= \frac{x}{\ln x} + \sum_{y<p\leqslant\sqrt{x}} \frac{x}{p\ln(x/p)} + O\Big(\frac{x}{\ln^2 x}\Big).\end{aligned}$$

对 $2 \leqslant v \leqslant u$, 令

$$G(v) := \sum_{x^{1/v}<p\leqslant\sqrt{x}} \frac{1}{p} = \ln(v/2) + O\Big(\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln y}}\Big), \tag{6.18}$$

其中用素数定理通过标准的过程可得. 用 Abel 求和法根据 (6.18) 知 $\Phi(x,y)$ 最后一个估计中对 p 的和式等于

$$\frac{x}{\ln x}\int_{2-}^{x} \frac{v}{v-1}\,\mathrm{d}G(v) = \frac{x}{\ln y}\Big\{\frac{1+\ln(u-1)}{u}\Big\} + O\Big(\frac{x}{(\ln x)^2}\Big).$$

定义 $1 \leqslant u \leqslant 3$ 上的函数 $\omega(u)$, 使得 $u\,\omega(u) := 1$ $(1 \leqslant u \leqslant 2)$ 且 $u\,\omega(u) := 1 + \ln(u-1)$ $(2 < u \leqslant 3)$. 已证明了

$$\Phi(x,y) = \frac{x\omega(u) - y}{\ln y} + O\Big(\frac{x}{\ln^2 y}\Big) \qquad (x^{1/3} \leqslant y \leqslant x). \tag{6.19}$$

当 $y \leqslant x/\ln x$ 时, 主项的第二项 $-y/\ln y$ 可纳入余项之中. 若 $x^{1/4} < y \leqslant x^{1/3}$, 可用 (6.19) 来估计 (6.17) 中的 $\Phi(x/p, p)$. 假如 (6.19) 仍成立, 则可迭代此过程; 函数 $\omega(u)$ 于是逐渐在长度为 1 的个区间上由关系 (6.17) 和 (6.19) 而定义:

$$\frac{x\omega(u)}{\ln y} \sim \frac{x}{\ln x} + \sum_{y<p\leqslant\sqrt{x}} \frac{x}{p\ln p}\,\omega\Big(\frac{\ln x}{\ln p} - 1\Big) \sim \frac{x}{\ln x}\Big\{1 + \int_2^u \omega(v-1)\,\mathrm{d}v\Big\},$$

也就是说

$$u\omega(u) = 1 + \int_1^{u-1} \omega(v)\,\mathrm{d}v \qquad (u > 2). \tag{6.20}$$

该函数 (确切地在该形式下) 是由 Buchstab 于 1937 年发现的, 如今以他的名字命名. 它是 $u \geqslant 1$ 上的微分差分方程

$$\big\{u\omega(u)\big\}' = \omega(u-1) \qquad (u > 2) \tag{6.21}$$

在初值条件

$$u\omega(u) = 1 \qquad (1 \leqslant u \leqslant 2) \tag{6.22}$$

下唯一的连续解. 将 $\omega(u)$ 以 0 值延拓到 $u < 1$ 上, 这样 (6.21) 对 $u \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ 成立. 为后文应用方便, 先观察到由 (6.20) 和 (6.22) 对 $k := \lfloor u \rfloor$ 归纳容易推出区间估计

$$\tfrac{1}{2} \leqslant \omega(u) \leqslant 1 \qquad (u \geqslant 1). \tag{6.23}$$

上文中介绍的 $\Phi(x,y)$ 估计的迭代方法自然导出如下结论, 与关于 $\Psi(x,y)$ 的定理 5.8 相对应. 然而两个方法的相似性止于其逼近质量上一个显著的差别: 定理 5.8 只在一个局限的区域上成立, 而这里将得到一个真正的带余项的渐近公式, 对 $y \to \infty$, $y \leqslant x/2$ 一致成立.

定理 6.4 对 $x \geqslant y \geqslant 2$ 一致地有

$$\Phi(x,y) = \frac{x\omega(u) - y}{\ln y} + O\Big(\frac{x}{(\ln y)^2}\Big). \tag{6.24}$$

证明　当 y 有界时命题显然成立, 于是假设 $y \geqslant y_0$, 其中 y_0 是任意大的绝对常数. 另外假设 $u > 3$, 这是因为 $1 \leqslant u \leqslant 3$ 的情形已证.

设 $\Delta(x,y)$ 是由关系

$$\Phi(x,y) = \frac{x}{\ln y}\left\{\omega(u) + \frac{\Delta(x,y)}{\ln y}\right\} \tag{6.25}$$

隐含定义的函数. 将对整数 $k \geqslant 3$ 归纳, 证明数量

$$\Delta_k := \sup\left\{|\Delta(x,y)| : y \geqslant y_0,\ 2 < u \leqslant k\right\}$$

有限, 且有不依赖于 k 的界.

有 $\Delta_3 < \infty$. 设 $k \geqslant 3$ 使得 $\Delta_k < \infty$. 若 x, y 满足 $y \geqslant y_0$, $k < u \leqslant k+1$, 将 (6.25) 代入 (6.17) 之中并取 $z = x^{1/3}$, 得

$$\Phi(x,y) = \Phi\left(x, x^{1/3}\right) + \sum_{y<p\leqslant x^{1/3}} \frac{x}{p\ln p}\left\{\omega\left(\frac{\ln x}{\ln p} - 1\right) + \frac{\vartheta_p \Delta_k}{\ln p}\right\} + O\left(\frac{x}{y}\right), \tag{6.26}$$

其中 $\vartheta_p = \vartheta_p(x) \in [-1,1]$. 用 $y = x^{1/3}$ 时的 (6.19) 来估计 $\Phi(x,\sqrt{x})$. 另外, 当 y_0 足够大时, 用 Abel 求和法可得

$$\sum_{p>y} \frac{1}{p(\ln p)^2} = \frac{\frac{1}{2} + O\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln y}}\right)}{(\ln y)^2} \leqslant \frac{3}{4(\ln y)^2}. \tag{6.27}$$

最后, 有

$$\sum_{y<p\leqslant x^{1/3}} \frac{1}{p\ln p}\,\omega\left(\frac{\ln x}{\ln p} - 1\right) = \frac{1}{\ln x}\int_{3-}^{u} v\,\omega(v-1)\,\mathrm{d}G(v),$$

其中 $G(v)$ 如 (6.18) 定义. 而由 (6.21) 和 (6.23) 得函数 $v \mapsto v\,\omega(v-1)$ 在 $v \neq 2$ 时连续, 在 $v = 2$ 处有第一类不连续点, 且对 $v \neq 2, 3$ 可导, 导数一致有界.

考虑到 (6.18), 有

$$\begin{aligned}
\int_{3-}^{u} v\,\omega(v-1)\,\mathrm{d}G(v) &= \int_{3}^{u} \omega(v-1)\,\mathrm{d}v + \int_{3-}^{u} v\omega(v-1)\,\mathrm{d}\left\{O\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln y}}\right)\right\} \\
&= u\,\omega(u) - 3\omega(3) + \int_{3-}^{u} O\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln y}}\right)\mathrm{d}\{v\,\omega(v-1)\} \\
&= u\,\omega(u) - 3\omega(3) + O\left(u\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln y}}\right).
\end{aligned}$$

代入 (6.26) 并根据 (6.27) 得

$$\Phi(x,y) = \frac{x}{\ln y}\left\{\omega(u) + O\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln y}}\right)\right\} + \frac{x\{\vartheta\Delta_k + O(1)\}}{(\ln y)^2},$$

其中 $|\vartheta| \leqslant \frac{3}{4}$. 于是知存在绝对常数 C 使得

$$\Delta_{k+1} \leqslant \max\left(\Delta_k, \tfrac{3}{4}\Delta_k + C\right).$$

由于 $\Delta_k \leqslant \Delta_{k+1}$, 最终得$\Delta_{k+1} \leqslant \max(\Delta_k, 4C)$. 证毕. □

推论 6.5 有

$$\omega(u) = \mathrm{e}^{-\gamma} + O\big(u^{-u/2}\big) \qquad (u \geqslant 1). \tag{6.28}$$

证明 给定实数 $u \geqslant 1$, 令 $y := \exp\{u^{u/2}\}$, $x := y^u$. 由定理 5.13 及推论 5.19, 有

$$\Psi(x, y) \ll xu^{-u}.$$

将 (6.12) 和 (6.24) 比较并用 Mertens 公式估计 $\zeta(1, y)$, 立得 (6.28).

对微分差分方程 (6.21) 直接推理不难改进 (6.28) (由此我们知道 $\omega(u)$ 在无穷远点的极限). 下列命题具体说明了得到的结论. 按右连续性在 $u = 1$ 和 $u = 2$ 处定义 $\omega'(u)$.

定理 6.6 有

$$|\omega'(u)| \leqslant \varrho(u) \qquad (u \in \mathbb{R}), \tag{6.29}$$

$$\omega(u) = \mathrm{e}^{-\gamma} + O\Big(\frac{\varrho(u)}{\ln(u+1)}\Big) \qquad (u \geqslant 1). \tag{6.30}$$

证明 对于 $1 < u < 2$, 有 $\omega'(u) = -1/u^2$ 及 $\varrho(u) = 1 - \ln u$. 简单的变分计算说明了 $|\omega'(u)| < \varrho(u)$. 该不等式对 $u = 2$ 仍成立, 这是因为 $\omega'(2) = \omega'(2+) = 1/4$. 若令

$$\tau := \inf\{u > 1 : |\omega'(u)| \geqslant \varrho(u)\},$$

那么 $\tau > 2$. 而由于 $\omega(u)$ 对 $u > 1$ 连续, 从 (6.21) 中得到对 $u > 2$ 有

$$u\omega'(u) = \omega(u-1) - \omega(u) = -\int_{u-1}^{u} \omega'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6.31}$$

若 τ 有限, 取 $u = \tau$ 后得

$$\tau|\omega'(\tau)| \leqslant \int_{\tau-1}^{\tau} |\omega'(t)|\,\mathrm{d}t < \int_{\tau-1}^{\tau} \varrho(t)\,\mathrm{d}t = \tau\varrho(\tau).$$

故 $|\omega'(\tau)| < \varrho(\tau)$, 矛盾. 所以 τ 无限, (6.29)成立.

由函数 $\varrho(u)$ 在无穷远处的速降性知对 $u > 1$ 有

$$\omega(u) - \mathrm{e}^{-\gamma} = -\int_u^{\infty} \omega'(t)\,\mathrm{d}t \ll \int_u^{\infty} \varrho(t)\,\mathrm{d}t.$$

应用

$$\int_u^\infty \varrho(t)\,\mathrm{d}t \ll \int_u^\infty \frac{-\varrho'(t)}{\ln(t+1)}\,\mathrm{d}t \ll \frac{\varrho(u)}{\ln(u+1)} \tag{6.32}$$

形式下的推论 5.14 便得 (6.30). □

§6.3 Buchstab 函数

本节的目的是用鞍点法研究 $\omega(u)$ 的渐近性质. 除 Laplace 变换

$$\widehat{\omega}(s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}\omega(u)\,\mathrm{d}u \tag{6.33}$$

的具体计算外, 还将得到定理 6.6 一个显著的加强.

通过和号下求导得当 $\sigma > 0$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\widehat{\omega}(s) = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}u\omega(u)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{\mathrm{e}^{-su}u\omega(u)}{s}\right]_0^\infty - \frac{1}{s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}\{u\omega(u)\}.$$

分部积分中全项的积分为零. 若 δ_1 表示 $u=1$ 处的 Dirac 测度, 由 (6.21) 和 (6.22) 得测度的等式

$$\mathrm{d}\{u\omega(u)\} = \delta_1 + \{u\omega(u)\}'\,\mathrm{d}u = \delta_1 + \omega(u-1)\,\mathrm{d}u.$$

作变量替换 $(u-1)\mapsto u$, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\widehat{\omega}(s) = -\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}\{1+\widehat{\omega}(s)\}.$$

从中得出对适当的常数 C 有 $1+\widehat{\omega}(s) = C\mathrm{e}^{J(s)}$, 其中

$$J(s) := \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-s-t}}{s+t}\,\mathrm{d}t.$$

引理 5.9 于是说明

$$1+\widehat{\omega}(s) = \frac{C}{s\widehat{\varrho}(s)}. \tag{6.34}$$

特别地, 由于 $s\to+\infty$ 时 $s\widehat{\varrho}(s) = \int_0^\infty \varrho(u/s)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \to \varrho(0) = 1$, 有

$$\lim_{s\to+\infty}\widehat{\omega}(s) = C-1,$$

而 (6.23) 明显推出 $s\to+\infty$ 时 $\widehat{\omega}(s)\to 0$. 于是 $C=1$, 且有下述结论.

定理 6.7 由关系 (6.33) 所定义的 $\sigma > 0$ 上的函数 $\widehat{\omega}(s)$ 可延拓成 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, 具体由公式

$$1+\widehat{\omega}(s)=\frac{1}{s\widehat{\varrho}(s)}\qquad(s\neq 0)\tag{6.35}$$

给出. 当 s 不是负整数时, 有

$$1+\widehat{\omega}(s)=\mathrm{e}^{J(s)}.\tag{6.36}$$

注 (i) 用从函数方程 (定理 6.4 和定理 5.8) 中得出的 $\Phi(x,y)$ 和 $\Psi(x,y)$ 的基本估计以及这两个量之间的对偶性可给出 (6.35) 的纯数论证明: 见习题 297.

(ii) 反过来, 可用 (6.35) 重新解析地证明先前推论 6.5 中用 Mertens 公式得到的 $\lim\limits_{u\to\infty}\omega(u)=\mathrm{e}^{-\gamma}$. 为此, 注意到由 (6.35) 推出

$$\lim_{s\to 0+}s\widehat{\omega}(s)=1/\widehat{\varrho}(0)=\mathrm{e}^{-\gamma}.$$

由于 ω 为正, Karamata 定理 (第二部分定理 7.5) 推出估计

$$\int_0^u\omega(t)\,\mathrm{d}t=\big\{\mathrm{e}^{-\gamma}+o(1)\big\}u\qquad(u\to\infty).$$

而由 (6.21) 和 (6.23) 得 $u\omega'(u)\ll 1$. 于是知对适当的函数 $\varepsilon(u)\to 0$ 及任意 h, $0<h\leqslant u$, 一方面

$$\frac{1}{h}\int_u^{u+h}\omega(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\gamma}+O\Big(\varepsilon(u)\frac{u}{h}\Big);$$

另一方面

$$\frac{1}{h}\int_u^{u+h}\omega(t)\,\mathrm{d}t=\omega(u)+\frac{1}{h}\int_u^{u+h}O\Big(\frac{h}{u}\Big)\,\mathrm{d}t=\omega(u)+O\Big(\frac{h}{u}\Big).$$

于是取 $h=u\sqrt{\varepsilon(u)}$ 便可.

容易从 Buchstab 函数的微分差分方程 (6.21)—(6.22) 得出它对每个 $j\geqslant 0$ 在 $\mathbb{R}\setminus\{1,2,\ldots,j+1\}$ 上是 C^j 的. 在例外点处其各阶导数具有第一类不连续点. 约定 $\omega^{(j)}(u)$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上用右连续延拓来定义.

特别地, $\omega'(u)$ 在任意有界区间上具有界变差. 加上无穷远处的速降性 (定理 6.6), 该性质足以推出 $u\neq 1$ 或 2 时 Laplace 反转积分的收敛性 (收敛到值 $\omega'(u)$), 积分坐标任意. 于是可用鞍点法在无穷远点附近估计$\omega'(u)$. 我们得到以下结论, 其叙述用到记号

$$H(u):=\exp\big\{u/\ln^2(u+2)\big\}\qquad(u\geqslant 0).$$

定理 6.8 *存在绝对正常数 a, 使得*

$$\begin{matrix}\omega(u)-\mathrm{e}^{-\gamma}\\ \omega'(u)\end{matrix} \ll \varrho(u)H(u)^{-a} \qquad (u \geqslant 0). \tag{6.37}$$

证明 可设 $u>2$. 先注意到由第二个上界估计容易推出第一个. 这是因为

$$\omega(u)-\mathrm{e}^{-\gamma}=-\int_u^{\infty}\omega'(t)\,\mathrm{d}t.$$

用 $H(u)^{-a}$ 的单调下降性及估计 (6.32) 即可.

设 $h(s)$ 为 $\omega'(u)$ 的 Laplace 变换. 正如前文所指出的,

$$\omega'(u)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\kappa-\mathrm{i}\infty}^{\kappa+\mathrm{i}\infty}h(s)\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}s \qquad (u>2) \tag{6.38}$$

对任意 κ 成立. 有

$$h(s)=s\widehat{\omega}(s)-\mathrm{e}^{-s}, \tag{6.39}$$

其中第二项来自 $\omega(u)$ 在 $u=1$ 处的不连续性. 考虑到 (6.35), 得

$$h(s)=\widehat{\varrho}(s)^{-1}-\mathrm{e}^{-s}-s. \tag{6.40}$$

回顾

$$\widehat{\varrho}(s)=\mathrm{e}^{\gamma+I(-s)} \qquad \left(I(s):=\int_0^s\frac{\mathrm{e}^v-1}{v}\,\mathrm{d}v\right).$$

先不考虑项 $-\mathrm{e}^{-s}-s$ 对计算的影响, 由鞍点法的原则须选择积分坐标 κ 使得方程

$$\mathrm{e}^{-s}=1+su \tag{6.41}$$

至少有一个复根实部为 κ. 与前面 Dickman 函数的情形相反, 方程在鞍点 (6.41) 处没有实根. 然而可观察到, 对足够大的 u, 它具有实部接近于 $-\xi(u)$ 的根.

事实上, 在 (6.41) 中作变量替换 $s=-\xi(u)+\mathrm{i}\pi-z$, 得

$$z\lambda(z)=w, \tag{6.42}$$

其中

$$\lambda(z):=(1+u\xi)\left(\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}\right)-u, \qquad w:=-\mathrm{i}\pi u-2.$$

由 $\xi(u)\sim\ln u \quad (u\to\infty)$ (见引理 5.11) 知存在正绝对常数 u_0, 使得

$$|z\lambda(z)|>|w| \qquad \big(|z|=2\pi/\ln(u+1),\, u>u_0\big).$$

由于 $\lambda(z)$ 在 $|z| < 2\pi/\ln(u+1)$, $u > u_0$ 上非零, 由 Rouché 定理, 这说明方程 (6.42) 在该圆盘中有唯一解. 另外 Lagrange 定理说明该解是 w 的解析函数, 而且可具体计算其 Taylor 系数, 可见 Whittaker 和 Watson (1927) §7.32, 但这里用不到该结论.

可选择 $\kappa = -\xi(u) - \Re e\, z$ 具体计算积分 (6.38). 从中可得比 (6.37) 略精细的结果, 见注记. 这里只考虑较简单的选择 $\kappa = -\xi(u)$, 直观上来自当 $u \to \infty$ 时 (6.42) 有趋于 0 的根的事实. 这样便可利用第五章中得到的 $\widehat{\varrho}(s)$ 在直线 $\sigma = -\xi(u)$ 上的估计.

在证明的余下部分中记 $\kappa = -\xi(u)$. 首先考虑区域 $|\tau| > \mathrm{e}^{\xi}$ 对 (6.38) 的贡献. 由估计

$$J(s) = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}\Big(1 - \frac{1}{s}\Big) + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-s}}{|\tau|^3}\Big) \qquad (\tau \neq 0),$$

从 (6.39) 和 (6.36) 中得到对 $s = -\xi(u) + \mathrm{i}\tau$, $|\tau| > \mathrm{e}^{\xi}$ 有

$$\begin{aligned} h(s) &= s\Big\{1 + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}\Big(1 - \frac{1}{s}\Big) + \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{2s^2}\Big(1 - \frac{1}{s}\Big)^2 + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{3\xi}}{|\tau|^3}\Big)\Big\} - s - \mathrm{e}^{-s} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-s}}{\mathrm{i}\tau} + \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{2\mathrm{i}\tau} + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{3\xi}}{\tau^2}\Big). \end{aligned}$$

可用第二中值公式估计相对于主项的积分. 显然地估计余项的贡献, 得区域 $|\tau| > \mathrm{e}^{\xi}$ 对 (6.38) 的贡献

$$\ll \mathrm{e}^{-u\xi + 2\xi} \ll \varrho(u)\mathrm{e}^{-u/2},$$

其中第二个估计由定理 5.13 可得.

为估计补集上的贡献, 应用关于 $h(s)$ 的 (6.40). 将证明对某适当的正常数 a, 有

$$\widehat{\varrho}(s)^{-1} \ll \widehat{\varrho}(-\xi)H(u)^{-2a} \qquad (\sigma = -\xi,\ |\tau| \leqslant \mathrm{e}^{\xi}). \tag{6.43}$$

先承认该估计, 由定理 5.13 得

$$\int_{|\tau| \leqslant \mathrm{e}^{\xi}} h(s)\mathrm{e}^{su}\,\mathrm{d}s \ll \mathrm{e}^{-u\xi+\xi}\big\{\widehat{\varrho}(-\xi)H(u)^{-2a} + \mathrm{e}^{\xi}\big\} \ll \varrho(u)H(u)^{-a}.$$

只余下证明 (6.43), 即 (令 $T := u/\ln^2(u+1)$)

$$\Re e\,\big\{I(\xi + \mathrm{i}\tau) + I(\xi)\big\} \geqslant 2aT + O(1) \qquad (|\tau| \leqslant \mathrm{e}^{\xi}). \tag{6.44}$$

其左边等于

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big\{ e^{v\xi}\big(1+\cos(\tau v)\big) - 2 \Big\} \frac{dv}{v} \\
&\geqslant -\int_0^{\frac{1}{2}} \big(1-\cos(\tau v)\big)\frac{dv}{v} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \Big\{ e^{v\xi}\big(1+\cos(\tau v)\big) - \frac{2}{v}\Big\} dv \\
&= -2\int_0^{\frac{1}{4}\tau} \sin^2 v \frac{dv}{v} + \left[\frac{e^{v\xi}}{\xi} + \Re e\Big(\frac{e^{v(\xi+i\tau)}}{\xi+i\tau}\Big)\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \ln 4 \\
&\geqslant O\big(\ln(1+\tau^2)\big) + e^{\xi}\Big\{\frac{1}{\xi} + \frac{\cos\lambda}{\sqrt{\xi^2+\tau^2}}\Big\} + O\Big(\sqrt{\frac{u}{\xi}}\Big),
\end{aligned}$$

其中 $\lambda := \tau - \operatorname{Arctan}(\tau/\xi)$. 存在绝对常数 τ_0, 使得 $\cos\lambda \geqslant 0$ 对 $|\tau| \leqslant \tau_0$ 成立. 上述下界估计于是 $\geqslant u + O(\sqrt{u/\xi})$. 当 $|\tau| > \tau_0$ 时, 它

$$\geqslant e^{\xi}\Big(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\tau_0^2}}\Big) + O\Big(\sqrt{\frac{u}{\xi}}\Big) \gg \frac{e^{\xi}}{\xi^3} + O\Big(\sqrt{\frac{u}{\xi}}\Big) \gg T + O(1).$$

这便证明了 (6.44), 定理 6.8 得证. □

推论 6.9 设 j 为 $\geqslant 1$ 的整数, 有

$$\omega^{(j)}(u) \ll \varrho^{(j)}(u) H(u)^{-a} \qquad (u \to \infty). \tag{6.45}$$

证明 用 ω 及其导数右连续延拓的约定, 方程 (6.21) 取 j 阶导数后得

$$u\omega^{(j+1)}(u) = \omega^{(j)}(u-1) - (j+1)\omega^{(j)}(u) \qquad (u \in \mathbb{R}). \tag{6.46}$$

对 j 归纳, 由

$$\begin{aligned}
\varrho^{(j)}(u-1) &\ll \varrho(u-1)\ln^j(u+1) = -u\varrho'(u)\ln^j(u+1) \qquad (u \geqslant 1) \\
&\ll u\varrho(u)\ln^{j+1}(u+1) \ll u\varrho^{(j+1)}(u)
\end{aligned}$$

形式下的推论 5.14 推出 (6.45). □

§6.4 用鞍点法估计 $\Phi(x,y)$

如同其对偶 $\Psi(x,y)$, 函数 $\Phi(x,y)$ 可用鞍点法从其 Perron 积分出发来估计. 然而首先要注意两个不同之处. 一方面, 其对应的 Dirichlet 级数 $\zeta(s)/\zeta(s,y)$ 在 $s=1$ 处有一个极点, 最优积分坐标的选择从而取决于留数定理的应用; 另一方面, 这里不必确定要研究的函数的渐近性质, 但要相对于确定的主项来估计余项, 见定理 6.4.

在本节中保持第五章中的一些记号, 比如区域

$$x > x_0(\varepsilon), \quad \exp\Big\{\big(\ln_2 x\big)^{(5/3)+\varepsilon}\Big\} \leqslant y \leqslant x \tag{H_ε}$$

及函数

$$L_\varepsilon(y) := \exp\left\{(\ln y)^{(3/5)-\varepsilon}\right\}. \tag{6.47}$$

还引进如下记号

$$Y_\varepsilon := \exp\left\{(\ln y)^{(3/2)-\varepsilon}\right\}, \quad E(x,y) := H(u)^{-c}L_\varepsilon(y)^{-1} + Y_\varepsilon^{-1}, \tag{6.48}$$

$$\mu_y(u) := \int_0^\infty \omega(u-v)y^{-v}\,\mathrm{d}v, \quad W(x,y) := x\mu_y(u)\frac{\mathrm{e}^\gamma \ln y}{\zeta(1,y)}. \tag{6.49}$$

字母 c, 无论有下标与否, 均表示绝对正常数.

本节的根本目的是证明如下结论.

定理 6.10 设 $\varepsilon > 0$. 对 $x \geqslant y \geqslant 2$, 有

$$\Phi(x,y) - W(x,y) \ll \begin{cases} \Psi(x,y)\,E(x,y), & \text{若在区域 } H_\varepsilon \text{ 中}, \\ \Psi(x,y), & \text{若在 } H_\varepsilon \text{ 之外}. \end{cases} \tag{6.50}$$

先证第二个估计. 这是下列引理的一个直接推论.

引理 6.11 设 $\delta > 1$. 对 $x \geqslant y \geqslant 2$ 一致地有

$$\left|\mu_y(u)\mathrm{e}^\gamma \ln y - 1\right| \ll \varrho(u)H(u)^{-c_1} + x^{-1}(\mathrm{e}^{\delta\overline{u}} + y). \tag{6.51}$$

先承认这个估计. 由定理 5.27, 有

$$x\varrho(u)H(u)^{-c_1} \ll \Psi(x,y)H(u)^{-c_1/2}.$$

另外, 容易证明定理 5.2 中关于 $\ln\Psi(x,y)$的估计 Z 满足

$$Z := u\ln\left(1+\frac{y}{\ln x}\right) + \frac{y}{\ln y}\ln\left(1+\frac{\ln x}{y}\right) \geqslant \overline{u}\ln 4$$

及

$$Z \geqslant \tfrac{1}{2}\overline{u} + \ln y + O(1) \qquad (u \geqslant 2).$$

于是对 $1 < \delta < \ln 4 - \frac{1}{3}$ 有

$$y + \mathrm{e}^{\delta\overline{u}} \ll \Psi(x,y)\mathrm{e}^{-\overline{u}/3}.$$

代入 (6.51), 得

$$W(x,y) - \frac{x}{\zeta(1,y)} \ll \frac{\Psi(x,y)}{\ln y}H(\overline{u})^{-c_1/2}, \tag{6.52}$$

(6.50) 的第二个估计由该估计及定理 6.2 可得. □

引理 6.11 的证明 用简单的分部积分可得

$$\mu_y(u)\ln y=\omega(u)-\frac{y}{x}-\int_0^\infty \omega'(u-v)y^{-v}\,\mathrm{d}v, \tag{6.53}$$

其中右边第二项来自 $\omega(u)$ 在 $u=1$ 处的不连续性.

考虑到关于 $\omega(u)-\mathrm{e}^{-\gamma}$ 的上界估计 (定理 6.8), 为证 (6.51), 只须证明对 $x\geqslant y\geqslant 2$ 有

$$\int_0^\infty \big|\omega'(u-v)\big|y^{-v}\,\mathrm{d}v\ll\varrho(u)H(u)^{-c_1}+\mathrm{e}^{\delta\overline{u}}x^{-1}. \tag{6.54}$$

首先, 对 $\varepsilon>0$ 有

$$H(u-v)^{-a}\ll_\varepsilon H(u)^{-a}\mathrm{e}^{\varepsilon v}\qquad(0\leqslant v\leqslant u),$$

其中 a 是定理 6.8 中的绝对常数. 令 $y_\varepsilon:=y\mathrm{e}^{-\varepsilon}$. 于是由定理 6.8 得

$$\int_0^\infty \big|\omega'(u-v)\big|y^{-v}\,\mathrm{d}v\ll_\varepsilon H(u)^{-a}\int_0^\infty \varrho(u-v)y_\varepsilon^{-v}\,\mathrm{d}v. \tag{6.55}$$

令 λ 为 $\geqslant 1$ 的参数. 可将积分重新写成

$$y_\varepsilon^{-u}\int_0^u \varrho(t)y_\varepsilon^t\,\mathrm{d}t\leqslant y_\varepsilon^{-u}\int_0^\infty \varrho(t)y_\varepsilon^t\lambda^{u-t}\,\mathrm{d}t=\big(y_\varepsilon/\lambda\big)^{-u}\widehat{\varrho}\big(-\ln(y_\varepsilon/\lambda)\big).$$

若 $y_\varepsilon\geqslant\mathrm{e}^{\xi(u)}$, 由定理 5.13, 可选 $\lambda=y_\varepsilon\mathrm{e}^{-\xi(u)}$ 得 (6.55) 的左边

$$\ll_\varepsilon H(u)^{-a}\mathrm{e}^{-u\xi(u)}\widehat{\varrho}\big(-\xi(u)\big)\ll H(u)^{-a/2}\varrho(u).$$

于是关系 (6.54) 在此情形下成立.

当 $y_\varepsilon<\mathrm{e}^{\xi(u)}$ 时, 应用定理 6.6 中关于 $|\omega'(u)|$ 的上界估计 (6.29). (6.55) 的左边于是至多等于

$$\int_0^\infty \varrho(u-v)y^{-v}\,\mathrm{d}v=\int_0^u \varrho(t)y^{t-u}\,\mathrm{d}t\leqslant y^{-u}\widehat{\varrho}(-\ln y)=y^{-u}\mathrm{e}^{\gamma+I(\ln y)}.$$

由于 $y\to\infty$ 时 $I(\ln y)\sim y/\ln y$ 且 $u\to\infty$ 时 $I\big(\varepsilon+\xi(u)\big)\sim\mathrm{e}^\varepsilon u$, 只要 $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$ 足够小时, 在考虑的区域中必然有

$$\mathrm{e}^{\gamma+I(\ln y)}\ll\mathrm{e}^{\delta\overline{u}}.$$

这便证明了 (6.54), 引理 6.11 得证. □

现将注意力转到定理 6.10 的第一个相对于区域 (H_ε) 的估计. 由 Perron 公式, 对任意实数 $\kappa>1$, 有

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\kappa-\mathrm{i}\infty}^{\kappa+\mathrm{i}\infty}\frac{\zeta(s)x^s}{\zeta(s,y)s}\,\mathrm{d}s\qquad(x\notin\mathbb{Z}^+). \tag{6.56}$$

其在 $s=1$ 处的留数等于 $x/\zeta(1,y)$. 被积函数对 $s\neq 0$ 或 1 来说是 s 的全纯函数, 且当 $|\tau|\to\infty$ 时在任意带域 $0<\sigma_0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 上趋于 0. 于是可将积分坐标向左移到

$$\sigma=\alpha_0:=1-\frac{\xi(u)}{\ln y},$$

得

$$\Phi(x,y)=\frac{x}{\zeta(1,y)}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\alpha_0-\mathrm{i}\infty}^{\alpha_0+\mathrm{i}\infty}\frac{\zeta(s)x^s}{\zeta(s,y)s}\,\mathrm{d}s. \tag{6.57}$$

当 $|\tau|\leqslant L_\varepsilon(y)$ 时, 用引理 5.16 和定理 6.7 可将 (6.57) 的被积函数估计为

$$\frac{x\mathrm{e}^{uz}\{1+\widehat{\omega}(z)\}}{1+z/\ln y}\qquad\big(z:=(s-1)\ln y\big).$$

先忽略区域 $|\tau|>L_\varepsilon(y)$ 对积分 (6.57) 的贡献, 得 $\Phi(x,y)$ 的直观估计

$$W_1(x,y):=\frac{x}{\zeta(1,y)}+\frac{x}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\xi(u)-\mathrm{i}\infty}^{-\xi(u)+\mathrm{i}\infty}\frac{1+\widehat{\omega}(s)}{s+\ln y}\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}s. \tag{6.58}$$

后文中将看到积分的确收敛. 由定理 6.7, $\widehat{\omega}(s)$ 在 $s=0$ 处有单极点, 留数为 $\mathrm{e}^{-\gamma}$. 现在将 (6.58) 的积分坐标向右移到 $\sigma=\kappa>0$, 得

$$W_1(x,y)=\frac{x}{\zeta(1,y)}-\frac{x\mathrm{e}^{-\gamma}}{\ln y}+\frac{x}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\kappa-\mathrm{i}\infty}^{\kappa+\mathrm{i}\infty}\frac{1+\widehat{\omega}(s)}{s+\ln y}\,\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}s. \tag{6.59}$$

然而 $\big(1+\widehat{\omega}(s)\big)/(s+\ln y)$ 是函数

$$t\mapsto y^{-t}+\int_0^\infty\omega(t-v)y^{-v}\,\mathrm{d}v$$

的 Laplace 变换, 在任意有限区间上连续且有界变差. Laplace 逆变换定理 (见Widder (1946) 定理 II.7.3) 于是推出具体公式

$$W_1(x,y)=1+x\Big\{\frac{1}{\zeta(1,y)}-\frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\ln y}+\mu_y(u)\Big\}. \tag{6.60}$$

现在, 注意到由引理 6.11 推出在区域 (H_ε) 上有

$$\begin{aligned}W_1(x,y)-W(x,y)&=1+x\Big(\frac{1}{\zeta(1,y)}-\frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\ln y}\Big)\big(1-\mu_y(u)\mathrm{e}^{\gamma}\ln y\big)\\&\ll x\varrho(u)H(u)^{-c_1}L_\varepsilon(y)^{-1}\ll\Psi(x,y)E(x,y).\end{aligned} \tag{6.61}$$

该差值与 (6.50) 断言中的余项同阶. 于是可将 $W(x,y)$ 看成从鞍点法中得出的 $\Phi(x,y)$ 的自然估计.

只剩下严格实现上面草拟的证明思路. 将多次用到下述估计, 由定理 5.13, 引理 5.16 及推论 5.19 而得. 在 (H_ε) 中一致地有

$$x^{\alpha_0}\zeta(\alpha_0,y) \asymp \Psi(x,y)\sqrt{u}\ln y. \tag{6.62}$$

令 $L := L_{\varepsilon/2}(y)$. 将证明下列三个估计

$$\int_{\substack{\sigma=\alpha_0\\|\tau|>L}} \frac{\zeta(s)x^s}{\zeta(s,y)s}\,\mathrm{d}s \ll \Psi(x,y)E(x,y), \tag{6.63}$$

$$\frac{1}{L}\int_{\substack{\sigma=\alpha_0\\|\tau|\leqslant L}} \left|\frac{\zeta(s)x^s}{\zeta(s,y)s}\right|\mathrm{d}s \ll \Psi(x,y)E(x,y), \tag{6.64}$$

$$x\int_{\substack{\sigma=-\xi\\|\tau|>L}} \frac{1+\widehat{\omega}(s)}{s+\ln y}\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}s \ll \Psi(x,y)E(x,y). \tag{6.65}$$

这足以证明定理 6.10：上界估计 (6.63) 可用来截断积分 (6.56)；用上界估计 (6.64) 则可忽略应用引理 5.16 ($\zeta(s,y)$ 的正则逼近) 所带来的余项；而上界估计 (6.65) 则可将 $\zeta(s,y)$ 换成其正则逼近后得到的积分延拓到无穷远点.

最困难的部分是估计 (6.63). 将用到下列两个辅助结果.

引理 6.12 对 (H_ε) 中的 (x,y) 及 $s=\alpha_0+\mathrm{i}\tau$, 有

$$\zeta(s,y) \ll \zeta(\alpha_0,y)\exp\left\{-\frac{c_2\tau^2u}{(1-\alpha_0)^2+\tau^2}\right\} \qquad \left(\frac{1}{\ln y}\leqslant|\tau|\leqslant Y_\varepsilon\right), \tag{6.66}$$

$$\zeta(s,y)^{-1} \ll \zeta(\alpha_0,y)H(u)^{-c_2} \qquad (|\tau|\leqslant Y_\varepsilon). \tag{6.67}$$

证明 先证 (6.66). 容易通过计算说明

$$\left|\frac{1-p^{-\alpha_0}}{1-p^{-s}}\right| = \left(1+\frac{2\big(1-\cos(\tau\ln p)\big)}{p^{\alpha_0}(1-p^{-\alpha_0})^2}\right)^{-1/2} \leqslant \exp\left\{-\frac{1-\cos(\tau\ln p)}{p^{\alpha_0}}\right\}, \tag{6.68}$$

从而

$$|\zeta(s,y)|\zeta(\alpha_0,y)^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-X}, \quad 其中 \quad X := \sum_{p\leqslant y}\frac{1-\cos(\tau\ln p)}{p^{\alpha_0}}.$$

需对 X 作下界估计, 有

$$X\ln y \geqslant A(\alpha_0) - \Re e\,A(\alpha_0+i\tau) + O\big(y^{\frac{1}{2}-\alpha_0}\big), \tag{6.69}$$

其中

$$A(s) := \sum_{n\leqslant y}\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

(6.69) 的余项包括了 $A(s)$ 中非素整数 n 的贡献. 上界估计类似引理 5.16 的证明而得.

由实效 Perron 公式 (第二部分推论 2.4) 推出

$$A(s)=\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\kappa-\mathrm{i}T}^{\kappa+\mathrm{i}T}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+w)\frac{y^w}{w}\,\mathrm{d}w+O\Big(\frac{\ln y}{y^{\alpha_0}}\Big),$$

其中 $\kappa:=1-\alpha_0+1/\ln y$, $T:=Y_\varepsilon^2$. 将积分线段平移到 $\Re e\,w=1-\alpha_0-(\ln T)^{-(2/3)-\varepsilon/10}$ 处, 使得 $s+w$ 留在 Vinogradov 无零点区域之中. 它通过的唯一极点是 $w=1-s$. 竖直线段的贡献

$$\ll(\ln T)^2y^{1-\alpha_0}\exp\Big\{-\frac{\ln y}{(\ln T)^{(2/3)+\varepsilon/10}}\Big\}\ll y^{1-\alpha_0}\exp\big\{-(\ln y)^{\varepsilon/2}\big\}.$$

不难验证同样的估计对水平线段的贡献仍成立. 于是得到

$$A(s)=\frac{y^{1-s}}{1-s}+O\Big(y^{1-\alpha_0}\exp\big\{-(\ln y)^{\varepsilon/2}\big\}\Big).$$

代入 (6.69), 得

$$X\ln y\geqslant\frac{y^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0}\Re e\Big(1-\frac{1-\alpha_0}{1-s}\Big)+O\Big(y^{1-\alpha_0}\exp\big\{-(\ln y)^{\varepsilon/2}\big\}\Big).$$

由于对 $|\tau|\geqslant1/\ln y$ 有

$$\frac{\tau^2}{(1-\alpha_0)^2+\tau^2}\geqslant\frac{1}{\xi(u)^2+1}\gg\frac{1}{\ln^2y},\tag{6.70}$$

于是便得到

$$X\geqslant\frac{\mathrm{e}^{\xi(u)}\tau^2}{\xi(u)\big((1-\alpha_0)^2+\tau^2\big)}+O\Big(\exp\big\{\xi(u)-(\ln y)^{\varepsilon/2}\big\}\Big)\gg\frac{u\tau^2}{(1-\alpha_0)^2+\tau^2},$$

(6.66) 得证.

(6.67) 的证明类似. 其出发点是

$$\begin{aligned}\big|(1-p^{-s})(1-p^{-\alpha_0})\big|&=\big(1-p^{-2\alpha_0}\big)\left(1-\frac{2\big(1+\cos(\tau\ln p)\big)}{p^{\alpha_0}\big(1+p^{-\alpha_0}\big)^2}\right)^{1/2}\\&\leqslant\exp\Big\{-\frac{1+\cos(\tau\ln p)}{4p^{\alpha_0}}\Big\}.\end{aligned}$$

从而

$$\big|\zeta(s,y)\zeta(\alpha_0,y)\big|^{-1}\leqslant\mathrm{e}^{-V/4},\quad 其中\quad V:=\sum_{p\leqslant y}\frac{1+\cos(\tau\ln p)}{p^{\alpha_0}}.$$

当 $|\tau|>1/\ln y$ 时, 关于 X 的下界估计对 V 也成立: 只须考虑 $A(\alpha_0)+\Re e\,A(\alpha_0+\mathrm{i}\tau)$. 由 (6.70), 在此情形下 (6.67) 成立. 当 $|\tau|\leqslant1/\ln y$ 时有

$$V\geqslant\frac{1+\cos1}{\ln y}\sum_{p\leqslant y}\frac{\ln p}{p^{\alpha_0}}\gg\frac{y^{1-\alpha_0}-1}{(1-\alpha_0)\ln y}=u.$$

引理 6.12 于是得证. □

引理 6.13 设 $\varepsilon > 0$. 对 (H_ε) 中的 (x,y) 及 $1 \leqslant z \leqslant Y_\varepsilon$ 一致地有

$$\Psi(x+x/z,y) - \Psi(x,y) \ll \Psi(x,y)\sqrt{u}\ln y\{1/z + \mathrm{e}^{-c_3 u}\}. \tag{6.71}$$

证明 如推论 5.20 那样推理. 令

$$w(t) := \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\sin tz}{tz}\Big)^2, \quad \widehat{w}(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2z}\Big(1 - \Big|\frac{\tau}{2z}\Big|\Big)^+,$$

可见 (6.71) 的左边

$$\begin{aligned}
&\ll \sum_{P^+(n)\leqslant y}\Big(\frac{x}{n}\Big)^{\alpha_0} w\Big(\ln\frac{x}{n}\Big) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\alpha_0-2\mathrm{i}z}^{\alpha_0+2\mathrm{i}z} \zeta(s,y)x^s\widehat{w}(\tau)\,\mathrm{d}s \\
&\ll \frac{1}{z}x^{\alpha_0}\zeta(\alpha_0,y) + x^{\alpha_0}\max_{1\leqslant|\tau|\leqslant 2z}\big|\zeta(\alpha_0+\mathrm{i}\tau,y)\big|.
\end{aligned}$$

命题结论于是由 (6.66) 和 (6.62) 而得. □

(6.63) **的证明** 令

$$T := \begin{cases} L, & 若\ 1 \leqslant u \leqslant (\ln y)^{3(1-\varepsilon)/5}, \\ L\mathrm{e}^{c_4 u}, & 若\ (\ln y)^{3(1-\varepsilon)/5} < u \leqslant (\ln y)^{(3-\varepsilon)/2}, \\ Y_{\varepsilon/3}, & 若\ (\ln y)^{(3-\varepsilon)/2} < u \leqslant L_\varepsilon(y), \end{cases} \tag{6.72}$$

其中 c_4 是适当的绝对正常数. 当 $T \neq L$, 即 $u > \big(\ln y\big)^{3(1-\varepsilon)/5}$ 时, 由 (6.67), 并用第二部分定理 3.9 来估计 $\zeta(s)$ 知

$$\int_{\substack{\sigma=\alpha_0 \\ L<|\tau|\leqslant T}} \frac{\zeta(s)x^s}{\zeta(s,y)s}\,\mathrm{d}s \ll x^{\alpha_0}\zeta(\alpha_0,y)H(u)^{-c_2}\frac{T^{1-\alpha_0}}{(1-\alpha_0)^2} \ll \Psi(x,y)E(x,y)$$

对于 (6.48) 中 $E(x,y)$ 的定义中的常数 c 的某适当选择成立. 于是只剩下证明积分

$$R := \int_{\substack{\sigma=\alpha_0 \\ |\tau|>T}} \frac{\zeta(s)x^s}{\zeta(s,y)s}\,\mathrm{d}s$$

具有上述上界估计的阶.

用第二部分定理 3.5 中 ζ-函数近似函数方程的粗略形式可得当 $s = \alpha_0 + \mathrm{i}\tau$ 时有

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant|\tau|}\frac{1}{n^s} + O\Big(\frac{1}{|\tau|^{\alpha_0}}\Big), \tag{6.73}$$

从而

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(s,y)} = \sum_{n\leqslant|\tau|}\sum_{P(m)\leqslant y}\frac{\mu(m)}{(mn)^s} + O\Big(\frac{\zeta(\alpha_0,y)}{|\tau|^{\alpha_0}}\Big). \tag{6.74}$$

(6.74) 的余项对 R 的贡献

$$\ll x^{\alpha_0}\zeta(\alpha_0,y)\int_T^\infty \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^{1+\alpha_0}} \ll \frac{x^{\alpha_0}\zeta(\alpha_0,y)}{\sqrt{T}} \ll \Psi(x,y)E(x,y),$$

其中又一次用到了 (6.62).

由形如第二部分 (2.7) 的上界估计第一实效 Perron 公式知对 $z>0$ 一致地有

$$\int_{\substack{\sigma=\alpha_0\\|\tau|>T}} \frac{z^s}{s}\,\mathrm{d}s \ll \frac{z^{\alpha_0}}{1+T|\ln z|}.$$

(6.74) 主项对 R 的贡献可如下估计

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geqslant 1}\sum_{P^+(m)\leqslant y}\mu(m)\int_{\substack{\sigma=\alpha_0\\|\tau|\geqslant\max(T,n)}}\left(\frac{x}{mn}\right)^s\frac{\mathrm{d}s}{s}\\ &\qquad\ll\sum_{n\geqslant 1}\sum_{P^+(m)\leqslant y}\frac{(x/mn)^{\alpha_0}}{1+(T+n)|\ln(x/mn)|}.\end{aligned}\tag{6.75}$$

使得 $|\ln(x/mn)|>1$ 的整数对 (m,n) 对于 (6.75) 的贡献

$$\ll x^{\alpha_0}\zeta(\alpha_0,y)\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\alpha_0}(T+n)} \ll \frac{x^{\alpha_0}\zeta(\alpha_0,y)}{\sqrt{T}} \ll \Psi(x,y)E(x,y).$$

为处理其补集, 即使得 $|\ln(x/mn)|\leqslant 1$ 的 (m,n) 的贡献, 须注意 $T\leqslant x^{\varepsilon}$ 对足够大的 x, 于是对足够大的 y 成立. 用 S_1, S_2 分别表示在附加条件 $m\leqslant x/T$, $m>x/T$ 下的贡献. 一方面, 在 (5.1) 的记号下, 有

$$\begin{aligned}S_1 &\leqslant \sum_{m\in S(x/T,y)}\sum_{x/\mathrm{e}m<n\leqslant \mathrm{e}x/m}\frac{1}{1+|n-x/m|} \ll \sum_{m\in S(x/T,y)}\ln(\mathrm{e}x/m)\\ &\ll \Psi(x/T,y)\ln x \leqslant (x/T)^{\alpha_0}\zeta(\alpha_0,y)\ln x \ll \Psi(x,y)E(x,y),\end{aligned}$$

其中倒数第二个不等式即是量 $\Psi(x/T,y)$ 的 Rankin 上界估计.

当 (m,n) 计入 S_2 中时, 显然有 $n\leqslant \mathrm{e}T$. 从而

$$\begin{aligned}S_2 &\ll \sum_{n\leqslant \mathrm{e}T}\sum_{P^+(m)\leqslant y}\frac{1}{1+T|x/mn-1|}\\ &\ll \sum_{n\leqslant \mathrm{e}T}\left\{\frac{\Psi(x/n,y)}{\sqrt{T}}+\sum_{\substack{|m-x/n|\leqslant x/(n\sqrt{T})\\P^+(m)\leqslant y}}1\right\}.\end{aligned}$$

最后一个对 m 的和式可用引理 6.13 来估计, 当 $u>(\ln y)^{3(1-\varepsilon)/5}$ 时得上界估计

$$\ll \Psi(x/n,y)E(x,y)^2;$$

在相反的情形下, 则借助于显然的上界估计

$$\ll x/(n\sqrt{T}) \ll (x/n)u^{-2u}T^{-1/3} \ll \Psi(x/n,y)E(x,y)^2.$$

最后, 无论在何种情形下均得到

$$\begin{aligned} S_2 &\ll \sum_{n\leqslant eT} \Psi(x/n,y)E(x,y)^2 \leqslant x^{\alpha_0}\zeta(\alpha_0,y)E(x,y)^2 \sum_{n\leqslant eT} n^{-\alpha_0} \\ &\ll x^{\alpha_0}\zeta(\alpha_0,y)E(x,y)^2 T^{1-\alpha_0}/(1-\alpha_0) \ll \Psi(x,y)E(x,y). \end{aligned}$$

这便完成了上界估计 (6.63) 的证明.

(6.64) **的证明**　先用 (6.67) 再用 (6.62), 可估计 (6.64) 左边

$$\ll \frac{x^{\alpha_0}\zeta(\alpha_0,y)}{L} H(u)^{-c_2} \ln L \ll \Psi(x,y)E(x,y).$$

(6.65) **的证明**　从关于 $1+\widehat{\omega}(s)$ 的公式 (6.36) 以及显然的上界估计 $J(s) \ll \mathrm{e}^{-\sigma}|\tau|^{-1}$ 推出

$$1+\widehat{\omega}(s) = 1 + O\Big(\frac{1+u\xi(u)}{s}\Big) \qquad (|\tau|>L).$$

这说明了积分 (6.65) 的收敛性. 由第二中值公式得

$$\int_{\substack{\sigma=-\xi \\ |\tau|>L}} \frac{1+\widehat{\omega}(s)}{s+\ln y}\,\mathrm{e}^{us}\,\mathrm{d}s = \int_{\substack{\sigma=-\xi \\ |\tau|>L}} \frac{\mathrm{e}^{us}}{s}\Big\{1+O\Big(\frac{u\xi(u)+\ln y}{s}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}s \ll \mathrm{e}^{-u\xi}L^{-1}.$$

由定理 5.13 及推论 5.19 推出区域 (H_ε) 中

$$\Psi(x,y) \gg x\mathrm{e}^{-u\xi}\mathrm{e}^{u/2}$$

成立, 便得到要求的估计 (6.65).

定理 6.10 于是得证.

推论 6.14　设 $\varepsilon>0$. 对 (H_ε) 中的 x,y, 有

$$\Phi(x,y) - \frac{x}{\zeta(1,y)} \ll \frac{x\varrho(u)}{\ln y}\Big(H(u)^{-c_5} + Y_\varepsilon^{-1}\Big). \tag{6.76}$$

证明　这由 (6.50) 和 (6.52) 立得. □

推论 6.15　设 $\varepsilon>0$. 对 (H_ε) 中的 x,y, 有

$$\Phi(x,y) = \big(x\omega(u)-y\big)\frac{\mathrm{e}^{\gamma}}{\zeta(1,y)} + O\bigg(\frac{x\varrho(u)}{\ln^2 y}\Big\{H(u)^{-c_6}+Y_\varepsilon^{-1}\Big\}\bigg). \tag{6.77}$$

证明 (6.77) 的余项与 (6.50) 中第一个上界估计一致. 于是只须证明将 $\Phi(x,y)$ 换成 $W(x,y)$ 后 (6.77) 仍成立. 由 (6.53), 有

$$W(x,y)=\big(x\omega(u)-y\big)\frac{\mathrm{e}^{\gamma}}{\zeta(1,y)}-\frac{x\mathrm{e}^{\gamma}}{\zeta(1,y)}\int_0^{\infty}\omega'(u-v)y^{-v}\,\mathrm{d}v.$$

由 $\varepsilon=1$ 时的 (6.55) 以及推论 5.15 知, 最后的积分

$$\ll H(u)^{-a}\varrho(u)\int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{1+\xi(u)}}{y}\right)^{v}\mathrm{d}v\ll\frac{H(u)^{-a}\varrho(u)}{\ln y},$$

这是因为, 比如在 (H_ε) 中, 只要 x 足够大 (于是只要 y 足够大), $\mathrm{e}^{1+\xi(u)}\leqslant\sqrt{y}$ 就成立. 这便推出 (6.77). □

推论 6.16 对 $x\geqslant 2y\geqslant 5$ 一致地有

$$\Phi(x,y)=\frac{\mathrm{e}^{\gamma}\{x\omega(u)-y\}}{\zeta(1,y)}\left\{1+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-u/3}}{\ln y}\Big)\right\}. \tag{6.78}$$

证明 在命题假设下不难验证 $x\omega(u)-y\gg x$. 于是当 (x,y) 在 (H_ε) 中时, 由 (6.77) 可推出 (大大超过) 命题. 在相反的情形, 由 (6.53) 和(6.54) 得

$$W(x,y)-\big(x\omega(u)-y\big)\frac{\mathrm{e}^{\gamma}}{\zeta(1,y)}\ll\Psi(x,y)\ll\frac{x\mathrm{e}^{-u/3}}{(\ln y)^2},$$

其中最后一个估计由定理 5.1 而得. 这便推出命题结论. □

§6.5 Kubilius 模型

这几年来, 脆数和筛数之间的对偶性在数论中的重要性不断增强: 一方面是由于新的理论方法, 其中典则分解起到重要作用; 另一方面则来自它在整数分解问题中的基础性的应用.

算法中的应用与脆数即那些容易分解的整数这一事实有关: 只需验证那些小的素数.

脆数在数论问题中的影响主要来自筛法的发展. 先前提到了① Daboussi (1984) 对素数定理的初等证明, 其中非显然的利用了关于固定的 y 的分解 $n=ab$, 其中 $P^+(a)\leqslant y<P^-(b)$.

许多圆法的进展, 尤其是 Vaughan 和 Wooley 的结果②很大程度上归结于脆数的性质: 脆数集被选为指数和的指标集. 脆数因子分布的良好性质 (比如若 d_j 和 d_{j+1} 是 y-脆数 n 的两个相邻因子, 那么 $d_{j+1}\leqslant yd_j$) 可用来控制某些 Diophantus 方程的解数, 在圆法中解释成某些指数和的 L^p-范数.

① 见 §5.1 的注记.

② 比如见 Vaughan (1997) 的第十二章.

用鞍点法得到的关于筛函数 $\Psi(x,y)$ 和 $\Phi(x,y)$ 的结果在概率数论中也有应用. 这里描述其中之一, 有基础性地位.

设 $n\in\mathbb{N}^*$, $\Omega_n:=\{1,2,\ldots,n\}$, 并令 $\mathcal{T}_y$ 为 Ω_n 中由被素数 $p\leqslant y$ 的幂 p^j 整除的条件所定义的事件构成的 σ-代数. Ω_n 中 $\mathcal{T}_y$-可测的事件是形如

$$E_a:=\{m\leqslant n:m=ab,\,P^-(b)>y\}\qquad(P^+(a)\leqslant y)$$

的集合之并. 于是对 Ω_n 上的经验一致分布测度 ν_n 有

$$\nu_n(E_a)=\frac{1}{n}\Phi\Big(\frac{n}{a},y\Big)\qquad(P^+(a)\leqslant y).$$

$(\Omega_n,\nu_n,\mathcal{T}_y)$ 的一个概率模型是在某抽象概率空间 Ω 上给出 $\pi(y)$ 个分拆

$$\Omega=\bigcup_{j\geqslant 0}\omega_{p,j}\qquad(p\leqslant y)$$

以及由集合 $\omega_{p,j}$ 的有限交构成的 σ-代数 $\mathcal{T}_y^*$. 对 $P^+(a)\leqslant y$, 用 $E_a^*:=\bigcap_{p^j\|a}\omega_{p,j}$ 来模拟 E_a, 并将 ν_n 与 Ω 上定义为

$$P_y(\omega_{p,j})=(1-1/p)p^{-j}\qquad(p\leqslant y,\,j\in\mathbb{N})\tag{6.79}$$

的概率相比较, 其中当 $p\neq q$ 时 $\omega_{p,j}$ 与 $\omega_{q,k}$ 独立. 这样便将每个 Ω_n 中的 $\mathcal{T}_y$-可测集 E 对应于 Ω 中的某个 $\mathcal{T}_y^*$-可测集 E^*, 定义为

$$E^*:=\bigcup_{E_a\subset E}E_a^*.$$

Kubilius 容量 $K(n,y)$ 是概率空间 $(\Omega_n,\nu_n,\mathcal{T}_y)$ 和 $(\Omega,P_y,\mathcal{T}_y^*)$ 之间偏差的一种体现, 其定义为

$$K(n,y):=\sup_{E\in\mathcal{T}_y}|\nu_n(E)-P_y(E^*)|,\tag{6.80}$$

从而, 由 (6.79), 将 E 写成 $\cup_{a\in A}E_a$ 后得

$$K(n,y)=\sup_{A\subset S(\infty,y)}\Big|\sum_{a\in A}\Big\{\frac{1}{n}\Phi\Big(\frac{n}{a},y\Big)-\frac{1}{a\zeta(1,y)}\Big\}\Big|.$$

只要对使得 $\nu_n(E)-P_y(E^*)\geqslant 0$ 的那些 A 取上确界即可: 其补集是由将 A 换成 $\overline{A}:=S(\infty,y)\setminus A$ 而得到的, 而这只是将考虑的量变号而已. 这样 $K(n,y)$ 可用形如

$$\sum_{a\in A}\Big\{\frac{1}{n}\Phi\Big(\frac{n}{a},y\Big)-\frac{1}{a\zeta(1,y)}\Big\}$$

的量无限精确地逼近. 显然当

$$A:=\big\{a\in S(\infty,y):\Phi(n/a,y)\geqslant n/(a\zeta(1,y))\big\}$$

时该表达式取最大值, 这附带说明了 (6.80) 中的上确界可达. 于是

$$\begin{aligned}K(n,y)&=\sum_{P^+(a)\leqslant y}\left\{\frac{1}{n}\Phi\Big(\frac{n}{a},y\Big)-\frac{1}{a\zeta(1,y)}\right\}^+\\&=\tfrac12\sum_{P^+(a)\leqslant y}\left\{\left|\frac{1}{n}\Phi\Big(\frac{n}{a},y\Big)-\frac{1}{a\zeta(1,y)}\right|+\frac{1}{n}\Phi\Big(\frac{n}{a},y\Big)-\frac{1}{a\zeta(1,y)}\right\},\end{aligned}$$

从而对任意 $n\in\mathbb{N}$, $y\geqslant 1$, 有

$$K(n,y)=\tfrac12\sum_{P^+(a)\leqslant y}\left|\frac{1}{n}\Phi\Big(\frac{n}{a},y\Big)-\frac{1}{a\zeta(1,y)}\right|. \tag{6.81}$$

Kubilius 模型“基本引理”的经典版本是 Kubilius (1956) 的结果. Barban 和 Vinogradov (1964) 及 Elliott (1979) 断言, 记 $u:=(\ln n)/\ln y$, 有

$$K(n,y)\ll u^{-u/8}+n^{-1/15}. \tag{6.82}$$

值得注意的是 $K(n,y)$ 趋于 0 的阈值, 即 $y=n^{o(1)}$, 与脆数的 Turán–Kubilius 常数趋于 1 的阈值相同, 见 (5.125). 这两个现象都可理解为被小素数指数整除的条件在某种具体形式下的渐近独立性.

从鞍点法得出的 $\Phi(x,y)$ 和 $\Psi(x,y)$ 的估计可用来得到 $K(n,y)$ 一个更好的估计. 该结果可通过下列函数来表达:

$$\Xi(u):=\tfrac12\int_{\mathbb{R}}|\omega(v)-\mathrm{e}^{-\gamma}|\varrho(u-v)\,\mathrm{d}v+\tfrac12\varrho(u). \tag{6.83}$$

这个量是 Arratia 和 Stark (1997) 引进的. 他们证明了对每个固定的 u 有 $\lim_{y\to\infty}K(y^u,y)=\Xi(u)$. 可以证明③

$$\Xi(u)=\varrho(u)2^{u+o(u)}\qquad(u\to\infty), \tag{6.84}$$

所以 $\Xi(u)$ 非常快地趋于 0: 特别地,

$$\Xi(u)\ll u^{-u}\qquad(u\geqslant 1).$$

下列结论是作者 (1999) 的结果.

定理 6.17 设 $n\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{R}$, 使得 $n\geqslant y\geqslant 2$. 对每个 $\varepsilon>0$, 有

$$K(n,y)\ll_\varepsilon \varrho(u)2^{(1+\varepsilon)u}+n^{-1+\varepsilon}, \tag{6.85}$$

其中 $u:=(\ln n)/\ln y$. 另外, 对每个 $\varepsilon>0$, 关系

$$K(n,y)=\Xi(u)\Big\{1+O\Big(\frac{\ln(u+1)+2^{-u}\ln_2 y}{\ln y}\Big)\Big\}+O\Big(\frac{\varrho(u/2)^2}{\exp\{(\ln y)^{3/2-\varepsilon}\}}\Big) \tag{6.86}$$

③ Tenenbaum (1999) 给出了一个更细的估计.

在区域

$$(H_\varepsilon) \qquad n \geqslant 3, \qquad \exp\{(\ln_2 n)^{5/3+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant n$$

上一致成立.

如同作者在同一工作中所证明的, 不能将 (6.85) 右边中出现的两个 ε 中的任一个换成 0. 特别地, 从 (6.85) 中可推出 (6.82) 几乎最优的改进:

$$K(n,y) \ll_\varepsilon u^{-u} + n^{-1+\varepsilon} \qquad (n \geqslant y \geqslant 2), \tag{6.87}$$

同时由 (6.86) 推出对任意 $\varepsilon > 0$ 渐近公式

$$K(n,y) = \Xi(u)\Big\{1 + O\Big(\frac{\ln_2 y}{\ln y}\Big)\Big\} \tag{6.88}$$

在区域

$$(G_\varepsilon) \qquad n \geqslant 3, \qquad \exp\{(\ln n)^{2/5+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant n$$

上成立.

注记

§6.3 如同定理 6.8 证明中所提到的, Buchstab 函数 $\omega(u)$ 精细的渐近性质与方程

$$\mathrm{e}^\zeta = 1 - u\zeta \tag{6.89}$$

有关. 正如 (6.10) 那样, 方程 (6.89) 有无穷多个复根, 靠近直线 $\Re e\,\zeta = \xi(u)$. 然而, 对 $u > 1$, (6.10) 有唯一的非零正实根, 并由此而具基础地位; 而 (6.89) 却没有非显然实根, 是其与实轴最近的共轭复根可用来详细描述 $\omega(u)$ 的渐近性质, 其中对 “好” 的积分坐标用了鞍点法. 用④ $\zeta_0(u)$ 和 $\zeta_{-1}(u) = \overline{\zeta_0(u)}$ 表示这些根. Hildebrand 和 Tenenbaum (1993a) 证明了, 对足够大的实数 u, $\zeta_0(u)$ 是 (6.89) 满足

$$|\zeta_0(u) - \xi(u) + \mathrm{i}\pi| \leqslant \pi$$

的唯一解, 并且实际上有

$$\zeta_0(u) = \xi(u) + \frac{\pi^2}{2\xi(u)^2} - \mathrm{i}\frac{\pi\xi(u)}{\xi(u)-1} + O\Big(\frac{1}{\xi(u)^3}\Big). \tag{6.90}$$

$$u\zeta_0'(u) = \frac{-\zeta_0(u)}{\zeta_0(u)-1} + O\Big(\frac{1}{u\xi(u)}\Big) = \frac{-\xi(u)+\mathrm{i}\pi}{\xi(u)-1-\mathrm{i}\pi} + O\Big(\frac{1}{\xi(u)^3}\Big). \tag{6.91}$$

④ 根据 Hildebrand 和 Tenenbaum (1993) 引进的记号.

接下来令

$$\Phi(u) := \frac{\exp\{-u\zeta_0(u) - I(\zeta_0(u))\}}{\zeta_0(u)\sqrt{2\pi u\{1 - 1/\zeta_0(u)\}}}. \tag{6.92}$$

Hildebrand (1990) 证明了

$$\omega(u) - \mathrm{e}^{-\gamma} = -2\mathrm{e}^{-\gamma}R(u)\{\cos\vartheta(u) + O(1/u)\}, \tag{6.93}$$

其中 $R(u) := |\Phi(u)|$, $\vartheta(u) := \arg\Phi(u)$. 正如作者 (1999) 所证明的, 该关系容易由 Hildebrand 和 Tenenbaum (1993a) 一般理论而得, 该理论提供了一些附加信息, 特别是公式

$$R(u) = \varrho(u)\exp\left\{\frac{-\pi^2 u}{2\xi(u)^2} + O\Big(\frac{u}{\xi(u)^3}\Big)\right\} \tag{6.94}$$

和

$$\vartheta'(u) = \frac{\pi\xi(u)}{\xi(u) - 1} + O\Big(\frac{1}{\xi(u)^3}\Big) = 2\pi\Big(1 + \frac{1}{\ln u}\Big) + O\Big(\frac{\ln_2 u}{(\ln u)^2}\Big). \tag{6.95}$$

同样应注意到 R 严格单调下降：这容易由 (6.92) 而得.

公式 (6.93) 和 (6.95) 推出 $\omega(u) - \mathrm{e}^{-\gamma}$ 变号无穷次. 如同 Hildebrand (1990) 所证明的, 若 λ_n 表示该量的第 n 个零点, 从 (6.95) 可得出

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = 1 - \frac{1}{\ln n} + O\Big(\frac{\ln_2 n}{(\ln n)^2}\Big).$$

这些结果在形如

$$uf'(u) + af(u) + bf(u-1) = 0, \qquad a, b \text{ 为任意复数}$$

的微分差分方程一般解情形的推广见 Hildebrand 和 Tenenbaum (1993a).

§6.4 用 $\omega(u)$ 的 k 阶 Taylor–Lagrange 展式⑤ 可对公式 (6.53) 作如下推广.

引理 6.18 设 $\omega_{mj} := \omega^{(j)}(m) - \omega^{(j)}(m-)$ $(j \geqslant 0, 1 \leqslant m \leqslant j+1)$. 对任意整数 $k \geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}\mu_y(u)\ln y = &\sum_{0\leqslant j\leqslant k}\frac{(-1)^j\omega^{(j)}(u)}{(\ln y)^j} + \sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant k+1\\ m\leqslant u}} y^{m-u}\sum_{m-1\leqslant j\leqslant k}\frac{(-1)^{j+1}\omega_{mj}}{(\ln y)^j}\\ &+\frac{(-1)^{k+1}}{(\ln y)^k}\int_0^\infty \omega^{(k+1)}(u-v)y^{-v}\,\mathrm{d}v.\end{aligned} \tag{6.96}$$

⑤ 见 Tenenbaum (1990), 引理 6.

这可用来精细化推论 6.15, 在区域 (H_ε)上给出 $\Phi(x,y)$ 对 $1/\ln y$ 的渐近展式. 事实上, 容易证明在该区域内 (6.96) 中的积分

$$\ll_k \frac{\varrho(u)}{\ln y} H(u)^{-c}.$$

如同 (6.93) 和 (6.94) 说明了定理 6.8 除差一个 $H(u)$ 的指数外最优那样, 可类似地证明推论 6.15 基本上是最优的, 见 Friedlander, Granville, Hildebrand 和 Maier (1991). 在该文章中, 作者们研究了 $\Phi(x,y) - x/\zeta(1,y)$ 的变号, 得出素数分布的振荡定理. 这个有点令人惊讶的相关性的基础思想源于 Maier (1985). 也见 Hildebrand 和 Maier (1989) 以及 Friedlander 和 Granville (1989).

定理 6.10 比 de Bruijn (1950) 的经典结果

$$\Phi(x,y) = W(x,y) + O\Big(\frac{x}{L_\varepsilon(y)}\Big) \qquad (x \geqslant y \geqslant 2) \tag{6.97}$$

要显著精细. 当 (x,y) 在 (H_ε) 中时这是显然的. 在相反情形, 定理 6.10 的余项 $O\big(\Psi(x,y)\big)$ 当然

$$\ll x\mathrm{e}^{-L_\varepsilon(y)}.$$

可以证明引理 6.12 对 $x \geqslant y \geqslant \ln x$ 成立, 只要将 α_0 换成方程 (6.5) 的解 $\alpha(x,y)$, 见 Hildebrand 和 Tenenbaum (1986) 引理 8, 以及 Tenenbaum (1990) 引理 1 的推论.

下述结果是定理 6.10 的细化. 回顾记号 (6.47), (6.48) 和 (6.49).

定理 6.19 (Tenenbaum, 1999) 设 $\varepsilon > 0$. 对 $x \geqslant y \geqslant 2$ 一致地有

$$\Phi(x,y) = W(x,y) + O(E(x,y)), \tag{6.98}$$

其中

$$E(x,y) := \begin{cases} xR(u)/L_\varepsilon(y) + x\varrho(u)/Y_\varepsilon, & \text{若 } (x,y) \in (H_\varepsilon), \\ \Psi(x,y), & \text{若以上不然}. \end{cases} \tag{6.99}$$

推论 6.20 (Tenenbaum, 1999) 设 $\varepsilon > 0$. 对 $(x,y) \in (H_\varepsilon)$ 一致地有

$$\Phi(x,y) = \frac{x}{\zeta(1,y)} + O\Big(\frac{xR(u)}{\ln y} + \frac{x\varrho(u)}{Y_\varepsilon}\Big), \tag{6.100}$$

$$\Phi(x,y) = \frac{\mathrm{e}^\gamma\{x\omega(u) - y\}}{\zeta(1,y)} + O\Big(\frac{xR(u)\ln(u+1)}{(\ln y)^2} + \frac{x\varrho(u)}{Y_\varepsilon}\Big). \tag{6.101}$$

同一文章中证明的定理 6.19 的第二个推论与函数 $\ln P^-(n)$ 有关. 与其对偶的关于 $\ln P^+(n)$ 的结论精确化了 de Bruijn (1951b) 的渐近公式, 在习题 290 中证明. 该推论的基本意义是用一个具体例子说明利用 (6.98) 主项

$W(x,y)$ 特性的各种可能性[⑥]. 容易用该技巧来得到一大类形如 $f(P^-(n))$ 的数论函数均值的具体计算. 令

$$A := \frac{1+\gamma}{\mathrm{e}^\gamma} + \int_1^\infty \{\omega(t) - \mathrm{e}^{-\gamma}\}\frac{\mathrm{d}t}{t} + \sum_p \Big\{\frac{\ln p}{(p-1)\zeta(1,p)} + \mathrm{e}^{-\gamma}\ln\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big\}.$$

推论 6.21 设 $\varepsilon > 0$. 对 $x \geqslant 2$ 一致地有

$$\sum_{1<n\leqslant x} \ln P^-(n) = \mathrm{e}^{-\gamma} x \ln_2 x + Ax + O\Big(x\mathrm{e}^{-(\ln x)^{3/8-\varepsilon}}\Big).$$

§6.5 §6.3 注记中描述的 $\omega(u) - \mathrm{e}^\gamma$ 的估计可用来对 (6.83) 中定义的 $\Xi(u)$ 作渐近估计, 尤其是得到 (6.84).

定理 6.17 中给出的 Kubilius 容量 $K(n,y)$ 的估计基本上归结到 Hildebrand 关于 $\Psi(x,y)$ 的公式 (5.83) 以及关于 $\Phi(x,y)$ 的推论 6.20.

定理 6.17 可有许多应用. 这里讲述其中两个.

第一个是 Elliott (1980) 定理 12.5 的加强. 回顾两个分布函数 F 和 G 的 Lévy 距离 $L(F,G)$ 定义为

$$L(F,G) := \inf\{\delta > 0 : F(z-\delta) - \delta \leqslant G(z) \leqslant F(z+\delta) + \delta \ (\forall z \in \mathbb{R})\}.$$

推论 6.22 (Tenenbaum, 1999) 设 f 为实加性函数. 对任意 $N \geqslant 1$, 设 A_N, B_N 为实数, 满足 $B_N > 0$. 令

$$F_N(z) := \nu_N(f(n) \leqslant A_N + zB_N), \qquad G_N(z) := P(Z_{f,N} \leqslant A_N + zB_N),$$

其中 $Z_{f,N}$ 表示 (3.8) 中定义的随机变量, 那么对任意 $\varepsilon > 0$ 且对 $0 < h < 1$, $2 \leqslant y \leqslant N$ 一致地有

$$L(F_N, G_N) \ll_\varepsilon \sum_{\substack{y<p\leqslant N \\ |f(p^\nu)|>hB_N/u}} \sum_{\nu\geqslant 1} \frac{1}{p^\nu} + h + \varrho(u)2^{(1+\varepsilon)u} + N^{-1+\varepsilon}. \tag{6.102}$$

第二个应用是关于函数

$$\Theta(x,y,z) := |\{n \leqslant x : n_y > z\}|$$

的, 其中 n_y 是 n 最大的 y-脆因子. Erdős 的一般整数素因子双重指数增加律 (可见定理 3.10) 预示了只要 $\ln z$ 相对于 $\ln y$ 较大, $\Theta(x,y,z)$ 便相对于 x 来说较小; 而且在第 500 页习题 293 中得到该量的一个上界估计. 这里叙述一个更细的结论.

⑥ 相对于脆数的该研究的对偶版本见 Tenenbaum 和吴杰 (2007b).

令

$$\begin{aligned}
\lambda_1(w) &:= \int_w^\infty \varrho(t)\,\mathrm{d}t \qquad (w \geqslant 0),\\
\sigma(u,v) &:= \int_v^\infty \varrho(t)\omega(u-t)\,\mathrm{d}t \quad (u \geqslant 1,\, v \geqslant 0),\\
\vartheta(u,v) &:= \varrho(u) + \sigma(u,v) \quad (u \geqslant 1,\, v \geqslant 0),\\
\kappa(u,v) &:= (1-\gamma)\varrho(u-1) + \gamma\varrho(v)\omega(u-v) \quad (u \geqslant 1,\, v \geqslant 0).
\end{aligned}$$

由第五章中 Dickman 函数的估计容易得到

$$\lambda_1(w) = \frac{\varrho(w)}{\ln(w+1)}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\ln(w+1)}\Big)\Big\} \quad (w \geqslant 1). \tag{6.103}$$

由于 $\frac{1}{2} \leqslant \omega(t) \leqslant 1$ $(t \geqslant 1)$ 且 $\varrho(v+h) \gg \varrho(v)\{v\ln(v+1)\}^{-h}$ 对 $0 \leqslant h \leqslant 1 \leqslant v$ 成立, 这说明只要 $u - 1 - v \gg 1/\ln(v+1)$ 便有 $\vartheta(u,v) \asymp \lambda_1(v)$.

定理 6.23 (Tenenbaum, 1999, 2006) 设 $\varepsilon > 0$. 在条件

$$x \geqslant 2, \quad y \geqslant 2, \qquad 1 \leqslant z \leqslant \exp\exp\big\{(\ln y)^{3/5-\varepsilon}\big\} \tag{6.104}$$

下有

$$\Theta(x,y,z) = \Big\{\mathrm{e}^{-\gamma} + O\Big(\frac{\ln(v+2)}{\ln y}\Big)\Big\}x\lambda_1(v) + O\Big(x\varrho(u)2^{(1+\varepsilon)u} + x^\varepsilon\Big), \tag{6.105}$$

其中 $u := (\ln x)/\ln y$, $v := (\ln z)/\ln y$. 若还有 $1 \leqslant z \leqslant x/y$, 则一致地有

$$\Theta(x,y,z) = x\Big\{\vartheta(u,v) - \frac{\kappa(u,v)}{\ln y} + O\Big(\frac{\lambda_1(v)}{\ln y} + \frac{\varrho(v)\ln(v+2)}{(\ln y)^2} + \frac{1}{z}\Big)\Big\}. \tag{6.106}$$

特别地, 若

$$(\ln y)^2 \leqslant z \leqslant \min\Big(x/y^{1+\varepsilon/\ln(u+1)}, \exp\exp\big\{(\ln y)^{3/5-\varepsilon}\big\}\Big),$$

则

$$\Theta(x,y,z) = \Big\{1 + O\Big(\frac{\ln(v+2)}{\ln y}\Big)\Big\}\vartheta(u,v)x. \tag{6.107}$$

注意到条件 $z \leqslant x/y$ 并没有局限性, 这是因为当 $x/y < z \leqslant x$ 时有 $\Theta(x,y,z) = \Psi(x,y) - \Psi(z,y)$.

习题

297. (a) 证明在 (5.1) 的记号下, 下列等式对 $x \geqslant y \geqslant 2$ 成立:

$$\lfloor x \rfloor = \sum_{n \in S(x/y,y)} \Phi(x/n,y) + \Psi(x,y) - \Psi(x/y,y).$$

(b) 应用定理 5.8 和定理 6.4, 由 (a) 推出卷积等式

$$\varrho(u) + \int_0^u \varrho(v)\omega(u-v)\,\mathrm{d}v = 1 \qquad (u \geqslant 0).$$

重证 (6.35).

在下列习题中, 用 $\Psi_k(x,y,z)$ 表示满足

$$\Omega(n;y,z) := \sum_{z<p\leqslant y,\ p^\nu \| n} \nu = k$$

的整数 $n \leqslant x$ 的个数. 令 $x = y^u$, $z = y^\lambda$.

298. 对 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $u \geqslant 0$, 令

$$\vartheta_0(\lambda,u) := \varrho(u/\lambda) + \int_0^u \varrho(v/\lambda)\,\omega(u-v)\,\mathrm{d}v,$$

其中约定 $\vartheta_0(0,u) = 0$.

(a) 证明对 $u \geqslant 1$ 有

$$\vartheta_0(\lambda,u) \leqslant \varrho(u/\lambda) + \lambda\int_0^{(u-1)/\lambda} \varrho(v)\,\mathrm{d}v,$$

从中推出 $\vartheta_0(\lambda,u) \leqslant \mathrm{e}^\gamma\lambda$ 对 $u \geqslant 1$ 成立.

(b) 证明区间估计

$$\frac{1}{2}\lambda \leqslant \vartheta_0(\lambda,u) \leqslant \mathrm{e}^\gamma\lambda \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ u \geqslant 1+\lambda).$$

(c) 证明

$$\lim_{u\to+\infty} \vartheta_0(\lambda,u) = \lambda.$$

299. (a) 证明 Buchstab 恒等式

$$\Psi_0(x,y,z) = \Psi(x,z) + \sum_{y<p\leqslant x} \Psi_0(x/p,p-1,z).$$

(b) 用习题 216 的结果证明对 $y \geqslant z \geqslant 2$, $x \geqslant yz$ 一致地有

$$\Psi_0(x,y,z) = x\vartheta_0(\lambda,u)\big\{1 + O(1/\ln z)\big\}.$$

300. (a) 证明

$$\lambda\frac{\partial\vartheta_0}{\partial\lambda}(\lambda,u) = \vartheta_0(\lambda,u-\lambda) \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ u \geqslant 1).$$

(b) 用习题 299 的 (a) 和 (b) 证明对 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $u \geqslant 1$ 有

$$u\frac{\partial\vartheta_0}{\partial u}(\lambda,u) = \vartheta_0(\lambda,u-1) - \vartheta_0(\lambda,u-\lambda).$$

(c) 证明存在一个绝对常数 A 使得 $\left|\frac{\partial\vartheta_0}{\partial u}(\lambda,u)\right| \leqslant A\lambda\varrho(u)$ 对 $3 \leqslant u \leqslant 4$ 成立, 并从中推出

$$\vartheta_0(\lambda,u) = \lambda\big\{1 + O\big(\varrho(u)\big)\big\} \qquad (u \geqslant 1).$$

301. 逼近 Poisson 分布律. 用公式

$$k\,\vartheta_k(\lambda,u) = \int_\lambda^1 \vartheta_{k-1}(\lambda,u-v)\frac{\mathrm{d}v}{v} \qquad (k \geqslant 1)$$

归纳地定义一列函数 $\{\vartheta_k(\lambda,u)\}_{k=0}^{\infty}$.

用习题 298 和习题 300 的结论, 证明对 $k \geqslant 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $u \geqslant k+1+\lambda$ 有

(a) $\displaystyle\frac{1}{2}\frac{\lambda}{k!}\Big(\ln\frac{1}{\lambda}\Big)^k \leqslant \vartheta_k(\lambda,u) \leqslant \mathrm{e}^\gamma\frac{\lambda}{k!}\Big(\ln\frac{1}{\lambda}\Big)^k$;

(b) $\displaystyle\vartheta_k(\lambda,u) = \frac{\lambda}{k!}\Big(\ln\frac{1}{\lambda}\Big)^k\big\{1 + O\big(\varrho(u-k)\big)\big\}$.

302. 证明在三重条件 $y \geqslant z\big(1 + 1/L_\varepsilon(z)\big)$, $zy^{k+1} \leqslant x$, $k \leqslant \ln(1/\lambda)L_\varepsilon(z)$ 下一致地有

$$\Psi_k(x,y,z) = x\vartheta_k(\lambda,u)\big\{1 + O(1/\ln z)\big\}.$$

303. (a) 证明若 $u < k\lambda$ 则 $\vartheta_k(\lambda,u) = 0$.

(b) 推出对 $0 < \lambda \leqslant 1$, $u > 0$ 有 $\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta_k(\lambda,u) = 1$.

(c) 对 $\lambda \leqslant u \leqslant 1$ 令 $\kappa(\lambda,u) := 1/u$; 否则令 $\kappa(\lambda,u) := 0$. 证明

$$k!\vartheta_k(\lambda,u) = \kappa^{*k} * \vartheta_0(\lambda,u),$$

其中卷积相对于变量 u.

(d) 计算 Laplace 变换 $\widehat{\kappa}_\lambda(s) := \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-us}\kappa(\lambda,u)\,\mathrm{d}u$, 并由 (b) 推出

$$\widehat{\vartheta}_0(\lambda,s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-us}\vartheta_0(\lambda,u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{s}\exp\Big\{-\int_{\lambda s}^{s}\mathrm{e}^{-v}\frac{\mathrm{d}v}{v}\Big\}.$$

(e) 用习题 298 中给出的 $\vartheta_0(\lambda,u)$ 的定义重新得到上述结论.

304. 用 Y 表示 Heaviside 函数, 即 $Y(u) := \mathbf{1}_{[0,\infty[}(u)$ $(u \in \mathbb{R})$.

(a) 证明对 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $u \geqslant 0$ 有

$$\vartheta_0(\lambda,u) = \sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{k!}(\kappa^{*k} * Y)(\lambda,u).$$

从中推出, 对任意 $k \geqslant 0$, 有

$$\vartheta_k(\lambda,u) = \frac{1}{k!}\sum_{j\geqslant 0}\frac{(-1)^j}{j!}F_{k+j}(\lambda,u),$$

其中

$$F_0(\lambda,u)=1,\quad F_k(\lambda,u)=\int_{\substack{[\lambda,1]^k\\ v_1+\cdots+v_k\leqslant u}}\frac{\mathrm{d}v_1}{v_1}\cdots\frac{\mathrm{d}v_k}{v_k}.$$

(b) 重新得到习题 300(a) 中的函数方程.

305. 设 $\widehat{\varrho}_\lambda(s):=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-us}\varrho(u/\lambda)\,\mathrm{d}u$. 证明对 $s\neq 0$ 有

$$s\widehat{\varrho}(s)\widehat{\vartheta}_0(\lambda,s)=\widehat{\varrho}_\lambda(s)=\lambda\widehat{\varrho}(\lambda s),$$

并推出卷积关系

$$\int_0^u \vartheta_0(\lambda,v)\varrho(u-v)\,\mathrm{d}v=\lambda\int_0^{u/\lambda}\varrho(v)\,\mathrm{d}v.$$

306. (a) 证明对任意 $\xi\in\mathbb{C}$ 有

$$\sum_{k\geqslant 0}\vartheta_k(\lambda,u)\xi^k=\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}F_k(\lambda,u)(\xi-1)^k,$$

其中函数 $F_k(\lambda,u)$ 在习题 304 中定义.

(b) 推出对任意 $\xi\geqslant 1$ 有

$$\sum_{k\geqslant\xi\ln(1/\lambda)}\vartheta_k(\lambda,u)\leqslant\lambda^{Q(\xi)}\qquad\big(Q(\xi):=\xi\ln\xi-\xi+1\big).$$

307. 令 $\widehat{\vartheta}_k(\lambda,s):=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-us}\vartheta_k(\lambda,u)\,\mathrm{d}u$.

(a) 用习题 303 中证明的表达式, 写出 $\widehat{\vartheta}_0(\lambda,s)$ 在 $s=0$ 处的一阶展式.

(b) 证明 $\int_0^\infty\big\{\vartheta_0(\lambda,u)-\lambda\big\}\,\mathrm{d}u=\lambda(1-\lambda)$.

(c) 计算 $\widehat{\vartheta}_k(\lambda,s)$, 并写出其在 $s=0$ 处的一阶展式.

(d) 证明对 $k\geqslant 1$ 有

$$\int_0^\infty\left\{\vartheta_k(\lambda,u)-\frac{\lambda}{k!}\Big(\ln\frac{1}{\lambda}\Big)^k\right\}\mathrm{d}u=\frac{\lambda(1-\lambda)}{k!}\Big(\ln\frac{1}{\lambda}\Big)^{k-1}\Big\{\ln\frac{1}{\lambda}-k\Big\}.$$

参考文献

K. Alladi,

1982. The Turán–Kubilius inequality for integers without large prime factor, *J. reine angew. Math.* **335**, 180–196.

1988. Probabilistic Number Theory and Brun's sieve, in : C. Goldstein (ed.), *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1986-87*, Prog. Math. 75 (Birkhäuser), 1–26.

1987. An Erdős-Kac theorem for integers free of large prime factors, *Acta Arithmetica* **49**, 81–105.

K. Alladi & P. Erdős,

1977. On an additive arithmetic function, *Pacific J. Math.* **71**, n° 2, 275–294.

1979. On the asymptotic behavior of large prime factors of integers, *Pacific J. Math.* **82**, n° 2, 295–315.

E. Aparicio Bernardo,

1981. Sobre unas sistemas de números algebraicos de D. S. Gorshkov y sus aplicaciones al cálculo, *Revista Matematica Hispano-Americana* **41**, 3–17.

R. Arratia & D. Stark,

1997. A total variation distance invariance principle for primes, permutations and Poisson-Dirichlet, Manuscrit.

A. Axer,

1910. Beitrag zur Kenntnis der zahlentheoretischen Funktionen $\mu(n)$ und $\lambda(n)$ *Prace mat.-fiz.* **21**, 65-95.

R. Ayoub,

1963. *An introduction to the analytic theory of numbers*, AMS Math. Surveys 10 (Providence).

G.J. Babu,

1973. Some results on the distribution of additive arithmetic functions, II, *Acta Arith.* **23**, 315–328.

1992. Smoothness of the distributions of arithmetic functions, in: F. Schweiger & E. Manstavičius (eds.), *Analytic and probabilistic methods in number theory*, New Trends in Probab. and Statist. 2, 191-199, VSP/TEV.

C.G. Bachet, sieur de Méziriac,

1624. *Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres*, 2nde édition ; 1ère édition : 1612.

M. Balazard,

1987. *Sur la répartition des valeurs de certaines fonctions arithmétiques*, Thèse, Université de Limoges.

1990. Unimodalité de la distribution du nombre de diviseurs premiers d'un entier, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), **40**, n° 2, 255–270.

M. Balazard, H. Delange & J.-L. Nicolas,

1988. Sur le nombre de facteurs premiers des entiers, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **306**, Série I, 511–514.

M. Balazard & A. Smati,

1990. Elementary proof of a theorem of Bateman, in: B. Berndt, H. Diamond, H. Halberstam & A. Hildebrand (eds.), *Analytic Number Theory* (Urbana, 1989), Prog. Math. 85, 41–46 (Birkhäuser).

M. Balazard & G. Tenenbaum,

1998. Sur la répartition des valeurs de la fonction d'Euler, *Compositio Math.* **110**, n° 2, 239–250.

P. Bateman,

1972. The distribution of values of the Euler function, *Acta Arith.* **21**, 329–345.

M.B. Barban & A.I. Vinogradov,

1964. On the number theoretic basis of probabilistic number theory, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **154**, 495-496 = *Soviet Math. Doklady* **5** (1964), 96–98.

F. Behrend,

1935. On sequences of numbers not divisible one by another, *J. London Math. Soc.* **10**, 42–44.

A.C. Berry,

1941. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates, *Trans. Amer. Math. Soc.* **49**, 122–136.

A.S. Besicovitch,

1934. On the density of certain sequences, *Math. Annalen* **110**, 336–341.

N.H. Bingham, C.M. Goldie & J.L. Teugels,

1987. *Regular variation*, Cambridge University Press.

A. Blanchard,

1969. *Initiation à la théorie analytique des nombres premiers*, Dunod, Paris.

H. Bohr,

1910. *Bidrag til de Dirichlet'ske Raekkers Theori*, Thèse, Copenhagen (= Collected Mathematical Works III, S1).

1935. Ein allgemeiner Satz über die Integration eines trigonometrischen Polynoms, *Prace Matem. Fiz.*, 273–288 (= Collected Mathematical Works II, C 36).

E. Bombieri,

1965. On the large sieve, *Mathematika* **12**, 201–225.

1974. Le grand crible dans la théorie analytique des nombres, *Astérisque* **18** (Société mathématique de France).

E. Bombieri & H. Davenport,

1966. Small differences between prime numbers, *Proc. Roy. Soc.* Ser. A **293**, 1–18.

E. Bombieri & H. Iwaniec,

1986. On the order of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sc.* (4) **13**, 449–472.

J.D. Bovey,

1977. On the size of prime factors of integers, *Acta Arith.* **33**, 65–80.

R. de la Bretèche & G. Tenenbaum,

2002. Sur les lois locales de la répartition du k-ième diviseur d'un entier, *Proc. London Math. Soc.* (3) **84**, 289–323.

2005a Propriété statistiques des entiers friables, *Ramanujan J.* **9**, 139–202.

2005b Entiers friables : inégalité de Turán–Kubilius et applications, *Invent. Math.* **159**, 531–588.

S. Brlek, M. Mendès France, J.M. Robson & M. Rubey,

2004. Cantorian Tableaux and Permanents, *L'Enseignement Mathématique* **50**, 524–542.

N.G. de Bruijn,

1950. On the number of uncancelled elements in the sieve of Eratosthenes, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch.* **53**, 803–812.

1951a The asymptotic behaviour of a function occurring in the theory of primes, *J. Indian Math. Soc.* (N.S.) **15**, 25–32.

1951b On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.* A **54**, 50–60.

1966. On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.* A **69**, 239–247 = *Indag. Math.* **28**, 239–247.

1970. *Asymptotic methods in Analysis*, North Holland (Amsterdam), 3° éd.; réimpression : Dover (New York), 1981.

N.G. de Bruijn, C. van Ebbenhorst Tengbergen & D. Kruyswijk,

1949–51. On the set of divisors of a number, *Nieuw Arch. f. Wisk. Ser. II* **23**, 191–193.

V. Brun,

1917. Sur les nombres premiers de la forme $ap + b$, *Arkiv. for Math. og Naturvid.* B **34**, n° 14, 9 pp.

1919a Le crible d'Ératosthène et le théorème de Goldbach, *C. R. Acad. Sci. Paris* **168**, 544–546.

1919b La série $1/5+1/7+1/11+1/13+1/17+1/19+1/29+1/31+1/41+1/43+1/59+1/61+\ldots$ où les dénominateurs sont nombres premiers jumeaux est convergente ou finie, *Bull. Sci. Math.* (2) **43** 100–104; 124–128.

1922. Das Sieb des Eratosthenes, *5 Skand. Mat. Kongr., Helsingfors* 197–203.

1924. Untersuchengen über das Siebverfahren des Eratosthenes, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **33**, 81–96.

1967. Reflections on the sieve of Eratosthenes, *Norske Vid. Selsk. Skr.* (Trondheim) n° 1, 9 pp.

A.A. Buchstab,

1937. An asymptotic estimation of a general number-theoretic function, *Mat. Sbornik* (2) **44**, 1239–1246.

D.A. Burgess,

1962. On character sums and $\mathcal{L}$-series, I, *Proc. London Math. Soc.* **12**, 193–206.

1963. On character sums and $\mathcal{L}$-series, II, *Proc. London Math. Soc.* **13**, 524-536.

E. Cahen,

1894. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues, *Ann. Éc. Norm.* (Ser. 3) **11**, 75–164.

F. Carlson,

1922. Contributions à la théorie des séies de Dirichlet, Note I, *Ark. för Mat., Astron. och Fys.* **16**, 18–19.

H. Cartan,

1961. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann (Paris).

E.D. Cashwell & C.J. Everett,

1959. The ring of number theoretic functions, *Pacific J. Math.* **9**, 975–985.

J.-R. Chen,

1983. The exceptional set of Goldbach numbers (II), *Sci. Sinica* **26**, 714–731.

S. Chowla,

1950. A new proof of a theorem of Siegel, *Ann. of Math. (2)* **51**, 120–122.

E. Cohen,

1960. Arithmetical functions associated with the unitary divisors of an integer, *Math. Z.* **74**, 66–80.

1964. Some asymptotic formulas in the theory of numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.* **112**, 214–227.

J.B. Conrey,

1989. More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line, *J. reine angew. Math.* **399**, 1–26.

J.G. van der Corput,

1921. Zahlentheorische Absch妕zungen, *Math Ann.* **8**,53–79.

1922. Verschärferung der Abschätzung beim Teilerproblem, *Math. Annalen* **87**, 39–65.

1923. Neue zahlentheoretische Abschätzungen, erste Mitteilung, *Math. Annalen* **89**, 215–254.

1928a Zum Teilerproblem, *Math. Annalen* **98**, 697–716.

1928b Zahlentheoretische Abschätzungen, mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme, *Math. Z.* **28**, 301–310.

1929. Neue Zahlentheoretische Abschätzungen, zweite Mitteilung, *Math. Z.* **29**, 397–426.

1931. Diophantishe Ungleichungen I. Zur Gleichverteilung modulo Eins, *Acta Math.* **56**, 373–456.

1936–37. Über Weylsche Summen, *Mathematica B*, 1–30.

H. Cramér,

1970. *Random variables and probability distributions*, 3-ième éd., Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics n° 36, Cambridge.

H. Daboussi,

1974. Voir : Daboussi & Delange (1974).

1979. On the density of direct factors of the set of positive integers, *J. London Math. Soc.* (2) **19**, 21–24.

1981. On the limiting distribution of non-negative additive functions, *Compositio Math.* **43**, 101–105.

1982. La méthode de convolution, *Théorie élémentaire et analytique des nombres* (J. Coquet éd.), Journées SMF–CNRS de Valenciennes, Dép. Math. Univ. Valenciennes, 26–29.

1984. Sur le théorème des nombres premiers, *C. R. Acad. Sc. Paris* **298**, Série I, n° 8, 161–164.

1989. On a convolution method, in : E. Aparicio, C. Calderón & J.C. Peral (eds.), *Congreso de Teoria de los Números (Universitad del País Vasco)*, 110–137.

H. Daboussi & H. Delange,

1974. Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à 1, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.* A **278**, 657–660.

1982. On multiplicative arithmetical functions whose modulus does not exceed one, *J. London Math. Soc.* (2) **26**, 245–264.

1985. On a class of multiplicative functions, *Acta Sci. Math.* **49**, 143–149.

H. Davenport,

1980. *Multiplicative Number Theory* (2nde édition), Springer, New York, Heidelberg, Berlin.

H. Davenport & P. Erdős,

1937. On sequences of positive integers, *Acta Arith.* **2**, 147–151.

1951. On sequences of positive integers, *J. Indian Math. Soc.* **15**, 19–24.

H. Davenport & H. Halberstam,

1966. The values of a trigonometric polynomial at well spaced points, *Mathematika* **13**, 91–96. Corrigendum and Addendum, *Mathematika* **14** (1967), 229–232.

J.-M. De Koninck & G. Tenenbaum,

2002. Sur la loi de répartition du k-ième facteur premier d'un entier, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **133**, 191–204.

H. Delange,

1954. Généralisation du Théorème de Ikehara, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* (3) **71**, fasc. 3, 213–242.

1959. Sur des formules dues à Atle Selberg, *Bull. Sc. Math.* 2° série **83**, 101–111.

1961. Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 3° série, **78**, 273–304.

1971. Sur des formules de Atle Selberg, *Acta Arith.* **19**, 105–146.

1982. Théorie probabiliste des nombres, in : *Journées Arithmétiques*, Metz 1981, *Astérisque* **94**, 31–42.

H. Delange & G. Tenenbaum,

1992. Un théorème sur les séries de Dirichlet, *Mh. Math.* **113**, 99–105.

J.-M. Deshouillers, F. Dress & G. Tenenbaum,

1979. Lois de répartition des diviseurs, 1, *Acta Arith.* **23**, 273–285.

H.G. Diamond,

1982. Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers, *Bulletin (N.S.) of the Amer. Math. Soc.* **7**, 553–589.

1984. A number theoretic series of I. Kasara, *Pacific J. Math.* **111**, n° 2, 283–285.

1988. Review n° 88a : 40006, *Mathematical Reviews.*

H.G. Diamond & H. Halberstam,

1985. The Combinatorial sieve, in : K. Alladi (ed.), *Number Theory*, Proc. 4th Matsci. Conf. Ootacamund, India, 1984, *Springer Lecture Notes* 1122, 63–73.

K. Dickman,

1930. On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude, *Ark. Math. Astr. Fys.* **22**, 1–14.

P.G.L. Dirichlet,

1837. Beweis des Satzes, daß jede unbegrenzte arithmetische Progression,

deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält, *Abh. Akad. Berlin* (math. Abh. 45–71).

F. Dress,

1983-84. Théorèmes d'oscillation et fonction de Möbius, *Séminaire de Théorie des nombres (Bordeaux),* exposé n° 33 (33 pp.).

F. Dress, H. Iwaniec & G. Tenenbaum,

1983. Sur une somme liée à la fonction de Möbius, *J. reine angew. Math.* **340**, 53–58.

Y. Dupain, R.R. Hall & G. Tenenbaum,

1982. Sur l'équirépartition modulo 1 de certaines fonctions de diviseurs, *J. London Math. Soc.* (2) **26**, 397–411.

F.J. Dyson,

1947. The approximation to algebraic numbers by rationals, *Acta Math., Uppsala* **79**, 225-240.

H.M. Edwards,

1974. *Riemann's zeta function*, Pure and Applied Mathematics 58, Academic Press, New York-London, xiii+315 pp.

P.D.T.A. Elliott,

1979. *Probabilistic number theory : mean value theorems*, Grundlehren der Math. Wiss. 239, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.

1980. *Probabilistic number theory : central limit theorems*, Grundlehren der Math. Wiss. 240, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.

1985. *Arithmetic functions and integer products*, Grundlehren der Math. Wiss. 272, Springer-Verlag, Berlin, New York, Tokyo.

1997. *Duality in analytic number theory,* Cambridge Tracts in Mathematics 122, Cambridge University Press, Cambridge.

P.D.T.A. Elliott & C. Ryavec,

1971. The distribution of values of additive arithmetical functions, *Acta Math.* **126**, 143–164.

V. Ennola,

1969. On numbers with small prime divisors, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.* AI **440**, 16 pp.

W.J. Ellison & M. Mendès France,

1975. *Les nombres premiers*, Hermann, Paris.

P. Erdős,

1935. On the normal number of prime factors of $p-1$ and some related problems concerning Euler's φ-function, *Quart. J. Math.* (Oxford) **6**, 205–213.

1935/37/38. On the density of some sequences of numbers I, *J. London Math. Soc.* **10**, 120–125; II, *ibid.***12**, 7–11 ; III, *ibid.***13**, 119–127.

1939. On the smoothness of the asymptotic distribution of additive arithmetical functions, *Amer. J. Math.* **61**, 722–725.

1940. The difference of consecutive primes, *Duke Math. J.* **6**, 438–441.

1946. On the distribution function of additive functions, *Ann. of Math.* **47**, 1–20.

1949. On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci.*] (Washington) **35**, 374–384.

1969. On the distribution of prime divisors, *Aequationes Math.* **2**, 177–183.

1979. Some unconventional problems in number theory, *Astérisque* **61**, 73–82.

P. Erdős & R.R. Hall,

1974. On the distribution of values of certain divisor functions, *J. Number Theory* **6**, 52–63.

P. Erdős, R.R. Hall & G. Tenenbaum,

1994. On the densities of sets of multiples, *J. reine angew. Math.* **454**, 119-141.

P. Erdős & A.E. Ingham,

1964. Arithmetical Tauberian theorems, *Acta Arith.* **9**, 341–356.

P. Erdős & M. Kac,

1939. On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **25**, 206–207.

1940. The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions, *Amer. J. Math.* **62**, 738–742.

P. Erdős & J.-L. Nicolas,

1981a Sur la fonction : nombre de facteurs premiers de N, *Ens. Math.* **27**, 3–27.

1981b Grandes valeurs d'une fonction liée aux produits d'entiers consécutifs, *Ann. Fa. Sci. Toulouse* **3**, 173–199.

1989. Grandes valeurs de fonctions liées aux diviseurs premiers consécutifs d'un entier, in: J.-M. De Koninck & C. Levesque (eds.), *Théorie des nombres/Number Theory*, W. de Gruyter, 169–200.

P. Erdős, B. Saffari & R.C. Vaughan,

1979. On the asymptotic density of sets of integers II, *J. London Math. Soc.* (2) **19**, 17–20.

P. Erdős & A. Sárközy,

1994. On isolated, respectively consecutive large values of arithmetic functions, *Acta Arith.* **66**, 269–295.

P. Erdős, A. Sárközy & E. Szemerédi,

1967. On an extremal problem concerning primitive sequences, *J. London Math. Soc.* **42**, 484–488.

P. Erdős & H.N. Shapiro,

1951. On the changes of signs of a certain error function, *Canad. J. Math.* **3**, 375–385.

P. Erdős & G. Tenenbaum,

1989a Sur les densités de certaines suites d'entiers, *Proc. London Math. Soc.* (3) **59**, 417–438.

1989b Sur les fonctions arithmétiques liées aux diviseurs consécutifs, *J. Number Theory* **31**, 285–311.

P. Erdős & P. Turán,

1948. On a problem in the theory of uniform distribution I, II, *Indag. Math.* **10**, pp. 370–378; *ibid.*]406–413.

P. Erdős & A. Wintner,

1939. Additive arithmetical functions and statistical independence, *Amer. J. Math.* **61**, 713–721.

C.G. Esseen,

1942. On the Liapounoff limit of error in the theory of probability, *Ark. Mat. Astr. Fysik* **28** A, 1–19.

1945. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law, *Acta Math.* **77**, nos. 1–2, 1–125.

1966. On the Kolmogorov–Rogozin inequality for the concentration function, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **5**, 210–216.

T. Estermann,

1948. On Dirichlet's L functions. *J. London Math. Soc.* **23**, 275–279.

J.-H. Evertse, P. Moree, C.L. Stewart & R. Tijdeman,

2003. Multivariate Diophantine equations with many solutions. *Acta Arith.* **107**, n° 2, 103–125.

J. Fatou,

1906. Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.* **30**, 335–400.

W.J. Feller,

1970. *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 1, John Wiley (1ère éd. 1950).

1971. *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 2, John Wiley (1ère éd. 1966).

E. Fouvry & F. Grupp,

1986. On the switching principle in sieve theory, *J. reine angew. Math.* **370**, 101–125.

E. Fouvry & G. Tenenbaum,

1991. Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.*](3) **63**, 449–494.

1996. Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **72** 481-514.

K. Ford,

2007. The distribution of integers with a divisor in a given interval, *Annals of Math.*, à paraître.

K. Ford & H. Halberstam,

2000. The Brun–Hooley sieve, *Journal Number Theory* **81**, n° 2, 335–350.

G. Freud,

1952. Restglied eines Tauberschen Sätzes I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **2**, 299–308.

1953. Restglied eines Tauberschen Sätzes II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3**, 299–307.

1954. Restglied eines Tauberschen Sätzes III, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5**, 275–289.

G. Freud & T. Ganelius,

1957. Some remarks on one sided approximation, *Math. Scand.* **5**, 276–284.

J.B. Friedlander & A. Granville,

1989. Limitations to the equidistribution of primes I, *Ann. Math.* **129**, 363–382.

1993. Smoothing《smooth》numbers, in: R. C. Vaughan (éd.), *Theory and*

applications of numbers without large prime factors, *Phil. Trans. R. Soc. London* A **345**, n° 1676, 339–347.

J.B. Friedlander, A. Granville, A. Hildebrand & H. Maier,

1991. Oscillation theorems for primes in arithmetic progressions and for sifting functions, *J. Amer. Math. Soc.*4, 25–86.

J. Galambos,

1970. Distribution of arithmetical functions. A survey, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)* **6**, 281–305.

1971. On the distribution of strongly multiplicative function, *Bull. London Math. Soc.* **3**, 307–312.

1976. The sequences of prime divisors of integers, *Acta Arith.* **31**, 213–218.

J. Galambos & P. Szüsz,

1986. On the distribution of multiplicative arithmetical functions, *Acta Arith.* **47**, 57–62.

P.X. Gallagher,

1967. The large sieve, *Mathematika* **14**, 14–20.

1970. A large sieve density estimate near $\sigma = 1$, *Invent. Math.* **11**, 329–339.

1972. Sieving by prime powers, in: *Proceedings of the 1972 Number Theory Conference* (Univ. Colorado, Boulder, Colo., 1972), pp. 95–99. Univ. Colorado, Boulder, Colo.

1973/74. Sieving by prime powers, Collection of articles dedicated to Carl Ludwig Siegel on the occasion of his seventy-fifth birthday, V, *Acta Arith.***24**, 491–497.

T. Ganelius,

1971. *Tauberian Remainder Theorems*, Springer Lecture Notes 232.

F.R. Gantmacher,

1966. *Théorie des matrices*, Dunod, Paris.

A. Gelfond,

1946. Comments to the papers 'On the determination of the number of prime numbers not exceeding a given quantity' and 'On prime numbers' (en russe), in: *Collected works of P. L. Chebyshev*, vol. 1, Moscow-Leningrad, 285–288.

A. Gelfond & Y. Linnik,

1948. On Thue's method in the problem of effectiveness in quadratic fields (en russe), *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **61**, 773–776.

1965. *Méthodes élémentaires dans la théorie analytique des nombres*, Gauthier-

Villars, Paris.

D. Goldfeld,

1974. A simple proof of Siegel's theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **71**, 1055.

2004. The elementary proof of the prime number theorem: an historical perspective. Number theory (New York, 2003), 179–192, Springer, New York.

D.A. Goldston, Y. Motohashi, J. Pintz, C.Y. Yıldırım,

2006. Small gaps between primes exist, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **82**, n° 4, 61–65.

D.A. Goldston, J. Pintz, C.Y. Yıldırım,

2006. Primes in tuples, III. On the difference $p_{n+\nu} - p_n$, *Funct. Approx. Comment. Math.* **35**, 79–89.

D.S. Gorshkov,

1959. On the deviation of polynomials with rational integer coefficients from zero on the interval [0, 1] (en russe), in: *Proceedings of the 3rd All-union congress of Soviet mathematicians* (Moscow, 1956), vol. 4, 5–7.

S.W. Graham,

1981a The distribution of squarefree numbers, *J. London Math. Soc.* (2) **24**, 54–64.

1981b On Linnik's constant, *Acta Arith.* **39**, 163–179.

S.W. Graham & G. Kolesnik,

1991. *Van der Corput's method of exponential sums*, London Math. Soc. Lecture Notes 126, Cambridge University Press.

S.W. Graham & J.D. Vaaler,

1981. A class of extremal functions for the Fourier transform, *Trans. Amer. Math. Soc.* **265**, 283–302.

1984. Extremal functions for the Fourier transform and the large sieve, in G. Halász (ed.) *Topics in classical number theory, Colloq. Budapest 1981*, vol. I, Colloq. Math. Soc. János Bolyai 34, 599–615.

A. Granville,

1993. Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions. II, in: R. C. Vaughan (éd.), *Theory and applications of numbers without large prime factors, Phil. Trans. R. Soc. London* A **345**, n°1676, 349–362.

A. Granville & K. Soundararajan,

2003. Decay of mean values of multiplicative functions, *Canad. J. Math.* **55** (2003), n° 6, 1191–1230.

G. Greaves,

2001. *Sieves in number theory,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Résultats en mathématiques et domaines liés (3)], 43, Springer-Verlag, Berlin, 2001. xii+304 pp.

E. Grosswald,

1982. Oscillation theorems, *Conference on the theory of arithmetic functions*, Springer Lecture Notes 251, 141–168.

J. Hadamard,

1896. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, *Bull. Soc. Math. de France* **14**, 199-220.

G. Halász,

1968. Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **19**, 365–403.

1971. On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions, *Studia Scient. Math. Hung.* **6**, 211–233.

1972. Remarks to my paper 'On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions', *Acta Math. Acad. Scient. Hung.* **23**, 425–432.

H. Halberstam & H.-E. Richert,

1974. *Sieve Methods*, Academic Press, London, New York, San Francisco.

1979. On a result of R.R. Hall, *J. Number Theory* (1) **11**, 76–89.

H. Halberstam & K.F. Roth,

1966. *Sequences*, Oxford; 2-nde éd. Springer, 1983.

R.R. Hall,

1970. On the distribution of divisors of integers in residue classes (mod k), *J. Number Theory* **2**, 168–188; Erratum *ibid.* **2**, 509.

1971a On the distribution of divisors of integers in residue classes (mod$k$), II, *J. Number Theory* **3**, 204–209.

1971b On the distribution of divisors of integers in residue classes (mod$k$), III, *J. Number Theory* **3**, 278–287.

1974. Halving an estimate obtained from Selberg's upper bound method, *Acta Arith.* **25**, 347–351.

1978. A new definition of the density of an integer sequence, *J. Austral.*

Math. Soc. Ser. A **26**, 487–500.

1981. The divisor density of integer sequences, *J. London Math. Soc.* (2) **24**, 41–53.

R.R. Hall & G. Tenenbaum,

1982. On the average and normal orders of Hooley's Δ-function, *J. London Math. Soc.*](2) **25**, 392-406.

1986. Les ensembles de multiples et la densité divisorielle, *J. Number Theory* **22**, 308–333.

1988. *Divisors*, Cambridge Tracts in Mathematics 90, Cambridge.

1991. Efffective mean value estimates for complex multiplicative functions, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **110**, 337–351.

G. Hanrot, G. Tenenbaum & J. Wu,

2008. Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 2, *Proc. London Math. Soc.* **96**, (3) 107–135.

D. Hanson,

1972. On the product of primes, *Canad. Math. Bull.* **15**, 33–37.

G.H. Hardy,

1914. Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, *C. R. Acad. Sci. Paris* **158**, 1012–1014.

1916a On Dirichlet's divisor problem, *Proc. London Math. Soc.* **15**, (2) 1–25.

1916b The average orders of the functions $P(x)$ and $\Delta(x)$, *Proc. London Math. Soc.* **15** (2), 192–213.

1949. *Divergent Series*, Oxford at the Clarendon Press.

G.H. Hardy & J.E. Littlewood,

1913. Contributions to the arithmetic theory of series, *Proc. London Math. Soc.* (2) **11**, 411–478.

1921. The zeros of Riemann's zeta function on the critical line, *Math. Z.* **10**, 283–317.

1922. Some problems of partitio numerorum III : On the expression of a number as a sum of primes, *Acta Math.* **44**, 1–70.

1923. The approximate functional equation in the theory of the zeta function, with applications to the divisor problems of Dirichlet and Piltz, *Proc. London Math. Soc.* (2), **21**, 39–74.

1929. The approximate functional equations for $\zeta(s)$ and $\zeta(s)^2$, *Proc. London Math. Soc.* (2) **29**, 81–97.

G.H. Hardy & S. Ramanujan,

1917. The normal number of prime factors of a number n, *Quart. J. Math.* **48**, 76–92.

G.H. Hardy & M. Riesz,

1915. *The general theory of Dirichlet series*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics n° 18, Cambridge University Press; 2-nde impression : 1952.

G.H. Hardy & E.M. Wright,

1938. *An introduction to the theory of numbers*, Oxford (5-ième éd. 1979).

D.R. Heath-Brown,

1992. Zero-free regions for Dirichlet L-functions, and the least prime in an arithmetic progression, *Proc. London Math. Soc.*](3) **64**, n° 2, 265–338.

W. Hengartner & R. Theodorescu,

1973. *Concentration functions*, Academic Press, New York, London.

D. Hensley,

1986a The convolution powers of the Dickman function, *J. London Math. Soc.* (2) **33**, 395–406.

1986b A property of the counting function of integers with no large prime factors, *J. Number Theory* **22**, n° 1, 46–74.

1987. The distribution of round numbers, *Proc. London Math. Soc.* (3) **54**, 412–444.

E. Heppner,

1974. Über die Iteration von Teilerfunktionen, *J. reine angew. Math.* **265**, 176–182.

A. Hildebrand,

1983. An asymptotic formula for the variance of an additive function, *Math. Z.* **183**, 145–170.

1984a Integers free of large prime factors and the Riemann hypothesis, *Mathematika* **31**, 258–271.

1984b Quantitative mean value theorems for non-negative multiplicative functions I, *J. London Math. Soc.* (2) **30**, 394–406.

1984c Fonctions multiplicatives et équations intégrales, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1982–83, *Prog. Math.* **51**, 115–124.

1985. Integers free of large prime factors in short intervals, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **36**, 57–69.

1986a On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, *J. Number Theory* **22**, 289–307.

1986b The prime number theorem via the large sieve, *Mathematatika* **33**, 23–30.

1986c On Wirsing's mean value theorem for multiplicative functions, *Bull. London Math. Soc.* **18**, 147–152.

1986d A note on Burgess' character sum estimate, *C. R. Acad. Sci. Canada* **8**, 35–37.

1986e Multiplicative functions at consecutive integers, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **100**, 229–236.

1986f On the local behavior of $\Psi(x, y)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **297**, 729–751.

1987a Multiplicative functions in short intervals, *Canad. J. Math.*]

1987b Quantitative mean value theorems for non negative mutliplicative functions II, *Acta Arith.* **48**, 209–260.

1990. The asymptotic behavior of the solutions of a class of differential-difference equations, *J. London Math. Soc.*](2) **42**, 11–31.

A. Hildebrand & H. Maier,

1989. Irregularities in the distribution of primes in short intervals, *J. reine angew. Math.* **397**, 162–193.

A. Hildebrand & G. Tenenbaum,

1986. On integers free of large prime factors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296**, 265–290.

1988. On the number of prime factors of an integer, *Duke Math. J.* **56**, n° 3 (1988), 471–501.

1993a On a class of differential-difference equations arising in number theory, *J. d'Analyse* **61**, 145–179.

1993b Integers without large prime factors, *J. Théorie des Nombres de Bordeaux* **5**, 411-484.

C. Hooley,

1979. A new technique and its applications to the theory of numbers, *Proc. London Math. Soc.*](3) **38**, 115–151.

1994. On an almost pure sieve. *Acta Arith.* **66** (1994), n° 4, 359–368.

L. Hörmander,

1954. A new proof and a generalization of an inequality of Bohr, *Math. Scand.* **2**, 33-45.

M.N. Huxley,

1972a On the difference between consecutive primes, *Inventiones Math.* **15**, 164–170.

1972b *The distribution of prime numbers*, Oxford.

1990. Exponential sums and lattice points, *Proc. London Math. Soc.*](3) **60**, 471–502; Corrigenda **66** (1993), 70.

1993a Exponential sums and lattice points, II, *Proc. London Math. Soc.*](3) **66**, 279–301.

1993b Exponential sums and the Riemann zeta function IV, *Proc. London Math. Soc.*](3) **66**, 1–40.

1996. *Area, lattice points, and exponential sums*, London Mathematical Society Monographs, New Series, 13. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York. xii+494 pp.

2003. Exponential sums and lattice points, III, *Proc. London Math. Soc.*](3) **87**, n° 3, 591–609.

2005. Exponential sums and the Riemann zeta function, V. *Proc. London Math. Soc. (3)* **90** (2005), n° 1, 1–41.

M.N. Huxley & G. Kolesnik,

1991. Exponential sums and the Riemann zeta function III, *Proc. London Math. Soc.*](3) **62**, 449–468; Corrigenda **66** (1993), 302.

M.N. Huxley & N. Watt,

1988. Exponential sums and the Riemann zeta function, *Proc. London Math. Soc.*](3) **57**, 1–24.

S. Ikehara,

1931. An extension of Landau's theorem in the analytic theory of numbers, *J. Math. and Phys.*](Mass. Inst. of Techn.) **10**, 1–12.

A.E. Ingham,

1930. Notes on Riemann's ζ-function and Dirichlet's L-functions, *J. London Math. Soc.* **5**, 107–112.

1935. On Wiener's method in Tauberian theorems, *Proc. London Math. Soc.* (2) **38**, 458–480.

1945. Some Tauberian theorems connected with the prime number theorem. *J. London Math. Soc.* **20**, 171–180.

1965. On Tauberian theorems, *Proc. London Math. Soc.* (3) **14A**, 157–173.

1990. *The distribution of prime numbers*, Reprint of the 1932 original,

with a foreword by R.C. Vaughan, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge xx+114 pp.

A. Ivić,

1985. *The Riemann zeta-function*, John Wiley, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.

A. Ivić & G. Tenenbaum,

1986. Local densities over integers free of large prime factors, *Quart. J. Math.*](Oxford), (2) **37**, 401–417.

H. Iwaniec,

1978. On the problem of Jacobsthal, *Demonstratio Math.* **11**, n° 1, 225–231.

1980a Rosser's sieve, *Acta Arith.* **36**, 171–202.

1980b A new form of the error term in the linear sieve, *Acta Arith.* **37** (1980), 307–320.

1981. Rosser's sieve—Bilinear Forms of the Remainder Terms—Some applications, in : H. Halberstam & C. Hooley (eds.), *Recent Progress in Analytic Number Theory*, Academic Press, London, New York, Toronto, Sydney, San Francisco, vol. 1, 203–230.

H. Iwaniec & C.J. Mozzochi,

1988. On the divisor and circle problems, *J. Number Theory* **29**, 1, 60–93.

B. Jessen & A. Wintner,

1935. Distribution functions and the Riemann Zeta function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **38**, 48–88.

C.-H. Jia,

1993. The distribution of square-free numbers, *Sci. Sinica Ser. A* **36**, (2) 154–169.

J. Johnsen,

1971. On the large sieve method in $GF(q,x)$, *Mathematika* **18**, 172–184.

J. Kaczorowski & J. Pintz,

1986–7. Oscillatory properties of arithmetical functions, I, *Acta Math. Hung.* **48**, 173–185; II, *ibid.* **49**, 441–453.

J.-P. Kahane & H. Queffélec,

1997. Ordre, convergence et sommabilité de produits de séries de Dirichlet, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **47**, 2 (1997), 485–529.

T. Kamae & M. Mendès France,

1978. Van der Corput's difference theorem, *Israel J. Math.* **31**, 335–342.

J. Karamata,

1931. Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjesche Transformation betreffen, *J. reine angew. Math.* **164**, 27–39.

1952. Compte rendu de l'article de G. Freud (1952), *Zentralblatt für Math.* **44**, 324.

A.A. Karatsuba,

1981. On the distance between consecutive zeros of the Riemann zeta function that lie on the critical line (en russe), in: *Number theory, mathematical analysis and their applications*, Trudy Mat. Inst. Steklov. 157, 49–63, 235.

Y. Katznelson,

1968. *An introduction to harmonic analysis*, Dover, New York (2° édition, 1976).

S. Kerner,

2002. *Répartition d'entiers avec contraintes sur les diviseurs,* thèse, Univ. Henri–Poincaré Nancy 1.

I. Kobayashi,

1973. A note on the Selberg sieve and the large sieve, *Proc. Japan. Acad.* **49**, 1–5.

G. Kolesnik,

1981. On the estimation of multiple exponential sums, in : H. Halberstam & C. Hooley (eds.) *Recent Progress in Analytic Number Theory* Academic Press, London, New York, Toronto, Sydney, San Francisco, vol. 1, 231–246.

1985. The method of exponent pairs, *Acta Arith.* **45**, 115–143.

A. Kolmogorov,

1956. Two uniform limit theorems for sums of independent random variables, *Theor. Probab. Appl.* **1**, 384–394.

1958. Sur les propriétés des fonctions de concentration de M. P. Lévy, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **16**, n° 1, 27–34.

J. Korevaar,

1954a A very general form of Littlewood's theorem, *Indag. Math.* **16**, 36–45.

1954b Another numerical Tauberian theorem for power series, *Indag. Math.* **16**, 46–56.

1982. On Newman's quick way to the prime number theorem, *The Math. Intelligencer* **4**, (3) 108–115.

2004. *Tauberian theory. A century of developments,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 329, Springer-Verlag, Berlin, xvi+483 pp.

N.M. Korobov,

1958a Estimates of trigonometric sums and their applications (en russe), *Usp. Mat. Nauk.* **13**, 185–192.

1958b Estimates of Weyl sums and the distribution of prime numbers (en russe), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **123**, 28–31.

1958c On zeros of $\zeta(s)$ (en russe), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **118**, 231–232.

J. Kubilius,

1956. Méthodes probabilistes en théorie des nombres (en russe), *Uspehi Mat. Nauk* **11** (n° 2), 31–66 = *Amer. Math. Soc. Transl.* **19** (1962), 47–85.

1964. *Probabilistic methods in the theory of numbers*, Amer. Math. Soc. Translations of Math. Monographs, n° 11, Providence.

1983a Estimation of the central moment for strongly additive arithmetic functions (en russe, résumés en anglais et lituanien.), *Litovsk. Mat. Sb.* **23** (n° 1), 122–133.

1983b Estimate of the second central moment for any additive arithmetic functions (en russe, résumés en anglais et lituanien), *Litovsk. Mat. Sb.* **23** (n° 2), 110–117.

R. Kusmin,

1927. Sur certaines inégalités trigonométriques (en russe), *J. Math.–Phsy. Leningrad* **1**, 233-239.

E. Landau,

1906. Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen, *Sitzungsberichte der mathematische-physikalischen Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München,* **36**, 151–218.

1909. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (2 vols.), Teubner, Leipzig; troisième édition : Chelsea, New York (1974).

1910. Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer, *Prace matematyczno-fizycne (Warszawa)* **21**, 97-177.

1912. Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, *Göttingen Nachrichten*, 687–771.

1918. Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlköper, (German)

Gött. Nachr. 1918, 285-295.

1927. *Vorlesungen über Zahlentheorie* (3 vols; Hirzel, Leipzig). Réimpression par Chelsea, New York, 1969.

1928. Über einer trigonometrische Summen, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1928*, 21–24.

1929. *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, 2° éd., Berlin.

1933. Über den Wertervorrat von $\zeta(s)$ in den Halbebene $\sigma > 1$, *Göttingen Nachrichten*, 81–91

1966. *Elementary Number Theory* (2° éd.) Chelsea; 1° éd. Hirzel, Leipzig, 1927.

E. Landau & A. Walfisz,

1919. Über die Nichtfortsetsbarkeit einiger durch Dirichletsche Reihen definierter Funktionen, *Rendiconti di Palermo* **44**, 82–86.

C. de La Vallée–Poussin,

1896. Recherches analytiques sur la théorie des nombres, 1, *Ann. Soc. Scient. Bruxelles* **20**, 183–256.

J. Lee,

1989. *On the constant in the Turán–Kubilius inequality*, PhD Thesis, Univ. Michigan.

W.J. LeVeque,

1949. On the size of certain number theoretic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **66**, 440–463.

B.V. Levin & N.M. Timofeev,

1971. An analytic method in probabilistic number theory (en russe), *Vladimir. Gos. Ped. Inst. Učen. Zap.* **38**, 57–150.

N. Levinson,

1974. More than one third of the zeros of Riemann's zeta function are on $\sigma = \frac{1}{2}$, *Adv. Math.* **13**, 383–436.

1975. A simplification of the proof that $N_0(T) > \frac{1}{3}N(T)$ for Riemann's zeta-function, *Adv. Math.* **18**, 239–242.

P. Lévy,

1925. *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris.

1931. Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes, *Studia Math.* **3**, 119–155.

1937. Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, Paris

(2-nde éd., 1954).

Ju. V. Linnik,

1941. Le grand crible (en russe), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30**, 292–294.

J.E. Littlewood,

1924. On the zeros of the Riemann Zeta-function, *Cambr. Phil. Soc. Proc.* **22**, 295–318.

1971. The quickest proof of the prime number theorem, *Acta Arith.* **18**, 83–86.

M. Loève,

1963. *Probability Theory*, 2 vols. Springer; 4° éd. 1977.

E. Lukacs,

1970. *Characteristic functions*, 2° éd., Griffin (London).

H. Maier,

1985. Primes in short intervals, *Michigan Math. J.* **32**, 221–225.

H. Maier & C. Pomerance,

1990. Unusually large gaps between consecutive primes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **322**, n° 1, 201–237.

H. Maier & G. Tenenbaum,

1984. On the set of divisors of an integer, *Invent. Math.* **76**, 121–128.

H. von Mangoldt,

1895. Zu Riemann's Abhandlung: "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", *J. reine angew. Math.* **114**, 255–305.

H.B. Mann,

1942. A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers, *Ann. Math.* (2) **43**, 523–527.

M. Mendès France,

2007. Cantorian tableaux revisited, *Funct. Approx. Comment. Math.*, à paraître.

M. Mendès France & G. Tenenbaum,

1993. Systèmes de points, diviseurs, et structure fractale, *Bull. Soc. Math. de France* **121**, 197–225.

F. Mertens,

1874. Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. Über die Vertheilung der Primzahlen, *Borchardt J.* **78**, 46-63.

1898. Über eine Eigenschaft der Riemann's chen ζ-Function, *Wien. Ber.* **107**, 1429-1434.

R.J. Miech,

1969. A number theoretic constant, *Acta Arith.* **15**, 119–137.

H.L. Montgomery,

1968. A note on the large sieve, *J. London Math. Soc.* **43**, 93–98.

1971. *Topics in Multiplicative Number Theory*, Springer Lecture Notes 227, Springer, Berlin, Heidelberg.

1978a The analytic principle of the large sieve, *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* **84**, n° 4, 547–567.

1978b A note on the mean values of multiplicative functions, *Inst. Mittag-Leffler*, Report n° 17.

1987. Fluctuations in the mean of Euler's phi function, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.***97**, nos. 1–3, 239–245.

1994. *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 84, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, by the American Mathematical Society, Providence, RI. xiv+220 pp.

H.L. Montgomery & R.C. Vaughan,

1973. On the large sieve, *Mathematika* **20**, 119–134.

1974. Hilbert's inequality, *J. London Math. Soc.* (2) **8**, 73–81.

1977. Exponential sums with multiplicative coefficients, *Invent. Math.* **43**, 69–82.

1979. Mean values of character sums, *Can. J. Math.* **31**, 476–487.

1981. The distribution of squarefree numbers, in : H. Halberstam & C. Hooley (eds.), *Recent Progress in Analytic Number Theory*, Academic Press ; vol. 1, 247–256.

2001. Mean values of multiplicative functions, *Period. Math. Hungar.* **43** (2001), n°s 1-2, 199–214.

L. Moser & J. Lambek,

1953. On monotone multiplicative functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **4**, 544–545.

M. Ram Murty,

1988. Prime numbers in certain arithmetic progressions, *J. Madras University* **51**, 161–169.

M. Ram Murty & N. Thain,

2006. Prime numbers in certain arithmetic progressions, *Funct. Approx.*

Comment. Math. **35**, 249–259.

Y. Motohashi,

1979. A note on the large sieve. III, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.***55**, n°3, 92–94.

M. Naïmi,

1988. Les entiers sans facteur carré $\leqslant x$ dont les facteurs premiers sont $\leqslant y$, *Groupe de travail en théorie analytique des nombres 1986-87*, 69-76, *Publ. Math. Orsay* 88-01, *Univ. Paris* XI, *Orsay.*

M. Nair,

1982a On Chebyshev-type inequalities for primes, *Amer. Math. Monthly,* **89**, n° 2, 126–129.

1982b A new method in elementary prime number theory, *J. London Math. Soc.* (2) **25**, 385–391.

P. Nanopoulos,

1975. Lois de Dirichlet sur $\mathbb{N}^*$ et pseudo-probabilités, *C. R. Acad. Sci. Paris* **280**, Série A, 1543–1546.

1977. Lois zêta et fonctions arithmétiques additives : loi faible des grand nombres, *C. R. Acad. Sci. Paris* **285**, Série A, 875–877.

1982. Lois zêta et fonctions arithmétiques additives : convergence vers une loi normale, *C. R. Acad. Sci. Paris,* Série I, **295**, 159–161.

D.J. Newman,

1980. Simple analytic proof of the prime number theorem, *Amer. Math. Monthly* **87**, n° 9, 693–696.

J.-L. Nicolas,

1974/75. Grandes valeurs des fonctions arithmétiques, *Sém. de Théorie des Nombres* (Delange-Pisot-Poitou) 16-ième année, n° G20.

1978. Sur les entiers N pour lesquels il y a beaucoup de groupes abéliens d'ordre N, *Ann. Inst. Fourier* **28**, 1–16.

1983a Petites valeurs de la fonction d'Euler, *J. Number Theory* **17**, 375–388.

1983b Autour de formules dues à A. Selberg, *Pub. Math. Orsay* 83-04, Colloque Hubert Delange, 122–134.

1984. Sur la distribution des nombres entiers ayant une quantité fixée de nombres premiers, *Acta Arith.* **44**, 191–200.

1988. On highly composite numbers, in: G. E. Andrews, R. A. Askey, B. C. Berndt, K. G. Ramanathan & R. A. Rankin (eds.), *Ramanujan Revisited*, Academic Press, 215–244.

K.K. Norton,

1971. *Numbers with small prime factors and the least kth power non-residue*, Mem. Amer. Math. Soc. n° 106.

1976. On the number of restricted prime factors of an integer I, *Illinois J. Math.* **20**, 681–705.

1978. Estimates for partial sums of the exponential series, *J. Math. Analysis and Appl.* **63**, 265–296.

1979. On the number of restricted prime factors of an integer II, *Acta Math.* **143**, 9–38.

1982. On the number of restricted prime factors of an integer III, *Enseign. Math.,* II Sér., **28**, 31–52.

E.V. Novoselov,

1964. A new method in probabilistic number theory (en russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR,* Ser. Mat., **28**, 307–364.

A. Oppenheim,

1926. On an arithmetic function, *J. London Math. Soc.* **1**, 205–211.

1927. On an arithmetic function, II, *J. London Math. Soc.* **2**, 123–130.

A. Page,

1935. On the number of primes in an arithmetic progression, (English) *Proc. London math. Soc. (2)* **39**, 116-141.

R.E.A.C. Paley,

1932. A theorem on characters, *J. London Math. Soc.* **7**, 28–32.

D.P. Parent,

1978. *Exercices de théorie des nombres*, Gauthier-Villars.

E. Phillips,

1933. The zeta function of Riemann : further developments of van der Corput's method, *Quart. J. Math.* (Oxford) **4**, 209–225.

J. Pintz,

1984. On the remainder term of the prime number formula and the zeros of Riemann's zeta function, in : H. Jager (ed.), *Number Theory, Noordwijkerhout 1983*, Lecture Notes in Mathematics 1068, Springer, Berlin, 186–197.

1997. Very large gaps between consecutive primes, *J. Number Theory* **63** (1997), n° 2, 286–301.

G. Pólya,

1919. Verschiedene Bemerkungen zur Zahlentheorie, *Jahresber. Deutsch.*

Math.-Ver. **28**, 31–40.

C. Pomerance,

1984. On the distribution of round numbers, in : K. Alladi (ed.), *Number theory*, Proc. 4th Matsci. Conf. Ootacamund, India, 1984, Springer Lecture Notes 1122, 173–200.

1995. The role of smooth numbers in number-theoretic algorithms, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 411–422, Birkhäuser, Basel.

K. Prachar,

1958. Über die kleinste quadratfreie Zahl einer arithmetischen Reihe, *Monatsh. Math.* **62**, 173–176.

S. Ramanujan,

1915. Highly composite numbers, *Proc. London Math. Soc.* (2) **14**, 347–409.

O. Ramaré

2001a A purely anaytical bound for $L(1,\chi)$, prépublication.

2001b Approximate formulae for $L(1,\chi)$, *Acta Arith.* **100**, n°3, 245–266.

2004. Approximate formulae for $L(1,\chi)$, II, *Acta Arith.* **112**, n° 2, 141–149.

R. Rankin,

1938. The difference between consecutive prime numbers, *J. London Math. Soc.* **13**, 242–247.

A. Rényi,

1950. On the large sieve of Ju. V. Linnik, *Compositio Math.* **8**, 68–75.

1955. On the density of certain sequences of integers, *Publ. Inst. Math.* (Belgrade) **8**, 157–162.

1965. A new proof of a theorem of Delange, *Publ. Math. Debrecen* **12**, 323–329.

A. Rényi & P. Turán,

1958. On a theorem of Erdős–Kac, *Acta Arith.* **4**, 71–84.

G.J. Rieger,

1972. Über einige arithmetische Summen, *Manuscripta Math.* **7**, 23–34.

1983. On Wiener's method in prime number theory, *Abstracts Amer. Math. Soc.* **4**, n° 5, Abstract 802-10-86, p. 144; II, *ibid.*, n° 5, Abstract 83 T-10-345, p. 392.

B. Riemann,

1859. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsbe-

richte der Berliner Akademie, 671–680 ; voir : *Œuvres de Riemann*, Albert Blanchard, Paris 1968, 165–176.

M. Riesz,

1909. Sur les séries de Dirichlet et les séries entières. *C. R. Acad. Sci. Paris* **149**, 909–912.

J. Rivat & P. Sargos,

2001. Nombres premiers de la forme $\lfloor n^c \rfloor$, *Canad. J. Math.* **53**, n°2, 414–433.

J. Rivat & G. Tenenbaum,

2005. Constantes d'Erdős–Tur噉, *The Ramanujan Journal* **9**, 111–121.

J. Rivat & J. Wu,

2001. Prime numbers of the form $[n^c]$, *Glasg. Math. J.* **43**, n° 2, 237–254.

B.A. Rogozin,

1961. An estimate for concentration functions, *Theor. Probab. Appl.* **6**, 94–97.

J.B. Rosser & L. Shoenfeld,

1962. Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois J. Math.* **6**, 64–94.
1975. Sharper bounds for the Chebyshev functions $\vartheta(x)$ and $\psi(x)$, *Math. Comp.* **29**, 243–269.

K.F. Roth,

1955. Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **2**, 1–20; corrigendum, 168.
1965. On the large sieves of Linnik and Rényi, *Mathematika* **12**, 1–9.

W. Rudin,

1970. *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill.

I.Z. Ruzsa,

1982. Effective results in probabilistic number theory, in : J. Coquet (ed.), *Théorie élémentaire et analytique des nombres*, Dépt. Math. Univ. Valenciennes, 107–130.
1983. On the variance of additive functions, *Studies in Pure Mathematics*, Mem. of P. Turán, 577–586.
1984. Generalized moments of additive functions, *J. Number Theory* **18**, 27–33.

B. Saffari,

1976. On the asymptotic density of sets of integers, *J. London Math. Soc.* (2) **13**, 475–485.

1979. *Comportement à l'infini de la transformée de Fourier de μ_f pour f (fortement) additive telle que $f(p) = (\log p)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ fixé*, communication privée.

E. Saias,

1989. Sur le nombre des entiers sans grand facteur premier, *J. Number Theory* **32**, n° 1, 78–99.

1993. Entiers sans grand ni petit facteur premier. III, *Acta Arith.* **71**, n°4, 351–379.

A. Sárközy,

1977a Some remarks concerning irregularities of distribution of sequences of integers in arithmetic progressions, IV, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **30**, 155–162.

1977b Remarks on a paper of G. Halász, *Periodica Math. Hung.* **8**, 135–150.

L.G. Sathe,

1953. On a problem of Hardy and Ramanujan on the distribution of integers having a given number of prime factors, *J. Indian Math. Soc.* **17**, 63–141.

1954. (même titre), *J. Indian Math. Soc.* **18**, 27–81.

L.G. Schnirelmann,

1930. Über additive Eigenschaften von Zahlen, *Annals Inst. polyt. Novocherkassk.* **14**, 3–28; *Math. Annalen* **107** (1933), 649–690.

I.J. Schoenberg,

1928. Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1, *Math. Z.* **28**, 171–200.

1936. On asymptotic distributions of arithmetical functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **39**, 315–330.

L. Schoenfeld,

1976. Sharper bounds for the Chebyshev functions $\vartheta(x)$ and $\psi(x)$, II, *Math. Comp.* **30**, 337–360.

A. Selberg,

1942. On the zeros of Riemann's zeta-function on the critical line, *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo*, n° 10.

1946. Contributions to the theory of the Riemann zeta-function, *Arch. Math. Naturvid.* **48**, n°5, 89–155.

1947. On an elementary method in the theory of primes, *Norske Vid. Selsk. Forh., Trondhjem* **19**, n° 18, 64–67.

1949. An elementary proof of the prime number theorem, *Ann. Math.* **50**, 305–313.

1954. Note on the paper by L.G. Sathe, *J. Indian Math. Soc.* **18**, 83–87.

1977. Remarks on multiplicative functions, in: *Number theory day* (Proc. Conf., Rockefeller Univ., New York, 1976), pp. 232–241. Lecture Notes in Math., Vol. 626, Springer, Berlin, 1977.

H.N. Shapiro,

1950. On the number of primes less than or equal to x, *Proc. Amer. Math. Soc.* **1**, 346–348.

1959. Tauberian theorems and elementary prime number theory, *Comm. Pure Appl. Math.* **12**, 579–610.

1972. On the convolution ring of arithmetic functions, *Comm. Pure Appl. Math.* **25**, 287–336.

C.L. Siegel,

1921. Über den Thueschen Satz, *Krist. Vid. Selsk. Skr. I,* n°16, 12 S.

1936. Über die Classenzahl quadratischer Körper, *Acta Arith.* **1**, 83–86.

1966. Gesammelte Abhandlungen, Springer-Verlag, vol. 1, 406–409.

V. Sitaramaiah & M.V. Subbarao,

1993. The maximal order of certain arithmetic functions, *Indian J. Pure Appl. Math.* **24**(6), 347-355.

M. Skałba,

1998. On ζ-convergence of sequences, *Math. Slovaca* **48**, 167–172.

H. Smida,

1991. Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman, *Acta Arith.***59**, 123–143.

A. Smith,

1980. On Shapiro's Tauberian theorem, *Carleton Math. Ser.* **170**, 14 pp.

A.V. Sokolovskii,

1979. Lower bounds in the "large sieve", *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* **91**, 125–133, 181–182; English translation: *J. Soviet. Math.* **17** (1981), 2166–2173.

K. Soundararajan,

2007. Small gaps between prime numbers: the work of Goldston-Pintz-Yıldırım, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **44**, n° 1, 1–18.

E. Sperner,

1928. Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Math. Z.* **27**, 544–548.

H. Squalli,

1985. *Sur la répartition du noyau d'un entier*, Thèse 3-ième cycle, Univ. Nancy I.

B. Srinivasan & A. Sampath,

1988. An elementary proof of the prime number theorem with a remainder term, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **53**, n°s 1–4, 1–50.

A. Stef & G. Tenenbaum,

2001. Inversion de Laplace effective, *The Annals of Probability* **29**, n° 1, 558–575.

C.M. Stein,

1984. *On the Turán–Kubilius inequality*, Technical Report n° 220, Stanford University.

T.J. Stieltjes,

1887. Note sur la mutliplication de deux séries, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, sér. 3, **6**, 210–215.

D. Suryanarayana & R.R. Sitaramachandra,

1973. The distribution of squarefull integers, *Arkiv. Math.* **11**, 195–201.

P. Szüsz,

1974. Remark to a theorem of P. Erdős, *Acta Arith.* **26**, 97–100.

A. Tauber,

1897. Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, *Monatshefte für Mathematik und Physik* **8**, 273–277.

G. Tenenbaum,

1982. Sur la densité divisorielle d'une suite d'entiers, *J. Number Theory* **15**, n° 3, 331-346.

1984. Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné, *Compositio Math.* **51**, 243–263.

1985. Sur la concentration moyenne des diviseurs, *Comment. Math. Helvetici* **60**, 411-428.

1987. Sur un problème extrémal en Arithmétique, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) **37**, 2, 1–18.

1989. La méthode du col en théorie analytique des nombres, in : C. Goldstein (ed.), *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1986–87*, Prog.

Math. 75, 411–441, Birkhäuser.

1990. Sur un problème d'Erdős et Alladi, in : C. Goldstein (ed.), *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–89*, Prog. Math. 91, 221–239, Birkhäuser.

1999. Crible d'Ératosthène et modèle de Kubilius, in: K. Győry, H. Iwaniec, J. Urbanowicz (eds.), *Number Theory in Progress*, Proceedings of the conference in honor of Andrzej Schinzel, Zakopane, Poland 1997, 1099–1129, Walter de Gruyter, Berlin, New York.

2006. Integers with a large friable component, *Acta Arith.* **124**, n° 3, 287–291.

2007. Remarques sur les valeurs moyennes de fonctions multiplicatives, *Ens. Mathématique* **53**, 155–178.

G. Tenenbaum & M. Mendès France,

2000. *Les nombres premiers*, collection 《Que sais-je ?》, n° 571, Presses Universitaires de France, seconde éd.

G. Tenenbaum & J. Wu,

1996. *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres* (G. Tenenbaum en collaboration avec J. Wu), Cours spécialisés, n° 2, Société Mathématique de France (1996), xiv + 251 pp.

2003. Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, *J. reine angew. Math.* **564**, 119–166.

2008a Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 3, *Compositio Math.* **144**, (2) 339–376.

2008b Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 4, in: J.-M. De Koninck, A. Granville & F. Luca (Eds.) *Anatomy of integers, CRM Proceeding & Lecture Notes*, Amer. Math. Soc.

A. Thue,

1909. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *J. für Math.* **135**, 284-305.

E.C. Titchmarsh,

1939. *The theory of functions*, Oxford University Press (seconde édition, réimpression en 1979).

1951. *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford University Press.

E.C. Titchmarsh & D.R. Heath-Brown,

1986. *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford.

K.C. Tong,

1956. On divisor problems II, III, *Acta Math. Sinica* **6**, 139–152; 515–541.

P. Turán,

1934. On a theorem of Hardy and Ramanujan, *J. London Math. Soc.* **9**, 274–276.

1936. Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan, *J. London Math. Soc.* **11**, 125–133.

J.D. Vaaler,

1985. Some extremal functions in Fourier Analysis, *Bull. (N.S.) of the Amer. Math. Soc.* **12**, 183–216.

G. Valiron,

1955. *Théorie des fonctions* (2-nde édition), Masson, Paris.

R.C. Vaughan,

1980. An elementary method in prime number theory, *Acta Arith.* **37**, 111–115.

1997. *The Hardy-Littlewood method*, second edition, Cambridge University Press.

A.I. Vinogradov,

1965. On the density hypothesis for Dirichlet L-functions, *Izv. Akad. Nauk SSSR,* Ser. Math. **29**, 903–934.

1966. Correction to the paper of A.I. Vinogradov 'On the density hypothesis for Dirichlet L-functions' , *Izv. Akad. Nauk SSSR,* Ser. Math. **30**, 719–720.

I.M. Vinogradov,

1954. The method of trigonometric sums in the theory of numbers, Interscience.

1958. A new estimate for $\zeta(1+it)$ (en russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR,* Ser. Math. **22**, 161–164.

G. Voronoï,

1903. Sur un problème de calcul des fonctions asymptotiques, *J. reine angew. Math.* **126**, 241–282.

M. Vose,

1984. Integers with consecutive divisors in small ratio, *J. Number Theory* **19**, 233–238.

A. Walfisz,

1963. *Weylsche Exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie*, VEB Deutscher Verlag, Berlin.

R. Warlimont,

1969. On squarefree numbers in arithmetic progressions, *Monatsh. Math.* **73**, 433–448.

1980. Squarefree numbers in arithmetic progressions, *J. London Math. Soc.* (2) **22**, n° 1, 21–24.

N. Watt,

1989. Exponential sums and the Riemann zeta function II, *J. London Math. Soc.*](2) **39**, 385–404.

H. Weyl,

1916. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Math. Ann* **77**, 313–404.

1921. Zur Abschätzung von $\zeta(1+ti)$, *Math. Z.* **10**, 88–101.

E.T. Whittaker & G.N. Watson,

1927. *A course of modern analysis* (4-ième éd.), Cambridge University Press (réimpression : 1986).

D.V. Widder,

1946. *The Laplace transform*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

1971. *An introduction to transform theory*, Academic Press, New York and London.

E. Wirsing,

1956. Über die Zahlen, deren Primteiler einer gegeben Menge angehören, *Arch. der Math.* **7**, n° 4, 263–272.

1967. Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **18**, 411–467.

J. Wu,

1990. Sur la suite des nombres premiers jumeaux, *Acta Arith.* **55**, 365–394.

2004. Chen's double sieve, Goldbach's conjecture and the twin prime problem, *Acta Arith.* **114**, n° 3, 215–273.

D. Zagier,

1997. Newman's short proof of the prime number theorem, *Amer. Math. Monthly* **104** n° 8, 705–708.

名词索引 I

A

B

E

F

J

名词索引 II

二画

三画

四画

五画

六画

七画

八画

九画

十画

十一画

十二画

十三画

十四画

十五画

十六画

法兰西数学精品译丛

• 数学天元基金资助项目 •

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

书号	书名	著译者
★24308-6	解析函数论初步	H. 嘉当
★25156-2	微分学	H. 嘉当
★28417-1	广义函数论	L. 施瓦兹
★25801-1	微分几何	M. 贝尔热、B. 戈斯丢
★26362-6	拓扑学教程	G. 肖盖
	代数教程	R. 戈德曼
★25155-5	谱理论讲义	J. 迪斯米埃
★24619-3	拟微分算子和 Nash-Moser 定理	S. 阿里纳克、P. 热拉尔
★029467-5	解析与概率数论导引	G. 特伦鲍姆
	概率与位势	C. 德拉歇利、P. 梅耶

说明：加★者已出版.